

Zjawiska nieliniowe w światłowodach

W11OPA-SM0050W
rok akademicki 2025/26
semestr zimowy

Wykład 3

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221

Plan wykładu

Nieliniowe równanie Schrödingera

Dyspersja chromatyczna

Samomodulacja fazy

Solitony

Niestabilność modulacyjna

Nieliniowe równanie Schrödingera

Równanie falowe

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \left(1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL}\right) k_0^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2$$

Rozdzielenie zmiennych

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z)$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma(\omega_0) |A|^2 A$$

$$\gamma(\omega_0) = \frac{\omega_0 \bar{n}_2}{c} \frac{\iint_S |F(x, y)|^4 dx dy}{\iint_S |F(x, y)|^2 dx dy}$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Nieliniowe równanie Schrödingera [V/m]

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma(\omega_0) |A|^2 A$$

$$\gamma(\omega_0) = \frac{\omega_0 \bar{n}_2}{c} \frac{\iint_S |F(x, y)|^4 dx dy}{\iint_S |F(x, y)|^2 dx dy}$$

Nieliniowe równanie Schrödingera [sqrt(W)]

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma(\omega_0) |A|^2 A$$

$$\gamma(\omega_0) = \frac{\omega_0 n_2}{c A_{\text{eff}}}$$

$$n_2 = \frac{2\bar{n}_2}{\varepsilon_0 n c}$$

$$A_{\text{eff}} = \frac{\left(\iint_S |F(x, y)|^2 dx dy \right)^2}{\iint_S |F(x, y)|^4 dx dy}$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Nieliniowe równanie Schrödingera w ramce
czasowej poruszającej się z impulsem

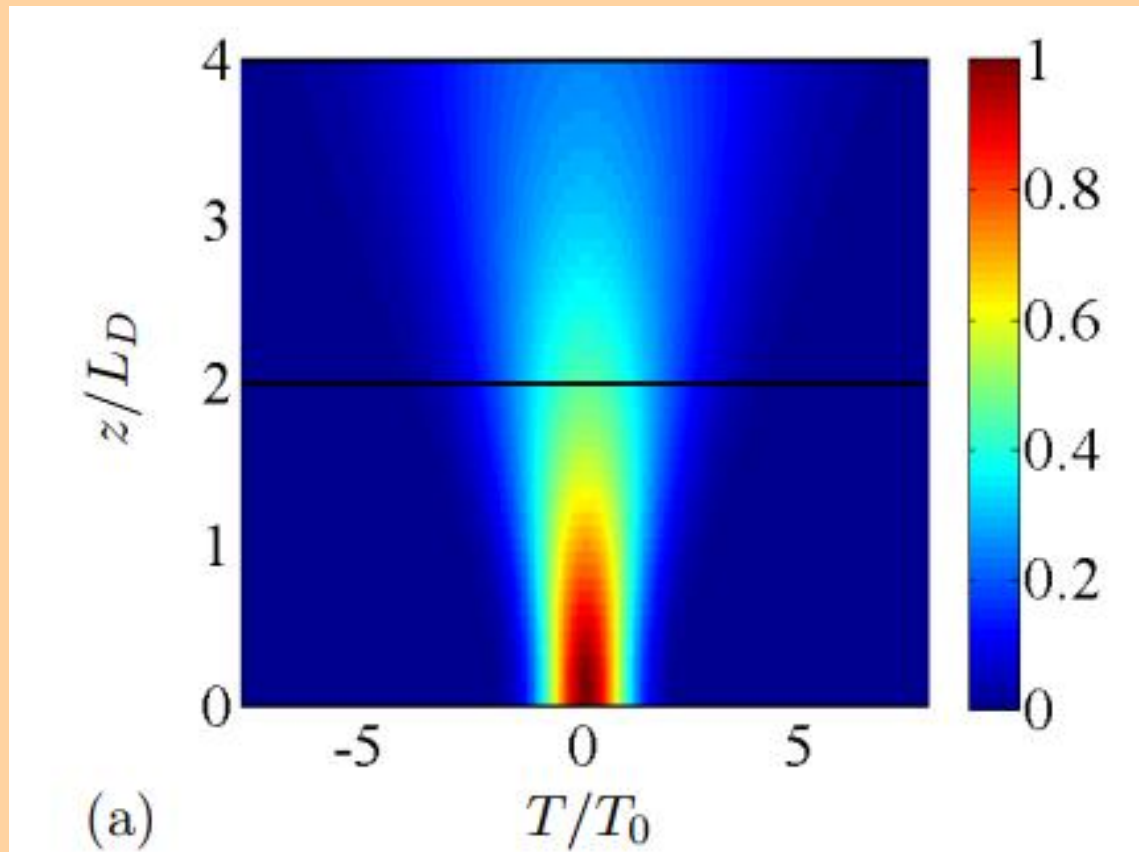
$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\begin{aligned} T &= t - \beta_1 z \\ Z &= z \end{aligned} \quad \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial Z} \cdot 0 + \frac{\partial A}{\partial T} \cdot 1 = \frac{\partial A}{\partial T} \\ \frac{\partial A}{\partial z} &= \frac{\partial A}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial Z} \cdot 1 + \frac{\partial A}{\partial T} \cdot (-\beta_1) = \frac{\partial A}{\partial Z} - \beta_1 \frac{\partial A}{\partial T} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial A}{\partial Z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = i\gamma |A|^2 A$$

Dyspersja chromatyczna

Poszerzenie czasowe impulsu gaussowskiego

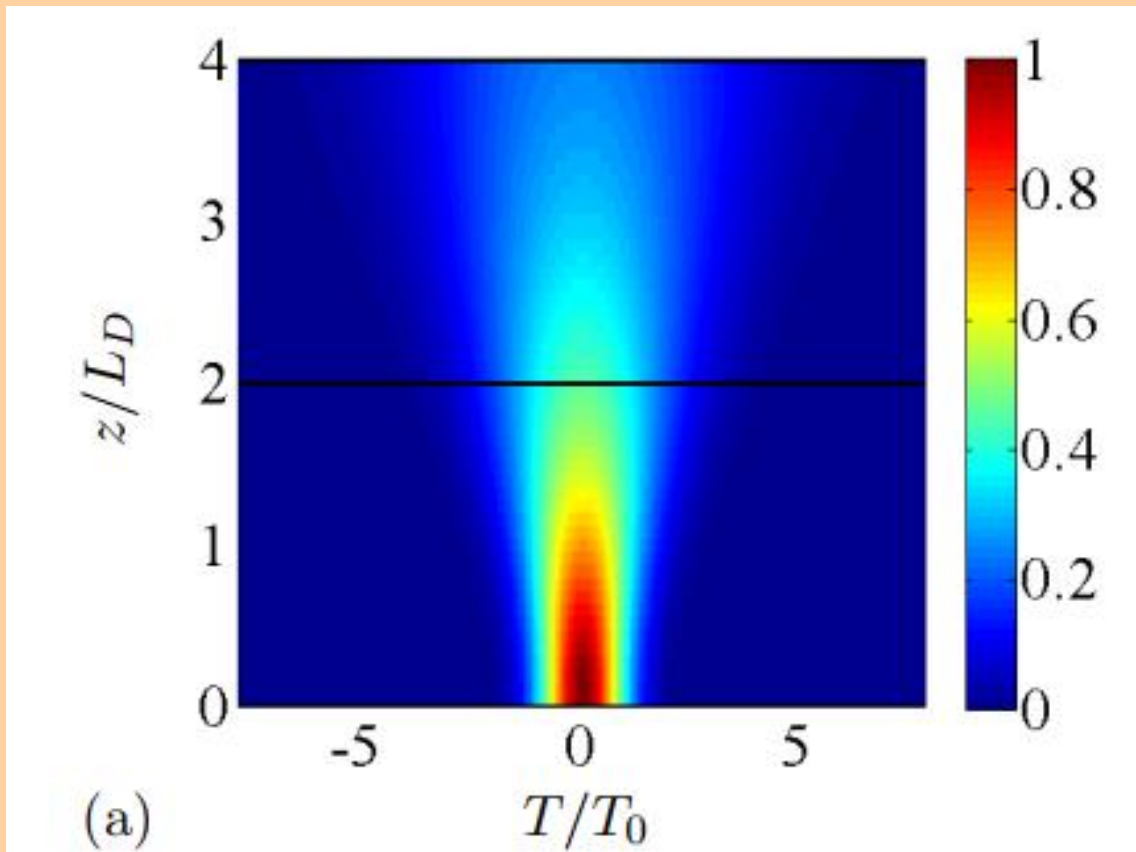


$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$A(0, t) = \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

Dyspersja chromatyczna

Poszerzenie czasowe impulsu gaussowskiego



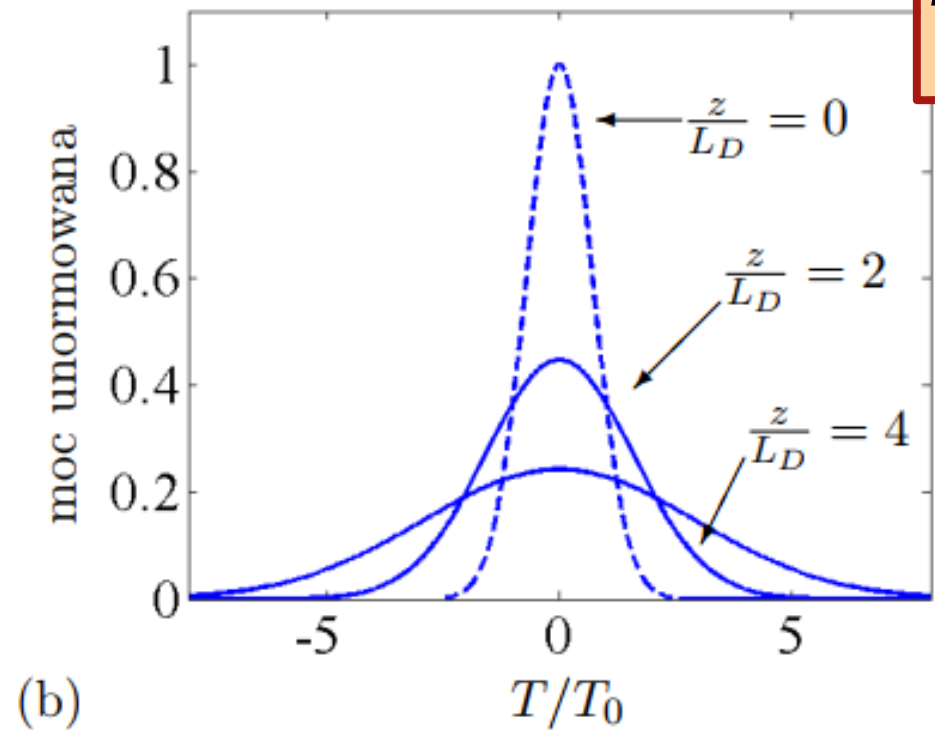
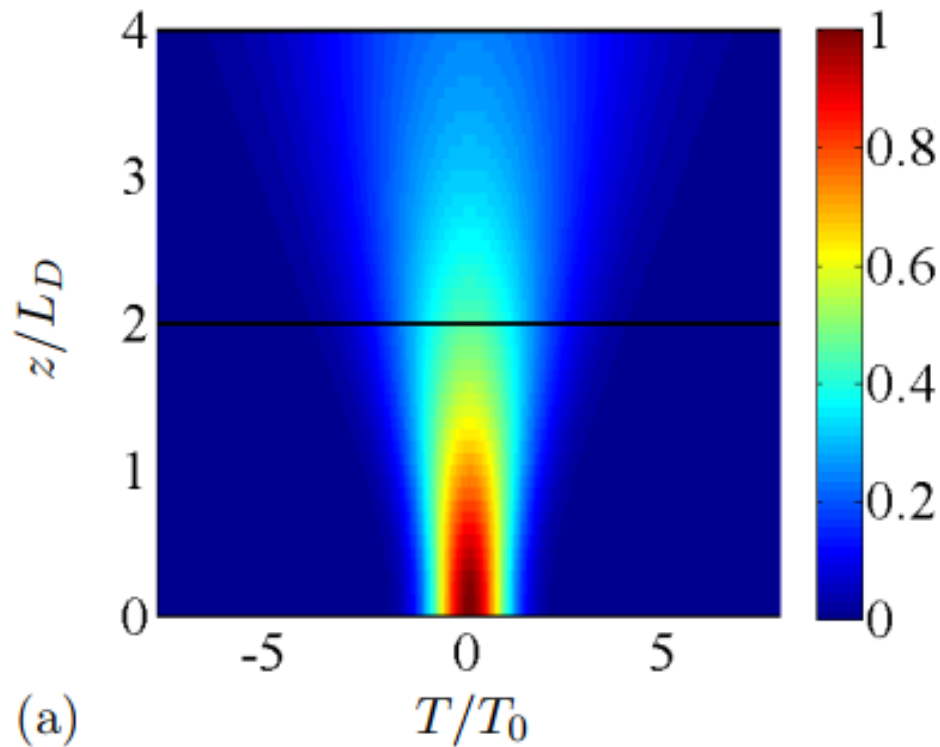
$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$A(0, t) = \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

Dyspersja chromatyczna

Poszerzenie czasowe impulsu gaussowskiego



$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}$$

Dyspersja chromatyczna

Impuls gaussowski

$$A(0,t) = \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

$$T_{\text{FWHM}} = 2\sqrt{\ln 2} T_0$$

Sekans hiperboliczny

$$A(0,t) = \sqrt{P_0} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

$$T_{\text{FWHM}} = 2\ln(1 + \sqrt{2}) T_0$$

Dyspersja chromatyczna - świergot

Impuls gaussowski

$$A(0,t) = \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

$$A(0,t) = \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{1+iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

Sekans hiperboliczny

$$A(0,t) = \sqrt{P_0} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

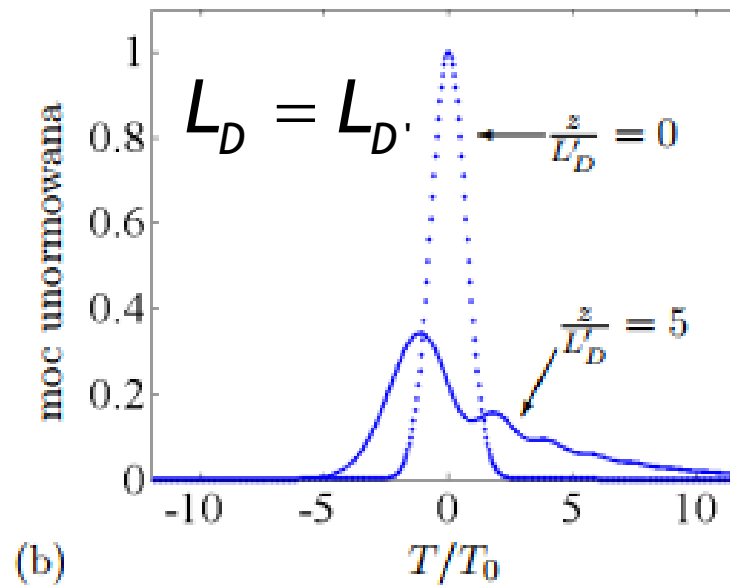
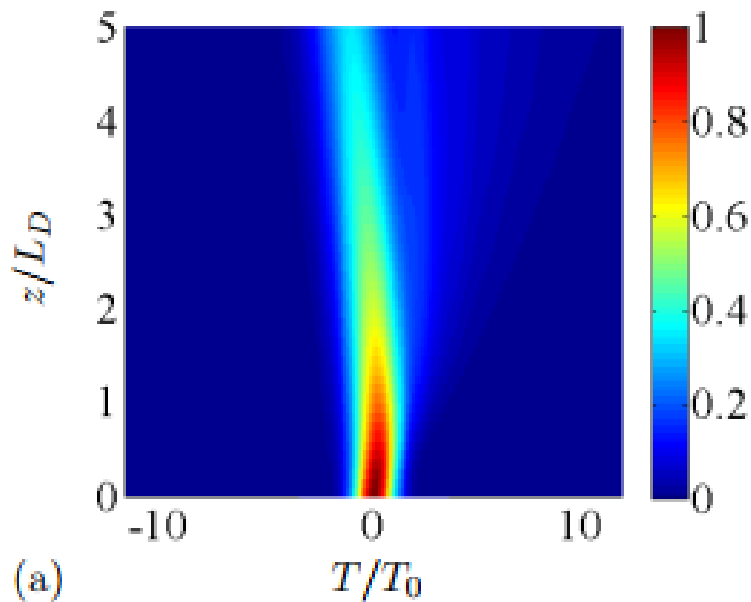
$$A(0,t) = \sqrt{P_0} \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right) \exp\left(-\frac{iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

Dyspersja chromatyczna

Dyspersja trzeciego rzędu

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = i\gamma |A|^2 A$$

$$L_{D'} = \frac{T_0^3}{|\beta_3|}$$

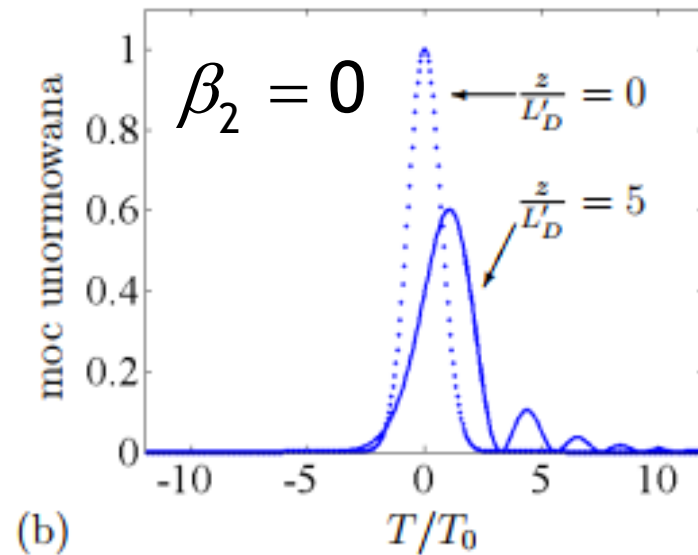
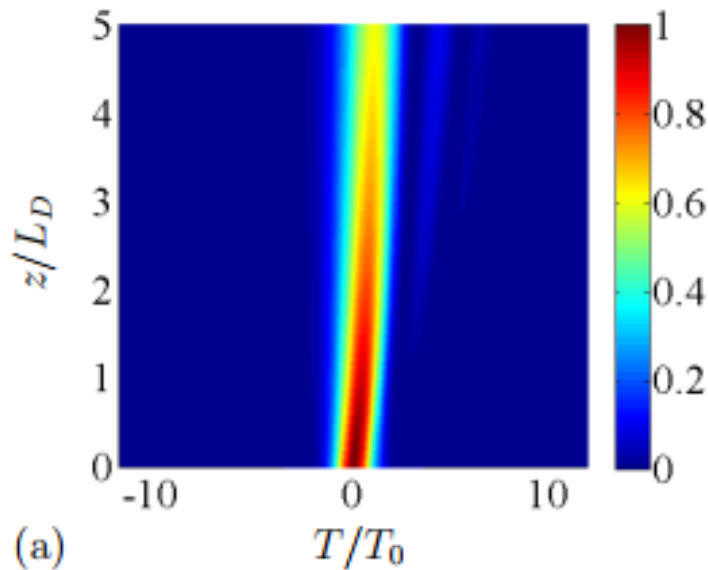


Dyspersja chromatyczna

Dyspersja trzeciego rzędu

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = i\gamma |A|^2 A$$

$$L_{D'} = \frac{T_0^3}{|\beta_3|}$$



Samomodulacja fazy

Dodatkowe przesunięcie w fazie

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = i\gamma |A|^2 A$$

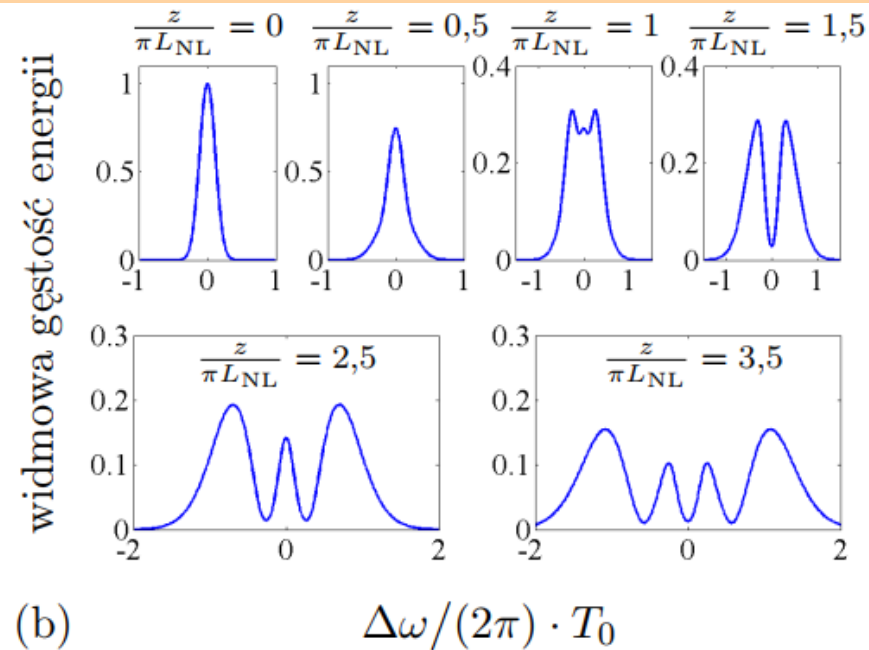
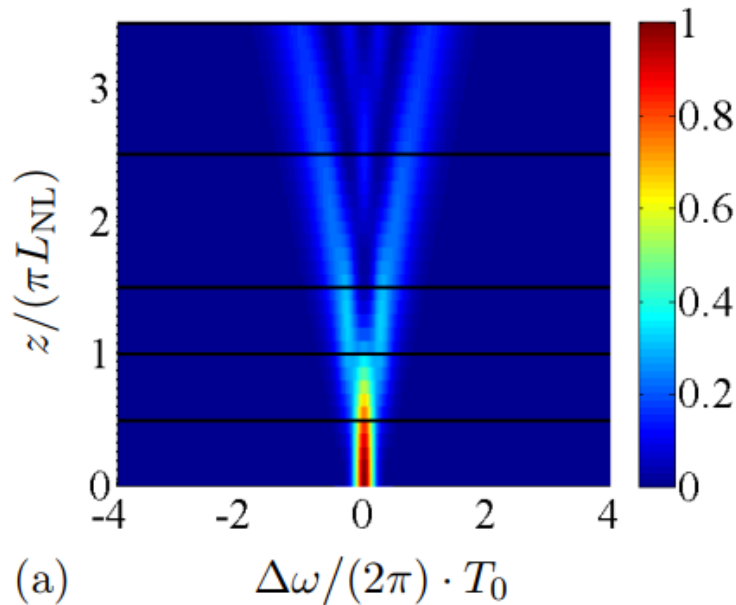
- impuls doznaje dodatkowego przesunięcia w fazie φ_{NL} , które zależy od mocy
- powoduje to ciągłą generację nowych częstotliwości i poszerzenie spektralne impulsu
- w obszarze początkowym (końcowym) impulsu pojawiają się częstotliwości mniejsze (większe) niż częstotliwość centralna

Samomodulacja fazy

Dodatkowe przesunięcie w fazie

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = i\gamma |A|^2 A$$

$$L_{\text{NL}} = \frac{1}{\gamma P_0}$$



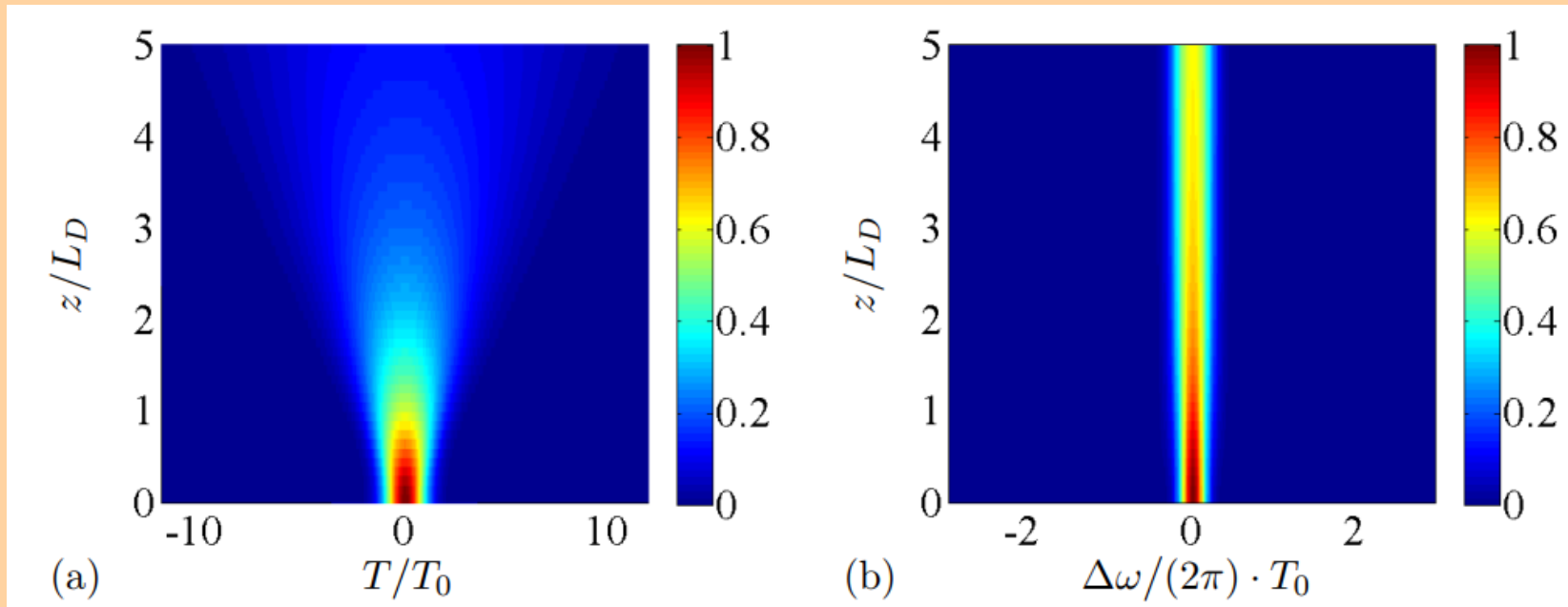
Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja normalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\beta_2 > 0$$

$$L_{\text{NL}} = L_D$$



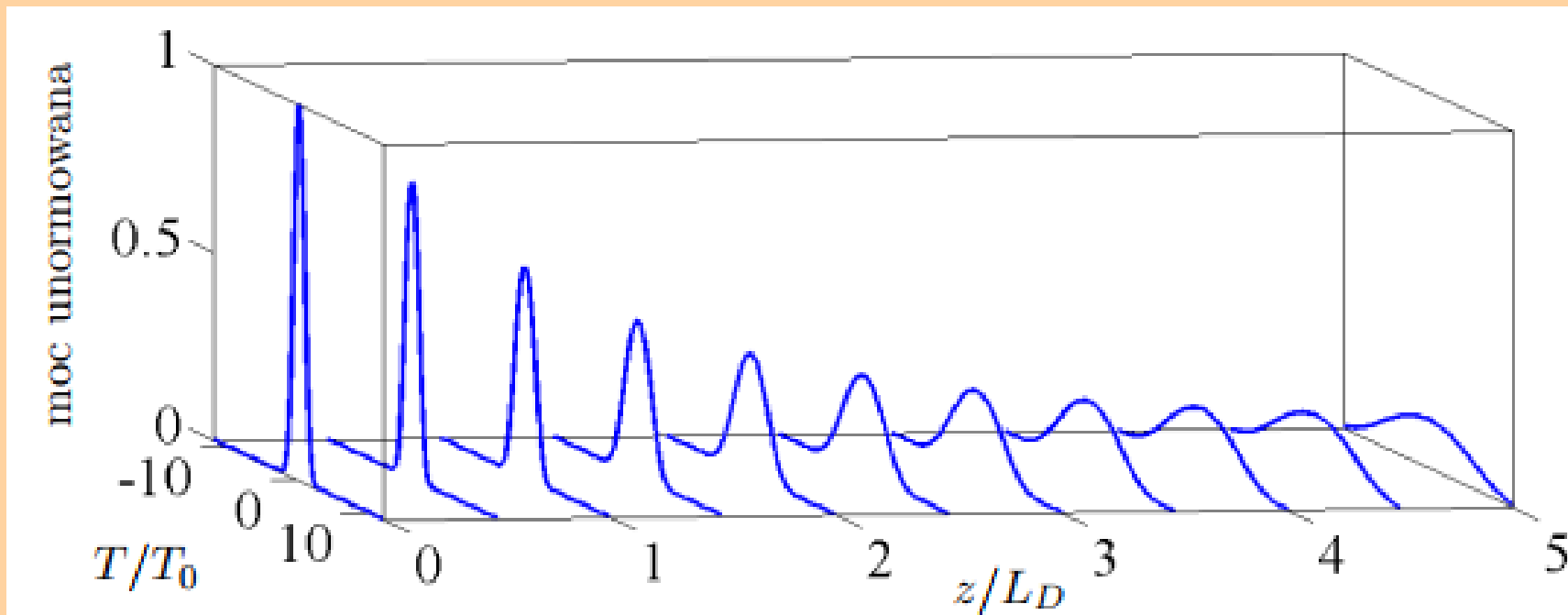
Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja normalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\beta_2 > 0$$

$$L_{\text{NL}} = L_D$$



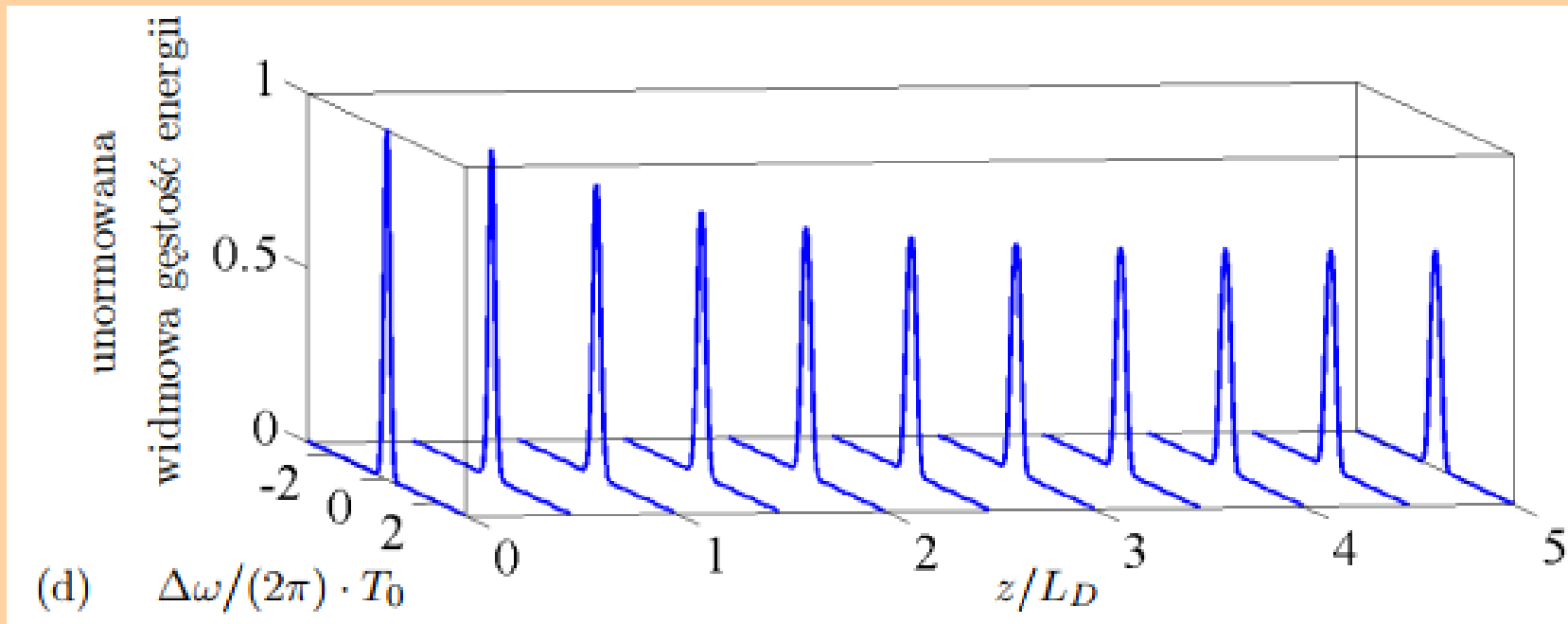
Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja normalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\beta_2 > 0$$

$$L_{\text{NL}} = L_D$$



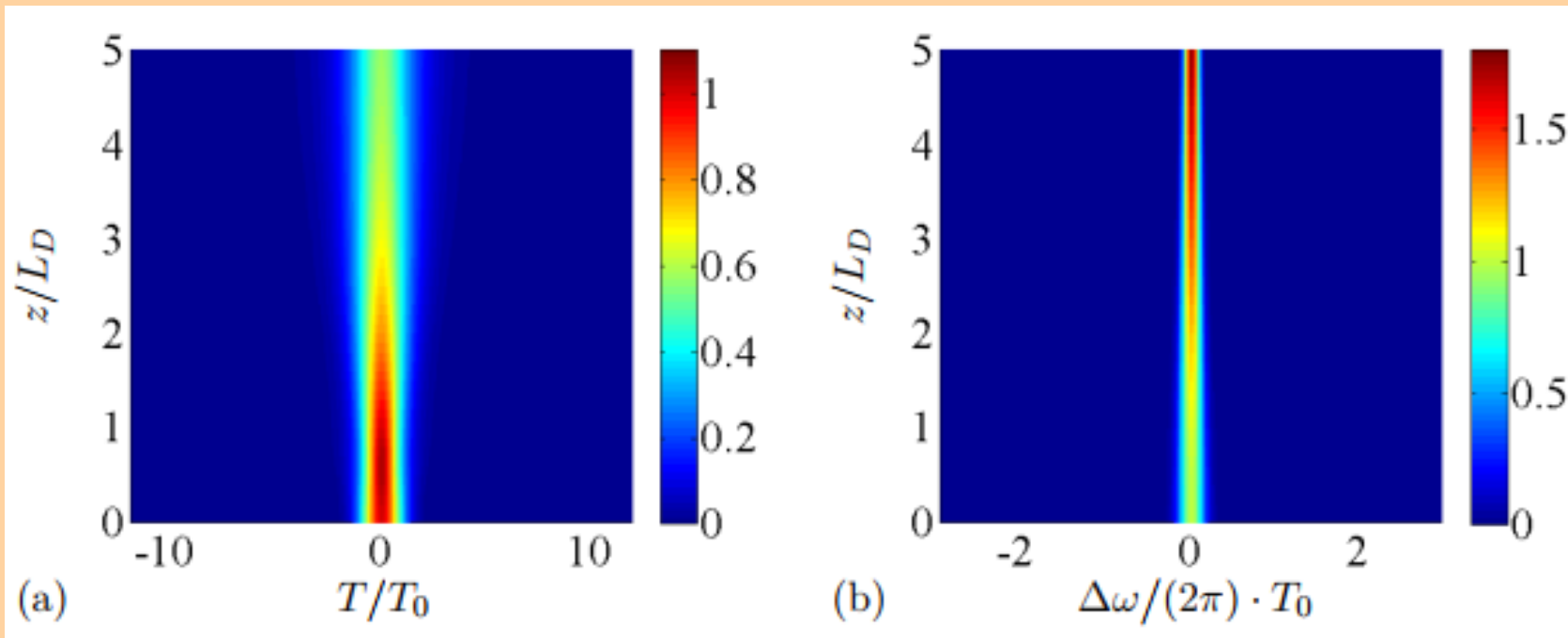
Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja anomalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\beta_2 < 0$$

$$L_{\text{NL}} = L_D$$



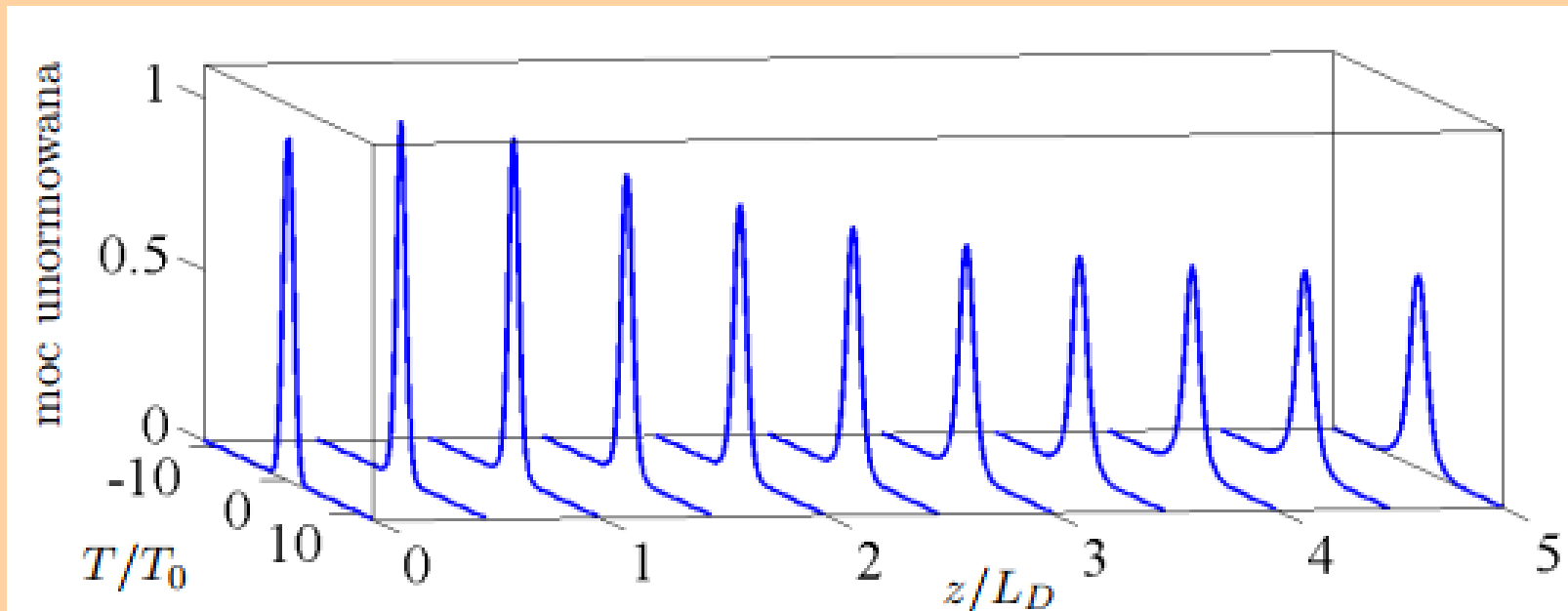
Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja anomalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\beta_2 < 0$$

$$L_{\text{NL}} = L_D$$



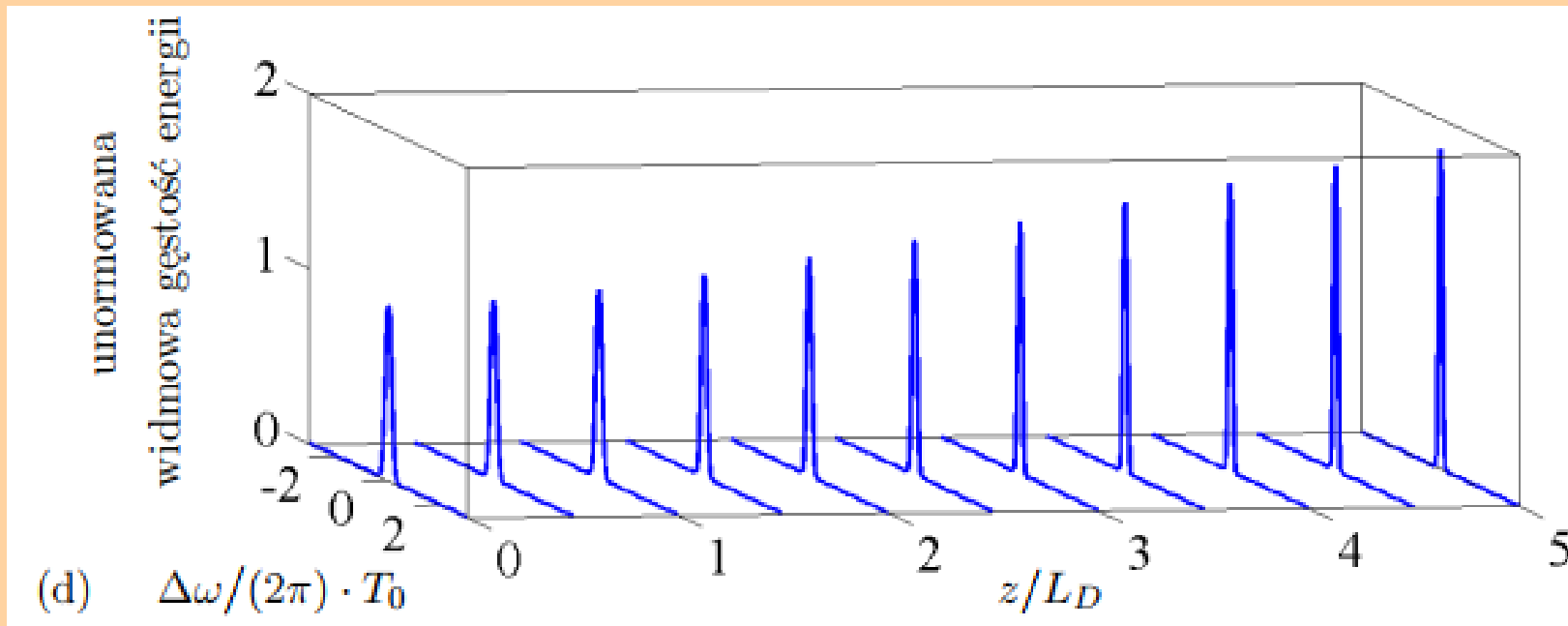
Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja anomalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\beta_2 < 0$$

$$L_{\text{NL}} = L_D$$



Samomodulacja fazy

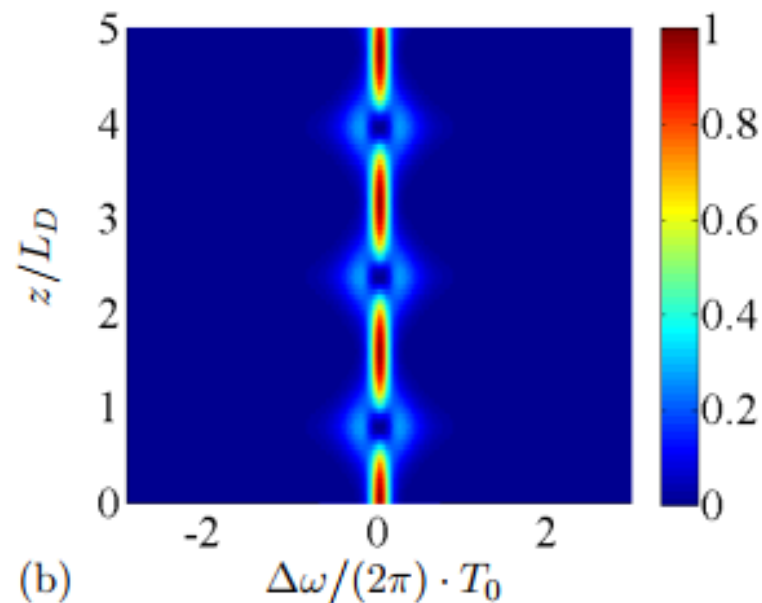
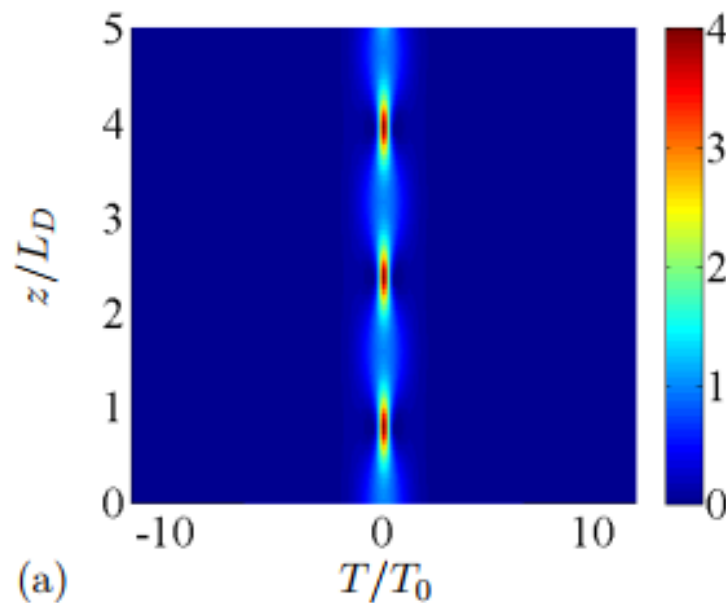
Soliton drugiego rzędu

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\beta_2 < 0$$

$$N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}$$

$$N = 2$$



Niestabilność modulacyjna

Propagacja fali ciągłej

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

- jednym z wielu rozwiązań równania Schrödingera jest fala ciągła

$$A(z) = \sqrt{P_0} \exp(i\phi_{\text{NL}})$$

$$\phi_{\text{NL}}(z) = \gamma P_0 z$$

Niestabilność modulacyjna

Propagacja fali ciągłej

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

- rozwiązanie to nie jest stabilne ze względu na małe zaburzenia w reżimie dyspersji anomalnej

$$A(z, t) = \sqrt{P_0 + a(z, t)} \exp(i\phi_{\text{NL}})$$

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = i\gamma P_0 (a + a^*)$$

Niestabilność modulacyjna

Propagacja fali ciągłej

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

- rozwiązanie to nie jest stabilne ze względu na małe zaburzenia w reżimie dyspersji anomalnej

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = i\gamma P_0 (a + a^*)$$

$$a(z, t) = a_1 \exp[+i(Kz - \Omega t)] + a_2 \exp[-i(Kz - \Omega t)]$$

Niestabilność modulacyjna

Propagacja fali ciągłej

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

- rozwiązanie to nie jest stabilne ze względu na małe zaburzenia w reżimie dyspersji anomalnej

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = i\gamma P_0 (a + a^*)$$

$$K^2 = \frac{1}{4} \beta_2^2 \Omega^2 \left(\Omega^2 + \frac{4\gamma P_0}{\beta_2} \right)$$

$$a(z, t) = a_1 \exp[+i(Kz - \Omega t)] + a_2 \exp[-i(Kz - \Omega t)]$$

Niestabilność modulacyjna

Widmo wzmocnienia

- rozwiązanie to nie jest stabilne ze względu na małe zaburzenia w reżimie dyspersji anomalnej

$$K^2 = \frac{1}{4} \beta_2^2 \Omega^2 \left(\Omega^2 + \frac{4\gamma P_0}{\beta_2} \right)$$

$$\Omega_c^2 = \frac{4\gamma P_0}{|\beta_2|} = \frac{4}{|\beta_2| L_{\text{NL}}}$$

$$K = \pm \frac{1}{2} |\beta_2 \Omega| \sqrt{\Omega^2 + \text{sgn}(\beta_2) \Omega_c^2}$$

$$\beta_2 < 0 \quad |\Omega| < \Omega_c$$

$$g(\Omega) = 2\text{Im}(K) = |\beta_2 \Omega| \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}$$

$$\Omega_{\text{max}} = \pm \frac{\Omega_c}{\sqrt{2}}$$

Niestabilność modulacyjna

Widmo wzmocnienia

- rozwiązanie to nie jest stabilne ze względu na małe zaburzenia w reżimie dyspersji anomalnej

$$g(\Omega) = 2\text{Im}(K) = |\beta_2\Omega| \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}$$

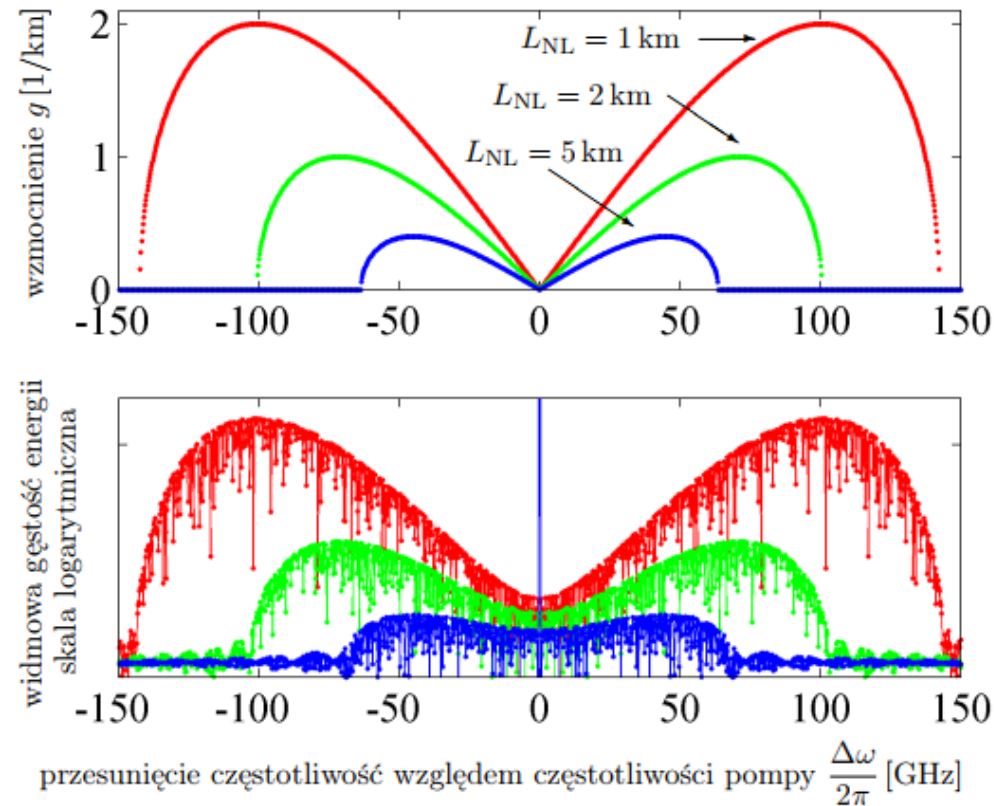
$$\Omega_c^2 = \frac{4\gamma P_0}{|\beta_2|} = \frac{4}{|\beta_2| L_{\text{NL}}}$$

$$\Omega_{\text{max}} = \pm \frac{\Omega_c}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2\gamma P_0}{\beta_2}}$$

$$g(\Omega_{\text{max}}) = 2\gamma P_0$$

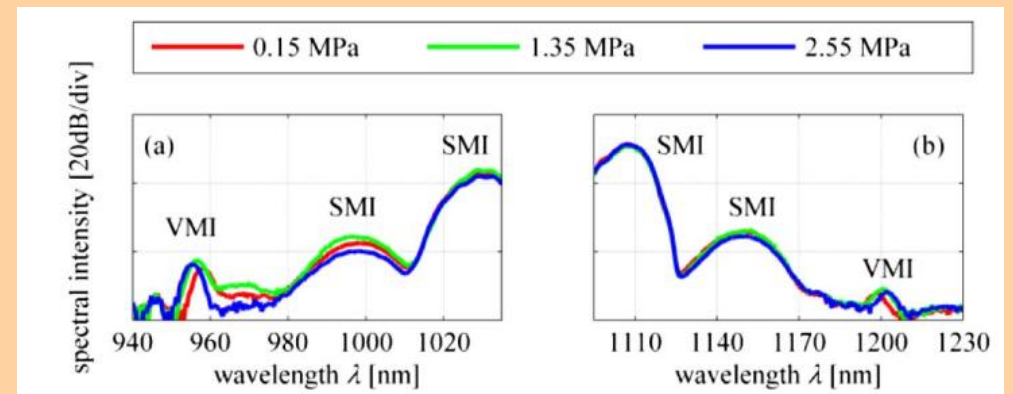
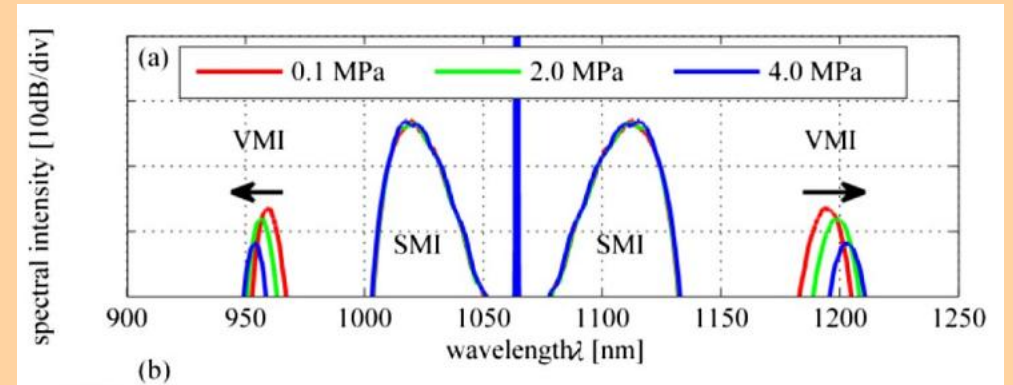
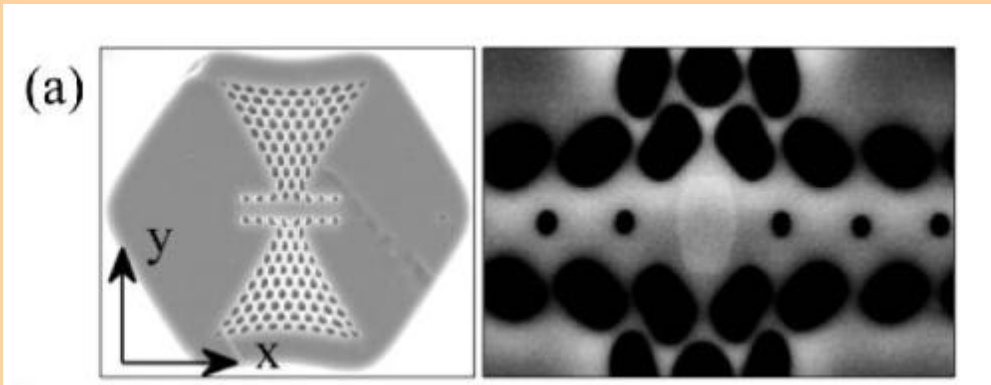
Niestabilność modulacyjna

Widmo wzmocnienia



Niestabilność modulacyjna

Widmo wzmacnienia



K. Tarnowski A. Anuszkiewicz, J. Olszewski, P. Mergo,
B. Kibler, W. Urbanczyk, Opt. Lett. 38, 5260-5263 (2013).

Podsumowanie

Nieliniowe równanie Schrödingera

Dyspersja chromatyczna

Samomodulacja fazy

Solitony

Niestabilność modulacyjna