

Zjawiska nieliniowe w światłowodach

W11OPA-SM0050W
rok akademicki 2025/26
semestr zimowy

Wykład 4

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221

Plan wykładu

Nieliniowe równanie Schrödingera

Przypadek wektorowy

- tensor podatności trzeciego rzędu
- układ sprzężonych nieliniowych równań Schrödingera

Propagacja nieliniowa w światłowodach dwójłomnych

- o niskiej dwójłomności
- o wysokiej dwójłomności
- o liniowo/eliptycznie/kołowo spolaryzowanych modach własnych

Wektorowa niestabilność modulacyjna
w światłowodach dwójłomnych

Nieliniowe równanie Schrödingera

Równanie falowe - przypadek skalarny

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}]$$

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}]$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [P_{NL}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}]$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Równanie falowe - przypadek skalarny

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[P_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \right]$$

$$P_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi_{\text{xxxx}}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2 E(\mathbf{r}, t)$$

$$\bar{n}_2 = \frac{3}{8n} \text{Re} \left(\chi_{\text{xxxx}}^{(3)} \right) \qquad \Delta n = \bar{n}_2 |E|^2$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Równanie falowe - przypadek wektorowy

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\hat{x} E_x(\mathbf{r}, t) + \hat{y} E_y(\mathbf{r}, t) \right] \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}$$

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Tensor podatności trzeciego rzędu

- w ogólności 81 elementów tensora podatności trzeciego rzędu

$$\chi_{ijkl}^{(3)}$$

- w ośrodku izotropowym (np. w szkłe krzemionkowym)

$$\chi_{ijkl}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \chi_{xyxy}^{(3)} \delta_{ik} \delta_{jl} + \chi_{xyyx}^{(3)} \delta_{il} \delta_{jk}$$

$$\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)}$$

$$\chi_{xxyy}^{(3)} = \chi_{xyxy}^{(3)} = \chi_{xyyx}^{(3)} = \frac{1}{3} \chi_{xxxx}^{(3)}$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Polaryzacja nieliniowa

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\hat{x}P_x(\mathbf{r}, t) + \hat{y}P_y(\mathbf{r}, t)] \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}$$

$$P_i = \frac{3\varepsilon_0}{4} \sum_j \left(\chi_{\text{xxyy}}^{(3)} E_i E_j E_j^* + \chi_{\text{xyxy}}^{(3)} E_j E_i E_j^* + \chi_{\text{xyyx}}^{(3)} E_j E_j E_i^* \right)$$

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \sum_j \left(\chi_{\text{xxyy}}^{(3)} E_x E_j E_j^* + \chi_{\text{xyxy}}^{(3)} E_j E_x E_j^* + \chi_{\text{xyyx}}^{(3)} E_j E_j E_x^* \right)$$

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \left(\chi_{\text{xxxx}}^{(3)} E_x E_x E_x^* + \chi_{\text{xxyy}}^{(3)} E_x E_y E_y^* + \chi_{\text{xyxy}}^{(3)} E_y E_x E_y^* + \chi_{\text{xyyx}}^{(3)} E_y E_y E_x^* \right)$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Polaryzacja nieliniowa

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \left(\chi_{xxxx}^{(3)} E_x E_x E_x^* + \chi_{xxyy}^{(3)} E_x E_y E_y^* + \chi_{xyxy}^{(3)} E_y E_x E_y^* + \chi_{yyyx}^{(3)} E_y E_y E_x^* \right)$$

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left(E_x E_x E_x^* + \frac{1}{3} E_x E_y E_y^* + \frac{1}{3} E_y E_x E_y^* + \frac{1}{3} E_y E_y E_x^* \right)$$

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left(|E_x|^2 E_x + \frac{1}{3} |E_y|^2 E_x + \frac{1}{3} |E_y|^2 E_x + \frac{1}{3} E_y E_y E_x^* \right)$$

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right) E_x + \frac{1}{3} E_y^2 E_x^* \right]$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Polaryzacja nieliniowa

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right) E_x + \frac{1}{3} E_y^2 E_x^* \right]$$

$$P_y = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_y|^2 + \frac{2}{3} |E_x|^2 \right) E_y + \frac{1}{3} E_x^2 E_y^* \right]$$

$$\Delta n_x = \bar{n}_2 \left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right)$$

$$\Delta n_y = \bar{n}_2 \left(|E_y|^2 + \frac{2}{3} |E_x|^2 \right)$$

Nieliniowe równanie Schrödingera - przypadek skalarny

Rozdzielenie zmiennych

$$E(\mathbf{r}, t) = F(x, y) A(z, t) \exp(i\beta_0 z)$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

Nieliniowe równanie Schrödingera - przypadek wektorowy

Rozdzielenie zmiennych

$$E_j(\mathbf{r}, t) = F(x, y) A_j(z, t) \exp(i\beta_0 z) \quad j = x, y$$

Układ nieliniowych sprzężonych równań Schrödingera

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right) A_x + \frac{i\gamma}{3} A_x^* A_y^2 \exp(-2i\Delta\beta z)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right) A_y + \frac{i\gamma}{3} A_y^* A_x^2 \exp(+2i\Delta\beta z)$$

Nieliniowe równanie Schrödingera - przypadek wektorowy

Układ nieliniowych sprzężonych równań Schrödingera

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right) A_x + \frac{i\gamma}{3} A_x^* A_y^2 \exp(-2i\Delta\beta z)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right) A_y + \frac{i\gamma}{3} A_y^* A_x^2 \exp(+2i\Delta\beta z)$$

$$\Delta\beta = \beta_{0x} - \beta_{0y} = \frac{2\pi}{\lambda} B_m = \frac{2\pi}{L_B}$$

$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma$$

$$\beta_{1x} - \beta_{1y} = \frac{1}{c} (N_x - N_y) = \frac{G}{c}$$

$$\beta_{2x} = \beta_{2y} = \beta_2$$

Światłowody o wysokiej dwójłomności

Układ nieliniowych sprzężonych równań Schrödingera

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right) A_x + \frac{i\gamma}{3} A_x^* A_y^2 \exp(-2i\Delta\beta z)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right) A_y + \frac{i\gamma}{3} A_y^* A_x^2 \exp(+2i\Delta\beta z)$$

Światłowody o niskiej dwójłomności

CNLSE - w bazie polaryzacji kołowych

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= A_x \exp(+i\Delta\beta z/2) & A_+ &= (\bar{A}_x + i\bar{A}_y)/\sqrt{2} \\ \bar{A}_y &= A_y \exp(-i\Delta\beta z/2) & A_- &= (\bar{A}_x - i\bar{A}_y)/\sqrt{2}\end{aligned}\quad \beta_1 = \beta_{1x} \approx \beta_{1y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_+}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A_+}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_+}{\partial t^2} &= \frac{i\Delta\beta}{2} A_- + \frac{2i\gamma}{3} (|A_+|^2 + 2|A_-|^2) A_+ \\ \frac{\partial A_-}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A_-}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_-}{\partial t^2} &= \frac{i\Delta\beta}{2} A_+ + \frac{2i\gamma}{3} (|A_-|^2 + 2|A_+|^2) A_-\end{aligned}$$

Światłowody o eliptycznie spolaryzowanych stanach własnych

CNLSE - eliptyczne stany własne

- Pole elektryczne w bazie polaryzacji eliptycznych

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\hat{\mathbf{e}}_x E_x(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{e}}_y E_y(\mathbf{r}, t) \right] \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \frac{\hat{x} + ir\hat{y}}{\sqrt{1+r^2}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_y = \frac{r\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{1+r^2}}, \quad r = \tan \frac{\theta}{2}$$

- Przeprowadzając analogiczne wyprowadzenie można otrzymać układ nieliniowych równań Schrödingera dla eliptycznie spolaryzowanych modów własnych

Światłowody o eliptycznie spolaryzowanych stanach własnych

Światłowód o dużej dwójłomności eliptycznej

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_x|^2 + B|A_y|^2 \right) A_x$$
$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_y|^2 + B|A_x|^2 \right) A_y$$

Światłowody o eliptycznie spolaryzowanych stanach własnych

Światłowód o dużej dwójłomności eliptycznej

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_x|^2 + B|A_y|^2 \right) A_x$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_y|^2 + B|A_x|^2 \right) A_y$$

- dwójłomność liniowa $\theta = 0, B = \frac{2}{3}$
- dwójłomność kołowa $\theta = \frac{\pi}{2}, B = 2$
- ciekawy przypadek $B = 1, \theta \approx 35^\circ$

Wektorowa niestabilność modulacyjna

Światłowod o niskiej dwójłomności

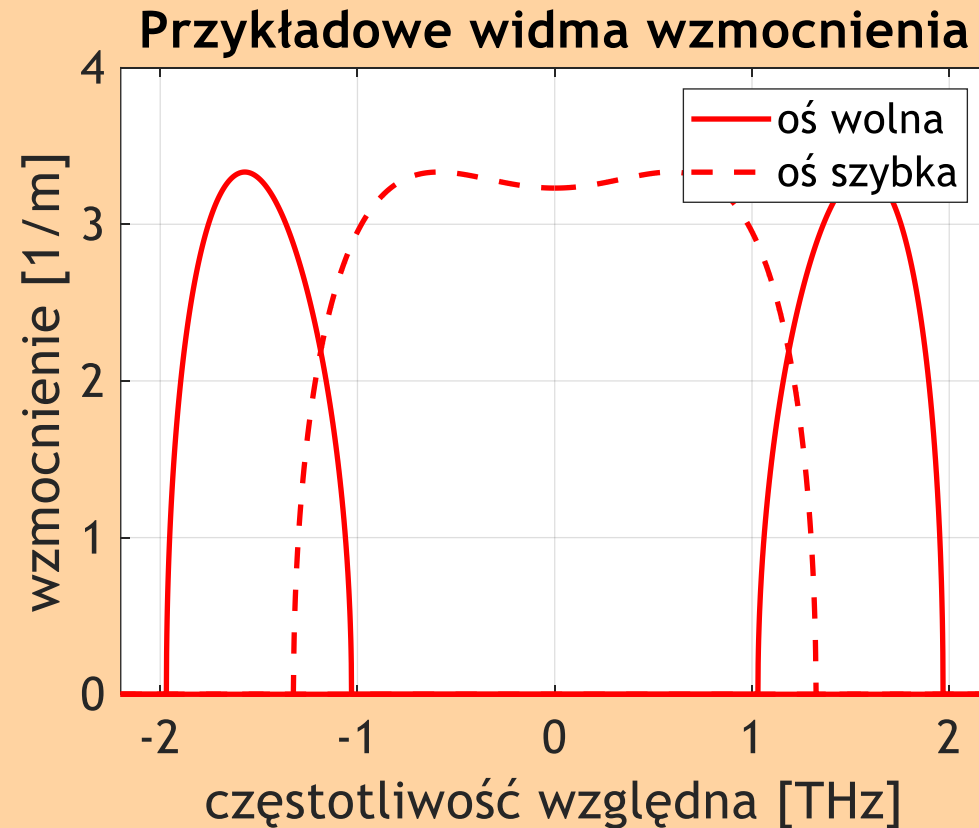
- Światło spolaryzowane liniowo wzdłuż osi szybkiej/wolnej - pasma niestabilności modulacyjnej w ortogonalnej polaryzacji

Światłowod o wysokiej dwójłomności

- Światło spolaryzowane liniowo, kąt azymutu $\pi/4$ - pasma niestabilności modulacyjnej w obu polaryzacjach

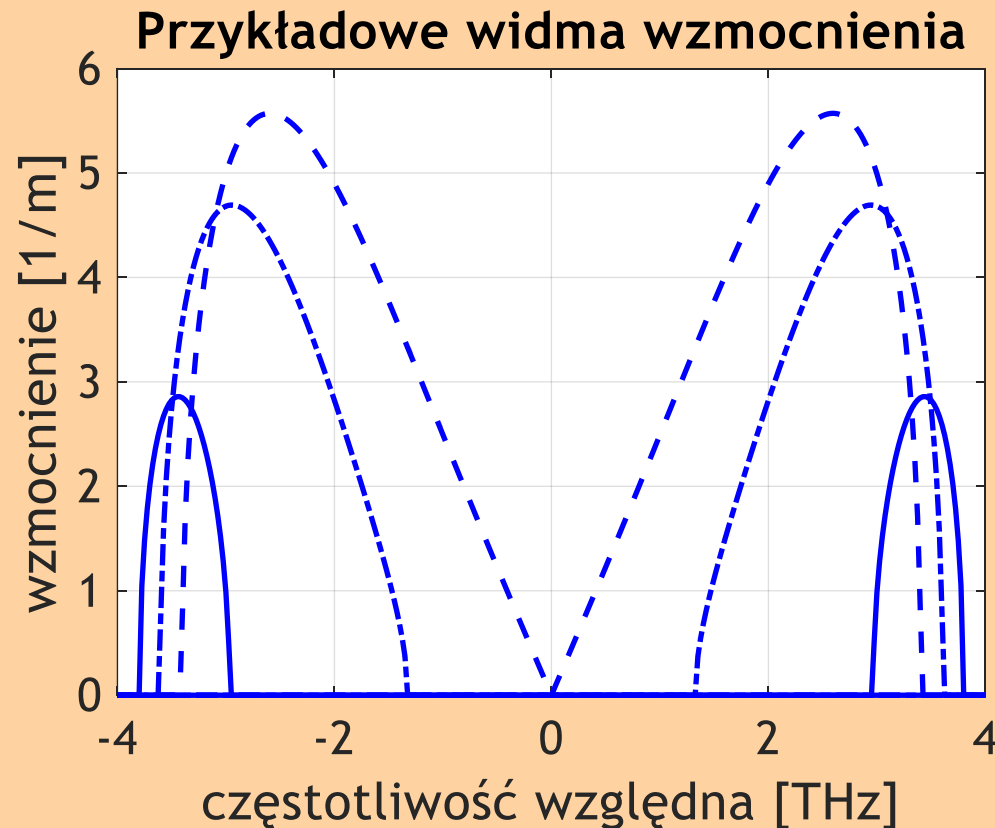
Wektorowa niestabilność modulacyjna

Światłowód o niskiej dwójłomności



Wektorowa niestabilność modulacyjna

Światłowód o wysokiej dwójłomności

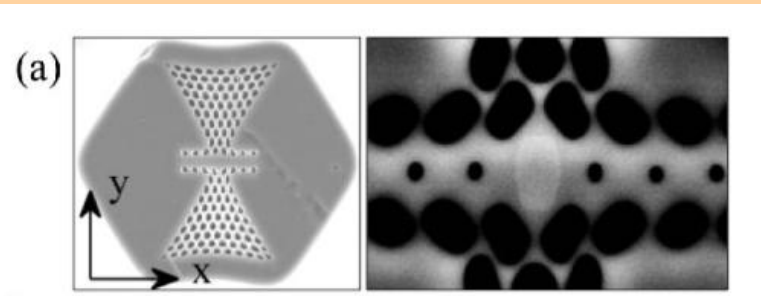


$$\Omega_{\max} = \frac{|\beta_{1x} - \beta_{1y}|}{\beta_2}$$

$$f_{\max} = \frac{G}{c\beta_2}$$

Wektorowa niestabilność modulacyjna

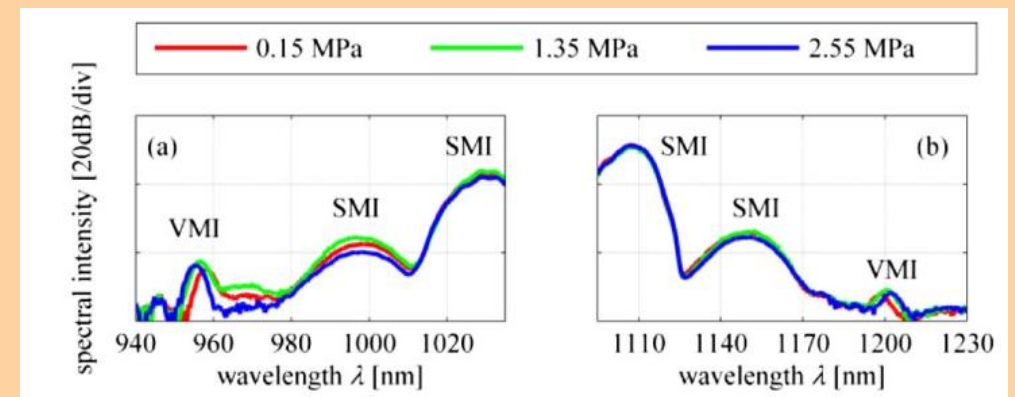
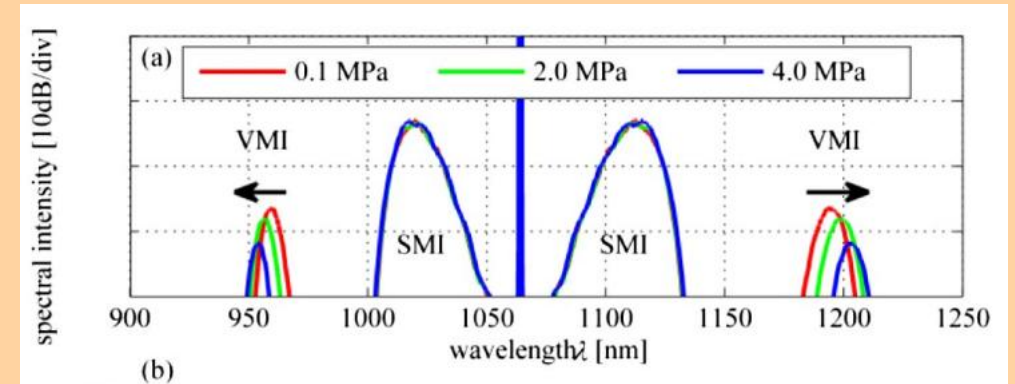
Światłowód o wysokiej dwójłomności grupowej



λ_p	1064 nm
G	$-1,42 \times 10^{-4}$
β_2	$-2,82 \text{ ps}^2/\text{km}$
P_0	1,2 kW
γ	15 1/W/km

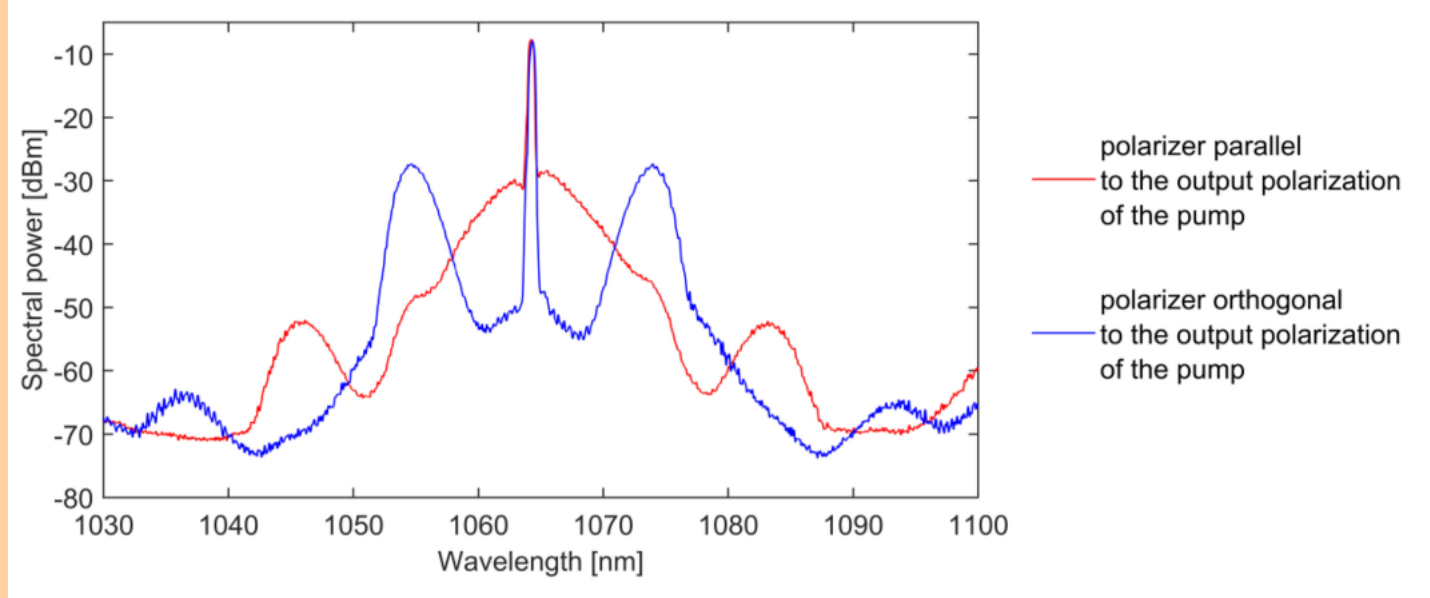
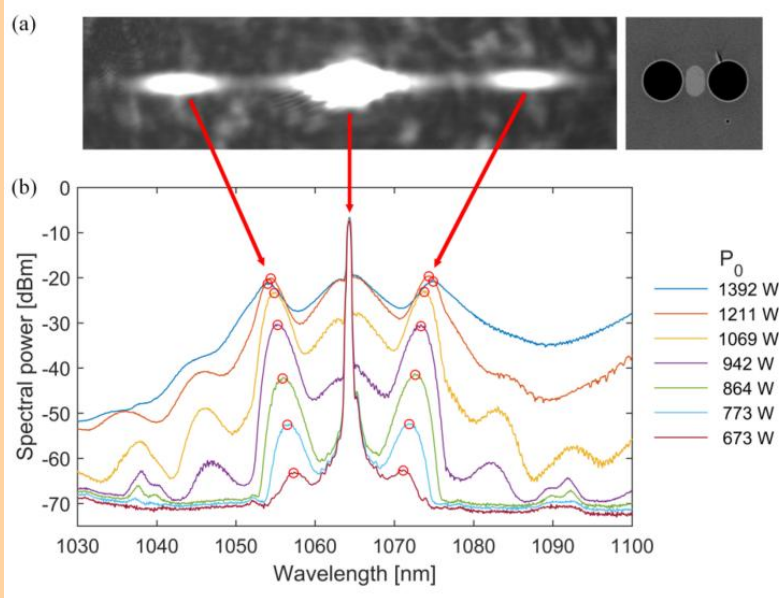
$$\Omega_s = \pm \sqrt{\frac{2\gamma P_0}{|\beta_2|}}$$

$$\Omega_v = \pm \frac{G}{c\beta_2}$$



Wektorowa niestabilność modulacyjna

Światłowód o eliptycznie spolaryzowanych modach własnych



Podsumowanie

Nieliniowe równanie Schrödingera

Układ sprzężonych nieliniowych równań Schrödingera

Propagacja nieliniowa w światłowodach dwójłomnych

Wektorowa niestabilność modulacyjna
w światłowodach dwójłomnych