

Zjawiska nieliniowe w światłowodach

W11OPA-SM0050W
rok akademicki 2025/26
semestr zimowy

Wykład 2

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221

Plan wykładu

Wstęp

- Równania Maxwella
- Równania materiałowe

Równanie falowe

- Przypadek liniowy
- Przypadek nieliniowy

Nieliniowe równanie Schrödingera

Równania Maxwella

Równania Maxwella...

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

...w światłowodach

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \cancel{\mathbf{J}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \cancel{\rho}_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Równania materiałowe

Równania
materiałowe ...

...w światłowodach

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \cancel{\mathbf{M}}$$

Równanie falowe

Równanie falowe

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

Polaryzacja elektryczna

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)} : \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \right)$$

Równanie falowe

Polaryzacja elektryczna

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t)$$

Polaryzacja elektryczna - wyraz liniowy

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi^{(1)}(t - t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt'$$

Polaryzacja elektryczna

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^t dt_1 \int_{-\infty}^t dt_2 \int_{-\infty}^t dt_3 \times \chi^{(3)}(t - t_1, t - t_2, t - t_3) : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_3)$$

Równanie falowe

Przypadek liniowy

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \omega^2 \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \omega^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \underbrace{\left(1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega)\right)}_{\varepsilon(\omega)} \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Równanie falowe

Przypadek liniowy

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \longleftrightarrow \varepsilon(\omega) = \left(n + \frac{i\alpha c}{2\omega} \right)^2$$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \right]$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{nc} \operatorname{Im} \left[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega) \right]$$

Równanie falowe

Przypadek liniowy

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \equiv \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0$$

Równanie falowe

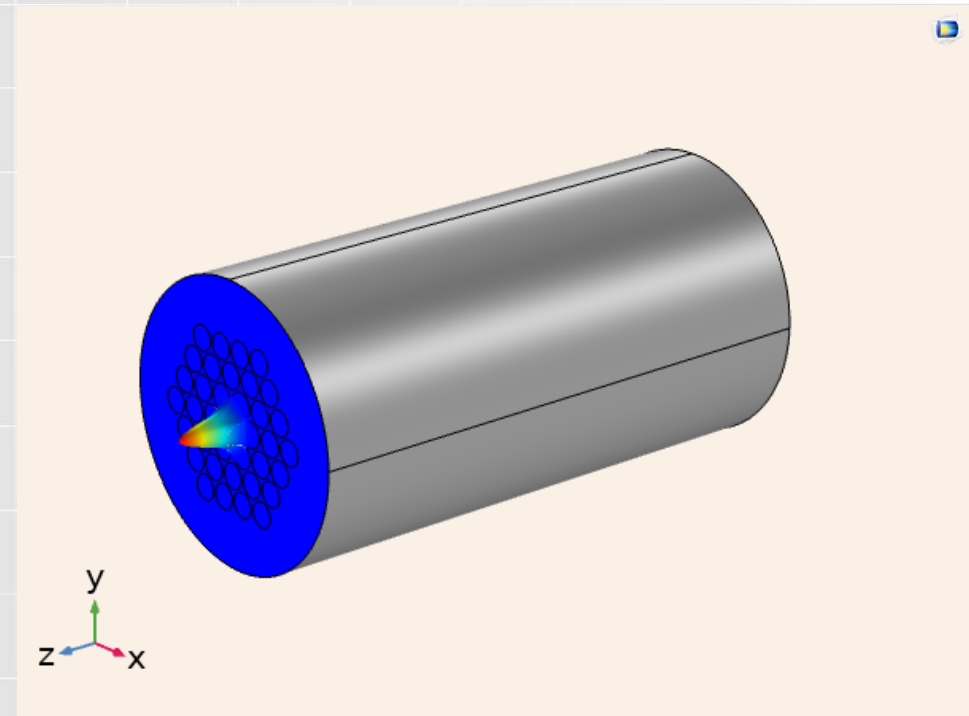
Przypadek liniowy

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \varepsilon(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\mathbf{E}} \equiv \nabla (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \tilde{\mathbf{E}} = -\nabla^2 \tilde{\mathbf{E}}$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0$$



Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

- rozważamy światło liniowo polaryzowane oraz przyjmujemy, że zachowuje swój stan polaryzacji
- zakładamy, że światło jest kwazi-monochromatyczne

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + E^*(\mathbf{r}, t) \exp(+i\omega_0 t) \right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \right]$$

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \right]$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[P_{NL}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \right]$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Zakładając natychmiastową odpowiedź ośrodka

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + E^*(\mathbf{r}, t) \exp(+i\omega_0 t) \right]$$

$$\mathbf{E}^3(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8} \hat{x} \left[E^3(\mathbf{r}, t) \exp(-i3\omega_0 t) + 3E^2(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \right. \\ \left. + 3E(\mathbf{r}, t) E^{*2}(\mathbf{r}, t) \exp(+i\omega_0 t) + E^{*3}(\mathbf{r}, t) \exp(+i3\omega_0 t) \right]$$

$$\mathbf{E}^3(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{8} \hat{x} \left[3E^2(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + 3E(\mathbf{r}, t) E^{*2}(\mathbf{r}, t) \exp(+i\omega_0 t) \right]$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Zakładając natychmiastową odpowiedź ośrodka

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$E^3(\mathbf{r}, t) \approx \frac{3}{8} \hat{x} \left[E^2(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + E(\mathbf{r}, t) E^{*2}(\mathbf{r}, t) \exp(+i\omega_0 t) \right]$$

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[P_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \right]$$

$$P_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \frac{3}{4} \chi_{\text{xxxx}}^{(3)} E^2(\mathbf{r}, t) E^*(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi_{\text{xxxx}}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2 E(\mathbf{r}, t)$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$P_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi_{\text{xxxx}}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2 E(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \underbrace{\frac{3}{4} \chi_{\text{xxxx}}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2}_{\varepsilon_{\text{NL}}} E(\mathbf{r}, t)$$

$$\varepsilon_{\text{NL}} = \frac{3}{4} \chi_{\text{xxxx}}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Przejście do dziedziny częstotliwości jest możliwe w przybliżeniu wolno zmiennej amplitudy oraz przy założeniu perturbacyjnego charakteru P_{NL}

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \left(1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{NL}\right) k_0^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\varepsilon_{NL} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Współczynnik załamania oraz stała tłumienia stają się zależne od intensywności

$$\tilde{n} = n + n_2 |E|^2$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2 |E|^2$$

$$n_2 = \frac{3}{8n} \operatorname{Re} \left(\chi_{xxxx}^{(3)} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc} \operatorname{Im} \left(\chi_{xxxx}^{(3)} \right)$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Równanie falowe

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon(\omega) k_0^2 \mathbf{E} = 0$$

rozwiązujemy metodą rozdzielania zmiennych postulując rozwiązanie

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z)$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Otrzymujemy dwa równania

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[\varepsilon(\omega) k_0^2 - \tilde{\beta}^2 \right] F = 0$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \left(\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2 \right) \tilde{A} = 0$$

- Pominięto wyraz proporcjonalny do $\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2}$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Równanie $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + [\varepsilon(\omega)k_0^2 - \tilde{\beta}^2]F = 0$

jest rozwiązywane perturbacyjnie

- Rozkład pola modu nie zależy od intensywności światła
- Wartość własna

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) \quad \Delta\beta(\omega) = \frac{\omega^2 n(\omega)}{c^2 \beta(\omega)} \frac{\iint_S \Delta n(\omega) |F(x, y)|^2 dx dy}{\iint_S |F(x, y)|^2 dx dy}$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Pole elektryczne może być zapisane jako

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left\{ F(x, y) A(z, t) \exp[i(\beta_0 z - \omega_0 t)] + \text{c.c.} \right\}$$

gdzie $A(z, t)$ jest wolnozmienną amplitudą

$$\tilde{A}(z, \omega - \omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, t) \exp[i(\omega - \omega_0)t] dt$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2) \tilde{A} = 0$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\tilde{\beta} + \beta_0)(\tilde{\beta} - \beta_0) \tilde{A} = 0$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + 2\beta_0 (\tilde{\beta} - \beta_0) \tilde{A} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i(\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0) \tilde{A}$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i \left(\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0 \right) \tilde{A}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i \left(\beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \beta_2 \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots + \Delta\beta(\omega) - \beta_0 \right) \tilde{A}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\Delta\beta A$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\Delta\beta A$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\gamma = \frac{n_2 \omega_0}{c A_{\text{eff}}}$$

$$A_{\text{eff}} = \frac{\left(\iint_S |F(x, y)|^2 dx dy \right)^2}{\iint_S |F(x, y)|^4 dx dy}$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Przypadek nieliniowy

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \left(-\frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + i\gamma |A|^2 \right) A$$

Zależne od czasu równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \Psi$$

Podsumowanie

Wstęp

- Równania Maxwella
- Równania materiałowe

Równanie falowe

- Przypadek liniowy
- Przypadek nieliniowy

Nieliniowe równanie Schrödingera