Politechnika Wrocławska

Programowanie obliczeń komputerowych

W11IKW-SI0106W, W11IKW-SI0106L
rok akademicki 2025/26
semestr zimowy

Wykład 6

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221

Politechnika Wrocławska

Plan

Biblioteka scipy

- funkcje specjalne
- interpolacja
- aproksymacja
- rozwiązywanie zagadnienia początkowego
- rozwiązywanie zagadnienia brzegowego

https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/index.html

Politechnika Wrocławska

Biblioteka scipy

Narzędzia numeryczne dotyczące m. in.:

- funkcji specjalnych (scipy.special)
- całkowania numerycznego (scipy.integrate)
- problemów optymalizacyjnych (scipy.optimize)
- interpolacji (scipy.interpolate)
- transformaty Fouriera (scipy.fft)
- zagadnień algebry liniowej (scipy.linalg)

https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/index.html

Politechnika Wrocławska

Funkcje specjalne

Przykład pokazuje:

- importowanie modułu special biblioteki scipy
- obliczanie wartości funkcji Bessela
- wykorzystanie polecenia meshgrid do wygenerowania dwuwymiarowej siatki punktów

scipy_01.py

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Przykład pokazuje użycie funkcji jv
z modułu special z biblioteki scipy
do obliczania wartości funkcji Bessela.
https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/special.html
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import special

# siatka argumentów
x = np.linspace(0,10)

# tablica rzędów funkcji Bessela
nu = np.array([0, 1, 2, 3])

# wykorzystanie funkcji meshgrid
# do wygenerowania dwuwymiarowych tablic:
# rzędów (nus) oraz argumentów (xs)
nus, xs = np.meshgrid(nu, x)
```

Politechnika Wrocławska

Funkcje specjalne

Przykład pokazuje:

- importowanie modułu special biblioteki scipy
- obliczanie wartości funkcji Bessela
- wykorzystanie polecenia meshgrid do wygenerowania dwuwymiarowej siatki punktów

scipy_01.py

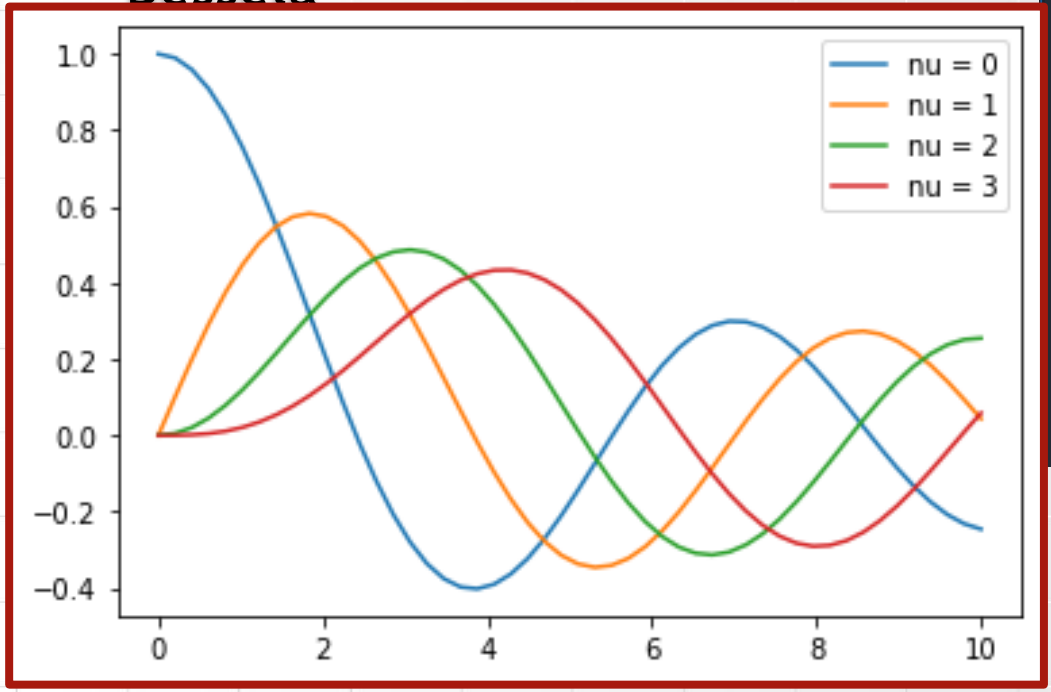
```
16  # tablica rzędów funkcji Bessela
17  nu = np.array([0, 1, 2, 3])
18
19  # wykorzystanie funkcji meshgrid
20  # do wygenerowania dwuwymiarowych tablic:
21  # rzędów (nus) oraz argumentów (xs)
22  nus, xs = np.meshgrid(nu, x)
23
24  # obliczenie funkcji Bessela
25  bessel = special.jv(nus, xs)
26
27  # stworzenie wykresów
28  lines = plt.plot(xs, bessel)
29
30  # utworzenie legendy
31  plt.legend(lines,("nu = " + format(n) for n in nu))
32  #plt.legend(lines,(r"$\nu$ = " + f"{n}" for n in nu))
33  #plt.legend(lines,(f"$J_{n}$" for n in nu))
```

Politechnika Wrocławska

Funkcje specjalne

Przykład pokazuje:

- importowanie modułu special biblioteki scipy
- obliczanie wartości funkcji Bessela



scipy_01.py

```
16  # tablica rzędów funkcji Bessela
17  nu = np.array([0, 1, 2, 3])
18
19  # wykorzystanie funkcji meshgrid
20  # do wygenerowania dwuwymiarowych tablic:
21  # rzędów (nus) oraz argumentów (xs)
22  nus, xs = np.meshgrid(nu, x)
23
24  # obliczenie funkcji Bessela
25  bessel = special.jv(nus, xs)
26
27  # stworzenie wykresów
28  lines = plt.plot(xs, bessel)
29
30  # utworzenie legendy
31  plt.legend(lines,("nu = " + format(n) for n in nu))
32  #plt.legend(lines,(r"$\nu$ = " + f"{n}" for n in nu))
33  #plt.legend(lines,(f"$J_{n}$" for n in nu))
```

Politechnika Wrocławska

Funkcje specjalne

Przykład pokazuje:

- obliczanie funkcji Bessela
- wykorzystanie funkcji special.jn_zeros()

scipy_02.py

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Przykład pokazuje użycie funkcji j0 oraz jn_zeros
z modułu special z biblioteki scipy
do obliczania wartości funkcji Bessela.
https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/special.html
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy import special

# skalowanie funkcji Bessela
def scaled_bessel(x, k):
    a = special.jn_zeros(0, k)[-1]
    return special.j0(a*x)
```

Politechnika Wrocławska

Funkcje specjalne

Przykład pokazuje:

- obliczanie funkcji Bessela
- wykorzystanie funkcji special.jn_zeros()

scipy_02.py

```
18  # utworzenie siatki punktów
19  # na odcinku jednostkowym
20  x = np.linspace(0,1)
21
22  # utworzenie wykresów skalowanych funkcji Bessela
23  for k in range(1, 6):
24      plt.plot(x, scaled_bessel(x, k),
25                  label="k = " + format(k,"d"))
26
27  plt.legend()
```

Politechnika Wrocławska

Funkcje specjalne

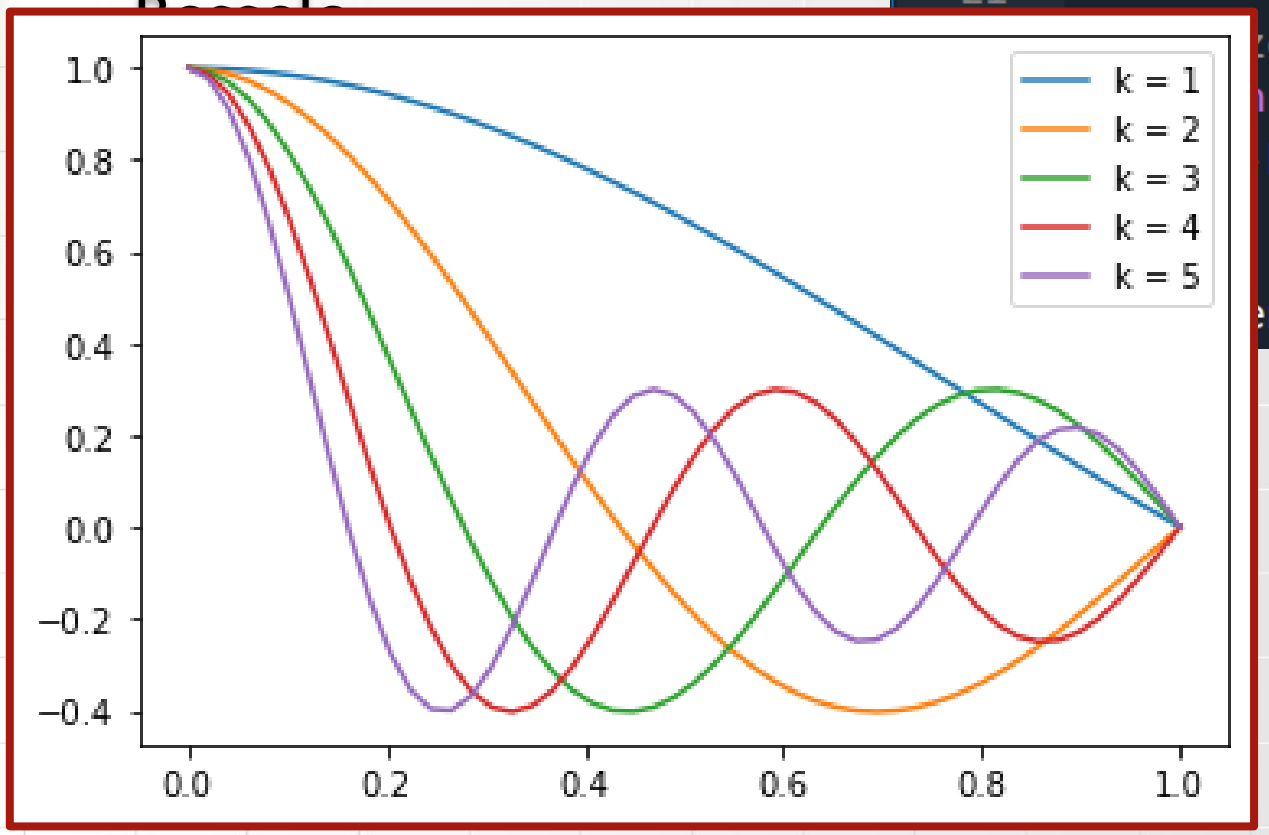
Przykład pokazuje:

- obliczanie funkcji

scipy_02.py

```
18  # utworzenie siatki punktów
19  # na odcinku jednostkowym
20  x = np.linspace(0,1)
21
    zenie wykresów skalowanych funkcji Bessela
    range(1, 6):
    plot(x, scaled_bessel(x, k),
         label="k = " + format(k,"d"))

    end()
```



Politechnika Wrocławska

Interpolacja

Przykład pokazuje:

- interpolację danych funkcją interp
- funkcja interp zwraca tablicę wartości interpolowanych dla podanej tablicy argumentów na podstawie dostarczonych danych
- klasa CubicSpline (scipy.interpolate) pozwala stworzyć obiekt reprezentujący interpolujący wielomian sklejany

scipy_03a.py | scipy_04.py | scipy_05.py | scipy_06.py

```
1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  """
3  Przykład pokazujący interpolację danych.
4  Znane wartości funkcji sinus w węzłach
5  są interpolowane funkcją interp z biblioteki scipy
6  oraz klasą CubicSpline z modułu scipy.interpolate
7  https://docs.scipy.org/doc/scipy/tutorial/interpolate
8  """
9
10 import numpy as np
11 import matplotlib.pyplot as plt
12 from scipy.interpolate import CubicSpline
13
14 # dane węzłów interpolacji
15 x = np.array([0, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12])/6*np.pi
16 y = np.sin(x)
```

Politechnika Wrocławska

Interpolacja

Przykład pokazuje:

- interpolację danych funkcją interp
- funkcja interp zwraca tablicę wartości interpolowanych dla podanej tablicy argumentów na podstawie dostarczonych danych
- klasa CubicSpline (scipy.interpolate) pozwala stworzyć obiekt reprezentujący interpolujący wielomian sklejany

scipy_03a.py | scipy_04.py | scipy_05.py | scipy_06.py

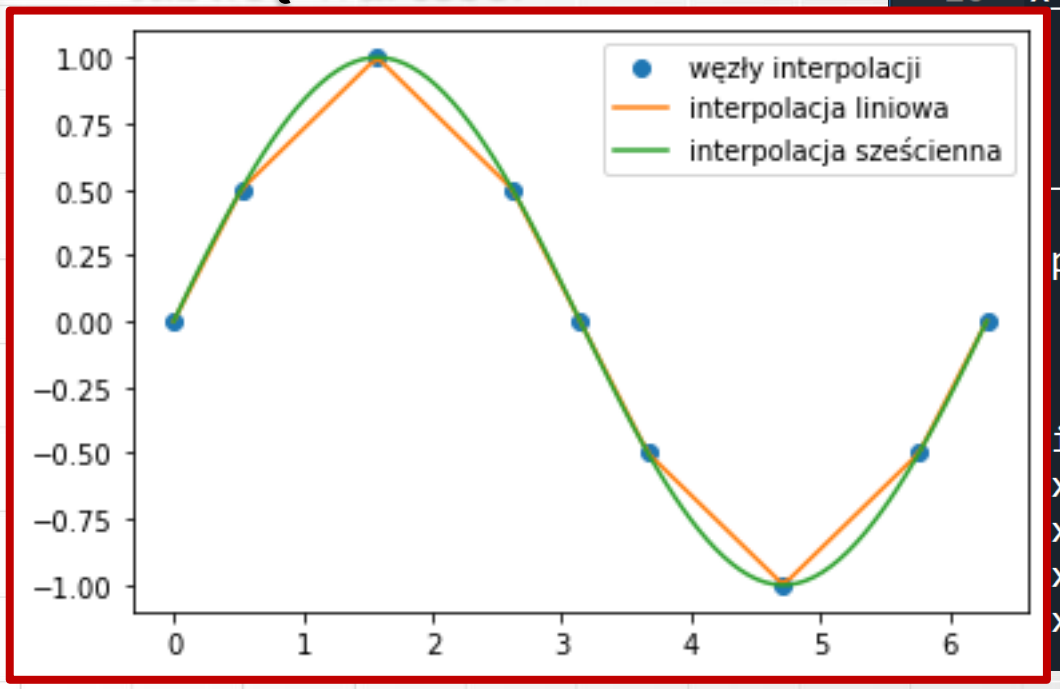
```
13
14  # dane węzłów interpolacji
15  x = np.array([0, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12])/6*np.pi
16  y = np.sin(x)
17
18  # siatka punktów, dla których będą obliczane
19  # wartości funkcji interpolujących
20  x_int = np.linspace(0, 2, 100)*np.pi
21
22  # wyznaczenie funkcji interpolujących
23  # domyślnie liniowej funkcji sklejanej
24  y_int = np.interp(x_int, x, y)
25  # funkcji sklejanej sześciennej
26  spl = CubicSpline(x, y)
27
28
29  # utworzenie wykresów
30  fig, ax = plt.subplots()
31  ax.plot(x, y, 'o', label="węzły interpolacji")
32  ax.plot(x_int, y_int, label="interpolacja liniowa")
33  ax.plot(x_int, spl(x_int), label="interpolacja sześcienna")
34  ax.legend()
35
```

Politechnika Wrocławska

Interpolacja

Przykład pokazuje:

- interpolację danych funkcją interp
- funkcja interp zwraca tablicę wartości



scipy_03a.py | scipy_04.py | scipy_05.py | scipy_06.py

```
13
14  # dane węzłów interpolacji
15  x = np.array([0, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12])/6*np.pi
16  y = np.sin(x)
17
18  # siatka punktów, dla których będą obliczane
19  # wartości funkcji interpolujących
20  x_int = np.linspace(0, 2, 100)*np.pi

    wyznaczenie funkcji interpolujących
    domyślnie liniowej funkcji sklejanej
_int = np.interp(x_int, x, y)
    funkcji sklejanej sześciennej
pl = CubicSpline(x, y)


    utworzenie wykresów
ig, ax = plt.subplots()
x.plot(x, y, 'o', label="węzły interpolacji")
x.plot(x_int, y_int, label="interpolacja liniowa")
x.plot(x_int, spl(x_int), label="interpolacja sześcienna")
x.legend()
```

Politechnika Wrocławska

Aproksymacja

Przykład pokazuje:

- aproksymację danych - curve_fit (scipy.optimize)

- zależność liniową wykorzystano do wygenerowania danych
- następnie do danych dodano szum
- funkcją curve_fit znaleziono parametry dopasowania funkcji liniowej do danych z szumem

scipy_04.py

```
1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  """
3  Przykład pokazujący aproksymację danych
4  funkcją liniową.
5  Dopasowanie wyznaczane z użyciem
6  funkcji curve_fit z modułu optimize
7  biblioteki scipy.
8  https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/genera
9  """
10
11 import numpy as np
12 import matplotlib.pyplot as plt
13 from scipy.optimize import curve_fit
14
15 # definicja funkcji liniowej
16 # x - argument
17 # a - współczynnik kierunkowy
18 # b - wyraz wolny
19 #def fun(x, a, b):
20 #    return a*x + b
21 # równoważna definicja z wykorzystaniem
22 # funkcji anonimowej
23 fun = lambda x, a, b : a*x + b
```

Politechnika Wrocławska

Aproksymacja

Przykład pokazuje:

- aproksymację danych - curve_fit (scipy.optimize)

- zależność liniową wykorzystano do wygenerowania danych
- następnie do danych dodano szum
- funkcją curve_fit znaleziono parametry dopasowania funkcji liniowej do danych z szumem

scipy_04.py

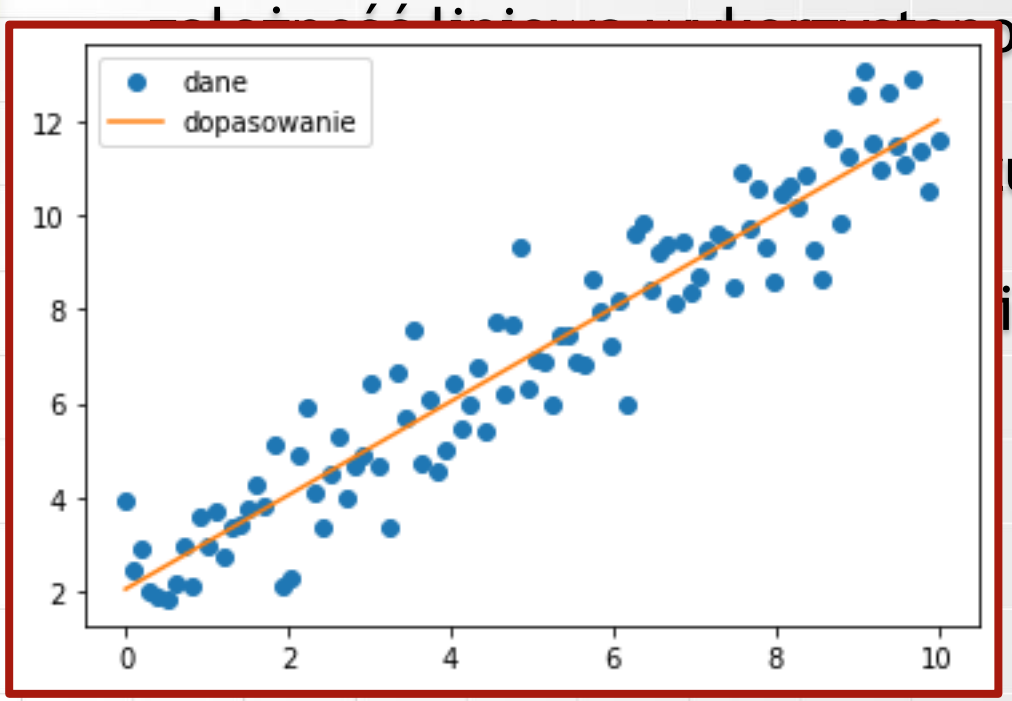
```
25  # utworzenie danych do aproksymacji
26  # dane obliczone z wykorzystaniem
27  # funkcji liniowej z dodanym szumem
28  x = np.linspace(0, 10, 100)
29  y = fun(x, 1, 2) # y = 1*x + 2
30  yn = y + np.random.normal(size=len(x))
31
32  # dopasowanie do danych (x, yn)
33  # funkcja curve_fit znajduje parametry
34  # funkcji fun, które najlepiej dopasowywują ją
35  # do danych wejściowych
36  p_opt, _ = curve_fit(fun, x, yn)
37  print(p_opt)
38
39  # utworzenie wykresów
40  fig, ax = plt.subplots()
41  # danych wejściowych
42  ax.plot(x, yn, 'o', label="dane")
43  # danych dopasowanych
44  ax.plot(x, fun(x, *p_opt), label="dopasowanie")
45  ax.legend()
```

Politechnika Wrocławska

Aproksymacja

Przykład pokazuje:

- aproksymację danych - curve_fit (scipy.optimize)



scipy_04.py

```
25  # utworzenie danych do aproksymacji
26  # dane obliczone z wykorzystaniem
27  # funkcji liniowej z dodanym szumem
28  x = np.linspace(0, 10, 100)
29  y = fun(x, 1, 2) # y = 1*x + 2
30  yn = y + np.random.normal(size=len(x))
31
32  # dopasowanie do danych (x, yn)
33  # funkcja curve_fit znajduje parametry
34  # funkcji fun, które najlepiej dopasowywują ją
35  # do danych wejściowych
36  p_opt, _ = curve_fit(fun, x, yn)
37  print(p_opt)
38
39  # utworzenie wykresów
40  fig, ax = plt.subplots()
41  # danych wejściowych
42  ax.plot(x, yn, 'o', label="dane")
43  # danych dopasowanych
44  ax.plot(x, fun(x, *p_opt), label="dopasowanie")
45  ax.legend()
```

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie początkowe

Przykład pokazuje:

- numeryczne rozwiązanie zagadnienia początkowego z wykorzystaniem funkcji solve_ivp (scipy.integrate)

scipy_05.py scipy_06.py

```
1  # -*- coding: utf-8 -*-
2  """
3  Przykład pokazujący rozwiązywanie zagadnienia
4  początkowego z użyciem funkcji solve_ivp
5  z modułu integrate biblioteki scipy.
6  https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/gener
7  """
8
9  import numpy as np
10 import matplotlib.pyplot as plt
11 from scipy.integrate import solve_ivp
12
13 # prawa strona równania różniczkowego
14 # dg/dt = f(g, t)
15 # f(t, g) = -g/tau
16 tau = 1
17 f = lambda t, g : -g/tau
```

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie początkowe

Przykład pokazuje:

- numeryczne rozwiązanie zagadnienia początkowego z wykorzystaniem funkcji solve_ivp (scipy.integrate)

scipy_05.py

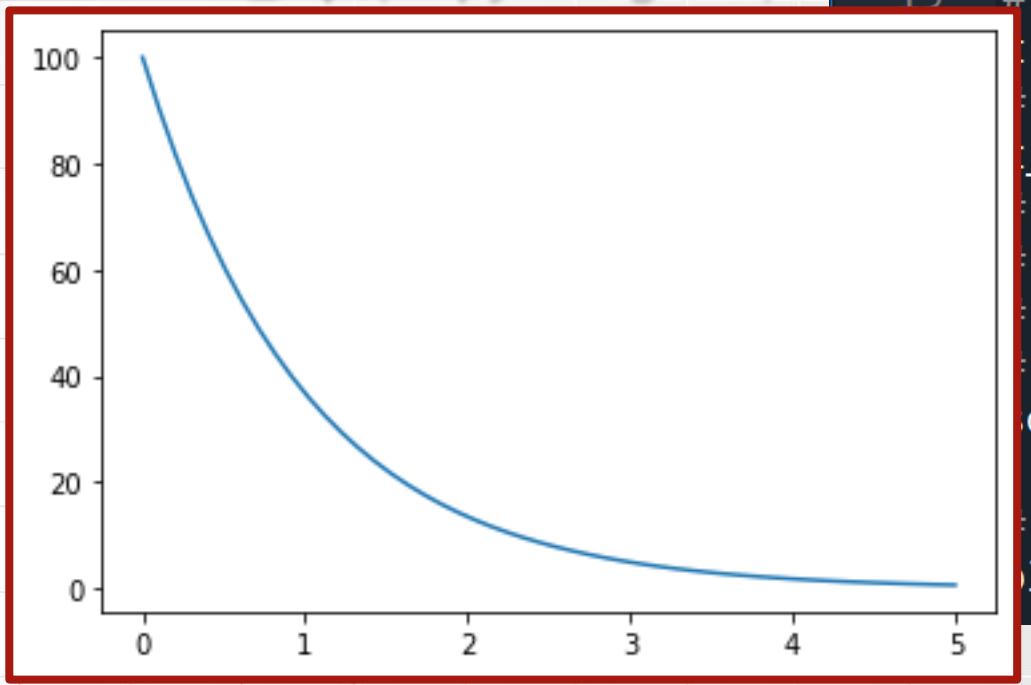
```
13  # prawa strona równania różniczkowego
14  # dg/dt = f(g, t)
15  # f(t, g) = -g/tau
16  tau = 1.
17  f = lambda t, g : -g/tau
18
19  # zakres zmiennej niezależnej
20  t = np.array([0, 5])
21  # wektor zmiennej niezależnej
22  t_eval = np.linspace(*t)
23  # obiekt sol zawieta obliczone rozwiązanie
24  # dla podanego równania różniczkowego (f)
25  # z zadanym warunkiem początkowym (g(0)=100)
26  # dla podanych wartoci zmiennej niezależnej t_eval
27  sol = solve_ivp(f, t, [100], t_eval = t_eval)
28
29  # wykres obliczonego rozwiązania
30  plt.plot(sol.t,sol.y[0])
```

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie początkowe

Przykład pokazuje:

- numeryczne rozwiązanie zagadnienia początkowego z wykorzystaniem funkcji solve_ivp (scipy.integrate)



scipy_05.py

```
13  # prawa strona równania różniczkowego
14  # dg/dt = f(g, t)
15  # f(t, g) = -g/tau
16  tau = 1.
17  f = lambda t, g : -g/tau
18
19  # zakres zmiennej niezależnej
    t = np.array([0, 5])
    wektor zmiennej niezależnej
    t_eval = np.linspace(*t)
    obiekt sol zawieta obliczone rozwiązanie
    dla podanego równania różniczkowego (f)
    z zadanym warunkiem początkowym (g(0)=100)
    dla podanych wartoci zmiennej niezależnej t_eval
    sol = solve_ivp(f, t, [100], t_eval = t_eval)

    wykres obliczonego rozwiązania
    plt.plot(sol.t,sol.y[0])
```

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie brzegowe

Przykład pokazuje:

- numeryczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego z wykorzystaniem funkcji solve_bvp (scipy.integrate)

scipy_06.py*

```python
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Przykład pokazujący rozwiązywanie zagadnienia
początkowego z użyciem funkcji solve_bvp
z modułu integrate biblioteki scipy.
https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generat
"""

import numpy as np
from scipy.integrate import solve_bvp
import matplotlib.pyplot as plt

# Definicja równania różniczkowego
def ode(x, y, p):
    """
    Układ równań różniczkowych przekształcony
    na postać równań pierwszego rzędu.
    y[0] = u, y[1] = du/dx
    """
    k = p[0]  # Parametr (k)
    return np.vstack((y[1], -k**2 * y[0]))
```

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie brzegowe

Przykład pokazuje:

- numeryczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego z wykorzystaniem funkcji solve_bvp (scipy.integrate)

scipy_06.py

```python
# Definicja równania różniczkowego
def ode(x, y, p):
    """
    Układ równań różniczkowych przekształcony
    na postać równań pierwszego rzędu.
    y[0] = u, y[1] = du/dx
    """
    k = p[0]  # Parametr (k)
    return np.vstack((y[1], -k**2 * y[0]))

# Definicja warunków brzegowych
def bc(ya, yb, p):
    """
    Warunki brzegowe:
    u(0) = 0
    u(1) = 0
    """
    return np.array([ya[0], yb[0], ya[1] - p[0]])
```

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie brzegowe

Przykład pokazuje:

- numeryczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego z wykorzystaniem funkcji solve_bvp (scipy.integrate)

scipy_06.py

```
31
32  # Siatka początkowa (przedział x od 0 do 1)
33  x = np.linspace(0, 1, 100)
34
35  # Zgadywanie początkowe dla funkcji u(x) i jej pochodnej du/dx
36  y_guess = np.vstack((x, np.ones_like(x)))  # y[0] = x, y[1] = du/dx
37
38  # Początkowe zgadywanie dla wartości k
39  k_guess = 9.0
40
41  # Rozwiązanie za pomocą solve_bvp
42  sol = solve_bvp(ode, bc, x, y_guess, p=[k_guess])
43
```

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie brzegowe

Przykład pokazuje:

- numeryczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego z wykorzystaniem funkcji solve_bvp (scipy.integrate)

```
41  # Rozwiązanie za pomocą solve_bvp
42  sol = solve_bvp(ode, bc, x, y_guess, p=[k_guess])
43
44  # Sprawdzenie sukcesu
45  if sol.success:
46      print(f"Rozwiązanie zakończone sukcesem. Znalezione k: {sol.p[0]}")
47  else:
48      print("Rozwiązanie nie powiodło się.")
49
50  # Wizualizacja rozwiązania
51  plt.plot(sol.x, sol.y[0], label=f"u(x), k = {sol.p[0]:.4f}")
52  plt.title("Rozwiązanie równania różniczkowego")
53  plt.xlabel("x")
54  plt.ylabel("u(x)")
55  plt.axhline(0, color="black", linewidth=0.8, linestyle="--")
56  plt.legend()
57  plt.grid(True)
58  plt.show()
```

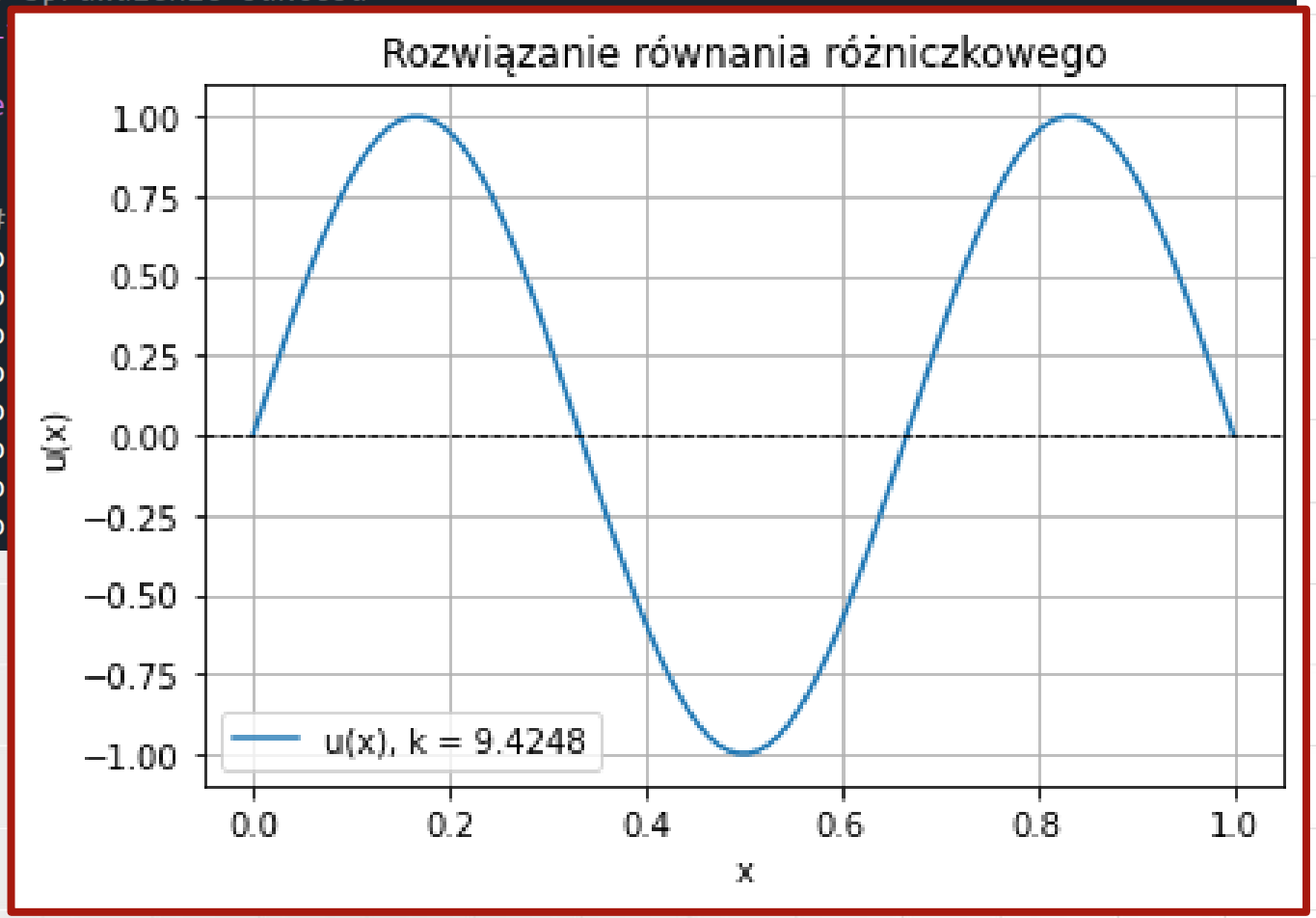
Politechnika Wrocławska

Zagadnienie brzegowe

Przykład pokazuje:

- numeryczne rozwiązanie zagadnienia brzegowego z wykorzystaniem funkcji solve_bvp (scipy.integrate)

```
41  # Rozwiązanie za pomocą solve_bvp
42  sol = solve_bvp(ode, bc, x, y_guess, p=[k_guess])
43
44  # Sprawdzenie sukcesu
45  i
46
47  e
48
49
50  #
51  p
52  p
53  p
54  p
55  p
56  p
57  p
58  p
```



Politechnika Wrocławska

Podsumowanie

Wybrane funkcje biblioteki scipy

- interpolacja
- aproksymacja
- rozwiązywanie zagadnienia początkowego
- rozwiązywanie zagadnienia brzegowego