Politechnika Wrocławska

Zjawiska nieliniowe w światłowodach

W11OPA-SM0050W (FTP003030W)

rok akademicki 2024/25

semestr zimowy

Wykład 3

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221

Plan wykładu

- Nieliniowe równanie Schrödingera
- Dyspersja chromatyczna
- Samomodulacja fazy
- Solitony
- Niestabilność modulacyjna

Politechnika Wrocławska

Nieliniowe równanie Schrödingera

Równanie falowe

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \left(1 + \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) + \varepsilon_{\mathrm{NL}}\right) k_0^2 \mathbf{E} = 0$$

$$\varepsilon_{\mathrm{NL}} = \frac{3}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left|E(\mathbf{r},t)\right|^2$$

Rozdzielenie zmiennych

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x,y)\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)\exp(i\beta_0 z)$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma(\omega_0)\left|A\right|^2 A$$

$$\gamma(\omega_0) = \frac{\omega_0 \bar{n}_2}{c} \frac{\iint_S \left|F(x,y)\right|^4 dxdy}{\iint_S \left|F(x,y)\right|^2 dxdy}$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Nieliniowe równanie Schrödingera [V/m]

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma(\omega_0)|A|^2 A$$

$$\gamma(\omega_0) = \frac{\omega_0 \bar{n}_2}{c}\frac{\iint_S |F(x,y)|^4 \, dxdy}{\iint_S |F(x,y)|^2 \, dxdy}$$

Nieliniowe równanie Schrödingera [sqrt(W)]

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma(\omega_0)|A|^2 A$$

$$A_{\mathrm{eff}} = \frac{\left(\iint_S |F(x,y)|^2 \, dxdy\right)^2}{\iint_S |F(x,y)|^4 \, dxdy}$$

$$\gamma(\omega_0) = \frac{\omega_0 n_2}{cA_{\mathrm{eff}}} \qquad n_2 = \frac{2\bar{n}_2}{\varepsilon_0 n c}$$

Politechnika Wrocławska

Nieliniowe równanie Schrödingera

Nieliniowe równanie Schrödingera w ramce czasowej poruszającej się z implulsem

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$T = t - \beta_1 z$$

$$Z = z$$

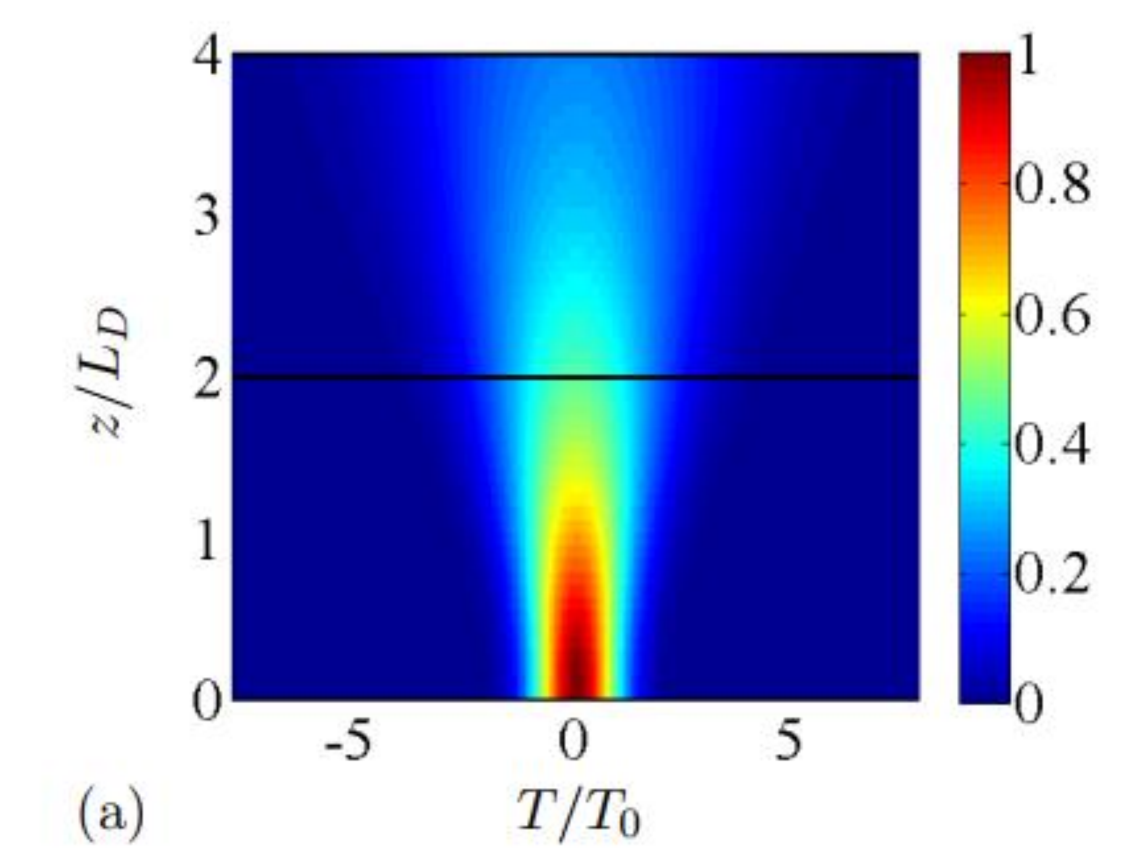
$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial Z}\cdot 0 + \frac{\partial A}{\partial T}\cdot 1 = \frac{\partial A}{\partial T}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial Z}\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial A}{\partial Z}\cdot 1 + \frac{\partial A}{\partial T}\cdot(-\beta_1) = \frac{\partial A}{\partial Z} - \beta_1 \frac{\partial A}{\partial T}$$

$$\frac{\partial A}{\partial Z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial T^2} = i\gamma |A|^2 A$$

Dyspersja chromatyczna

Poszerzenie czasowe impulsu gaussowskiego

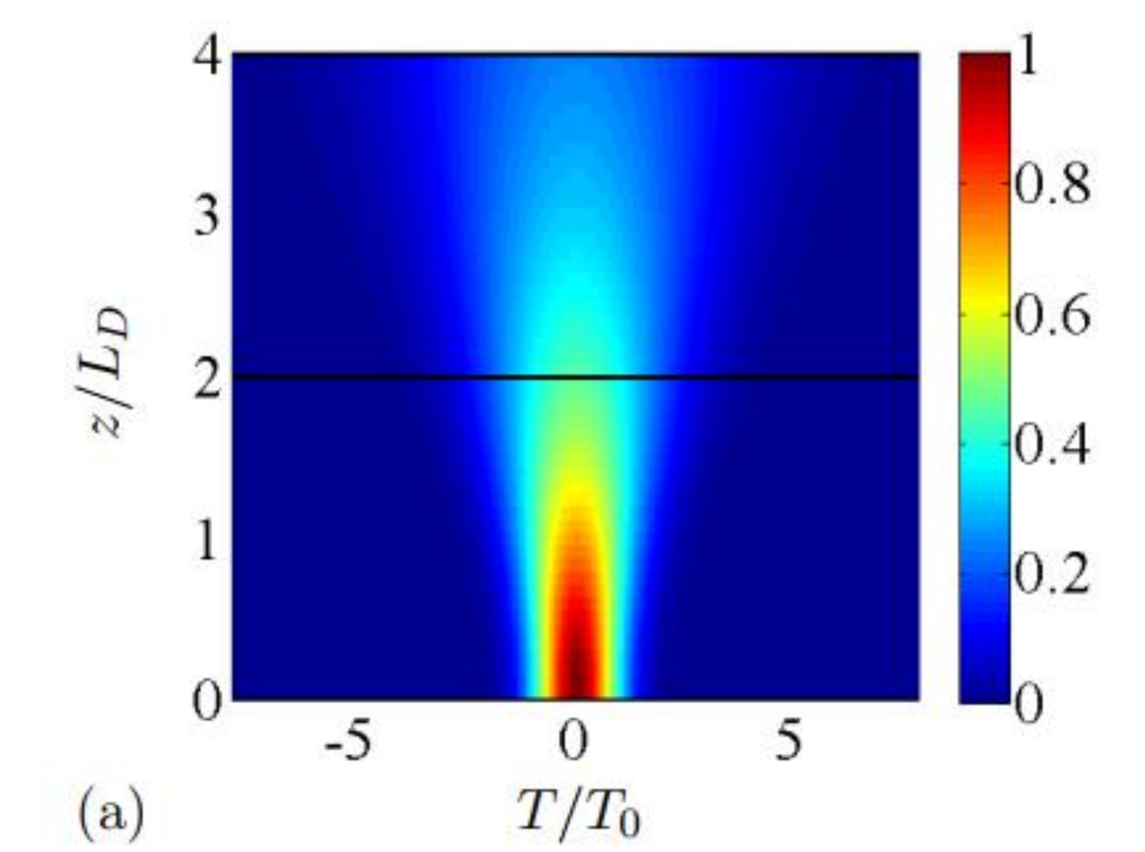


$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$A(0,t) = \sqrt{P_0}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

Dyspersja chromatyczna

Poszerzenie czasowe impulsu gaussowskiego



$$\boxed{L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}}$$

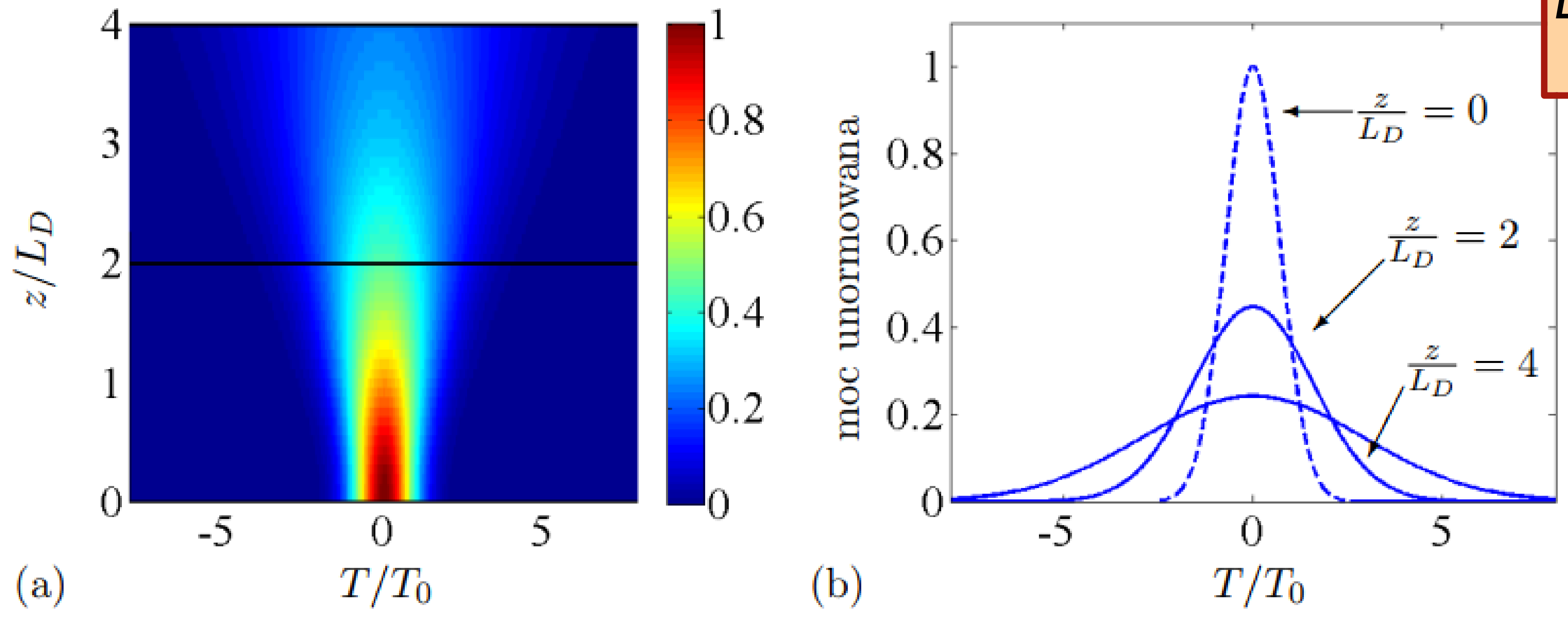
$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$A(0,t) = \sqrt{P_0}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

Dyspersja chromatyczna

Poszerzenie czasowe impulsu gaussowskiego

$$L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}$$



Politechnika Wrocławska

Dyspersja chromatyczna

Impuls gaussowski

$$A(0,t)=\sqrt{P_0}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

$$T_{\mathrm{FWHM}}=2\sqrt{\ln 2}T_0$$

Sekans hiperboliczny

$$A(0,t)=\sqrt{P_0}\,\mathrm{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

$$T_{\mathrm{FWHM}}=2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)T_0$$

Politechnika Wrocławska

Dyspersja chromatyczna - świergot

Impuls gaussowski

$$A(0,t) = \sqrt{P_0}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

$$A(0,t) = \sqrt{P_0}\exp\left(-\frac{1+iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

Sekans hiperboliczny

$$A(0,t) = \sqrt{P_0}\,\mathrm{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

$$A(0,t) = \sqrt{P_0}\,\mathrm{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right)\exp\left(-\frac{iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right)$$

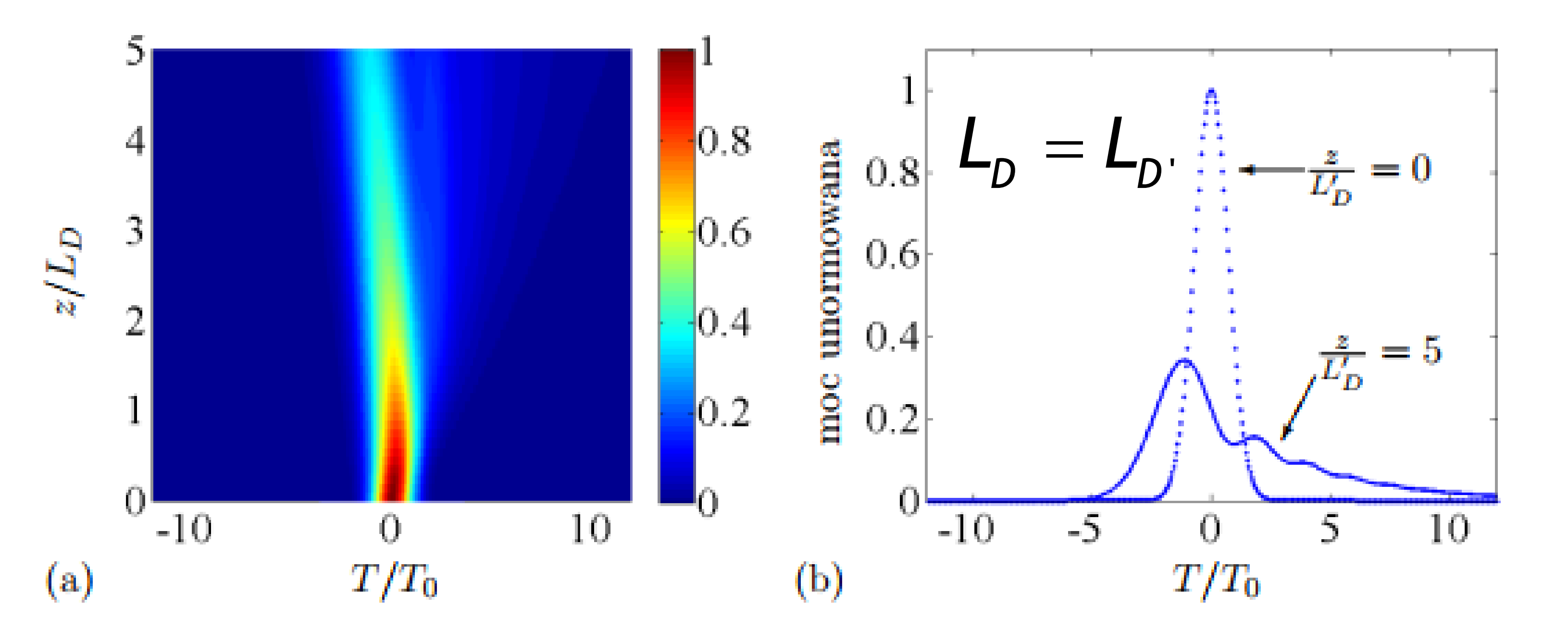
Politechnika Wrocławska

Dyspersja chromatyczna

Dyspersja trzeciego rzędu

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\boxed{L_{D'} = \frac{T_0^3}{|\beta_3|}}$$



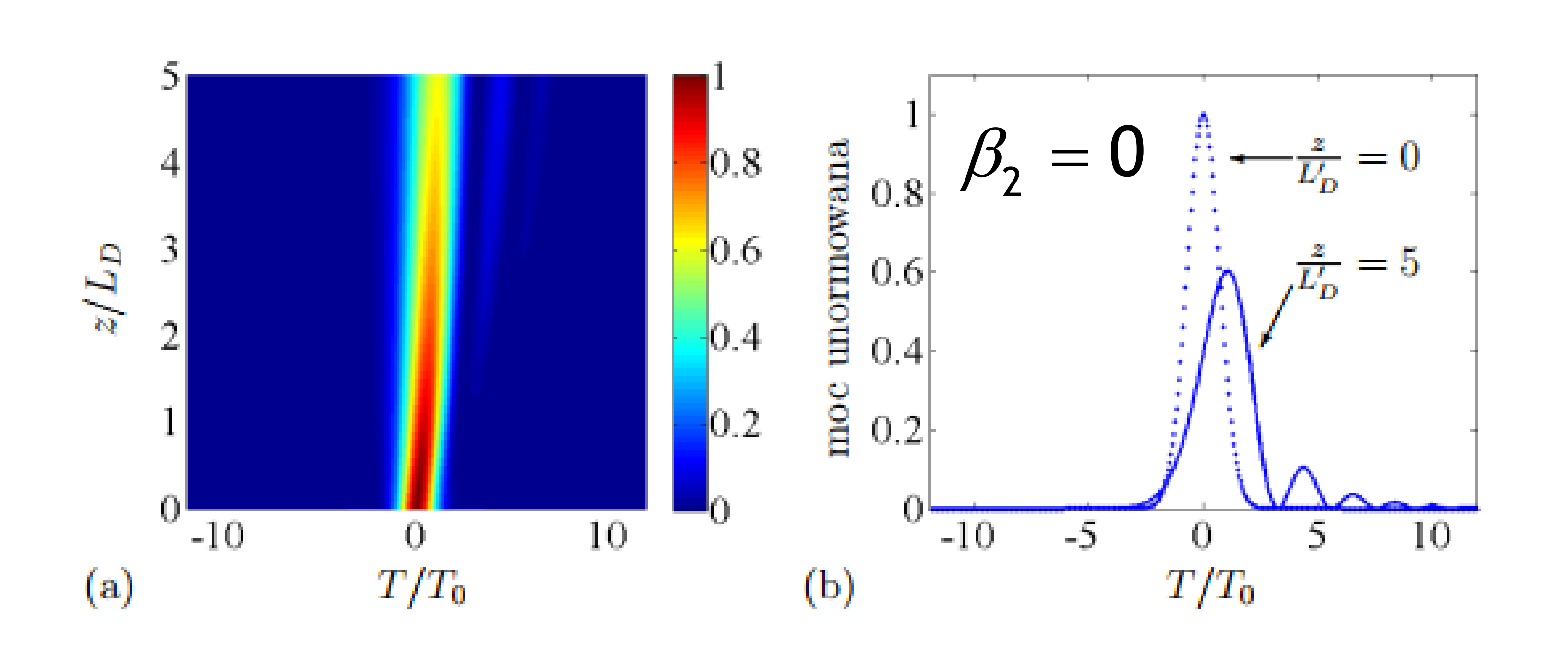
Politechnika Wrocławska

Dyspersja chromatyczna

Dyspersja trzeciego rzędu

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\boxed{L_{D'} = \frac{T_0^3}{|\beta_3|}}$$



Politechnika Wrocławska

Samomodulacja fazy

Dodatkowe przesunięcie w fazie

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = i\gamma\left|A\right|^2 A$$

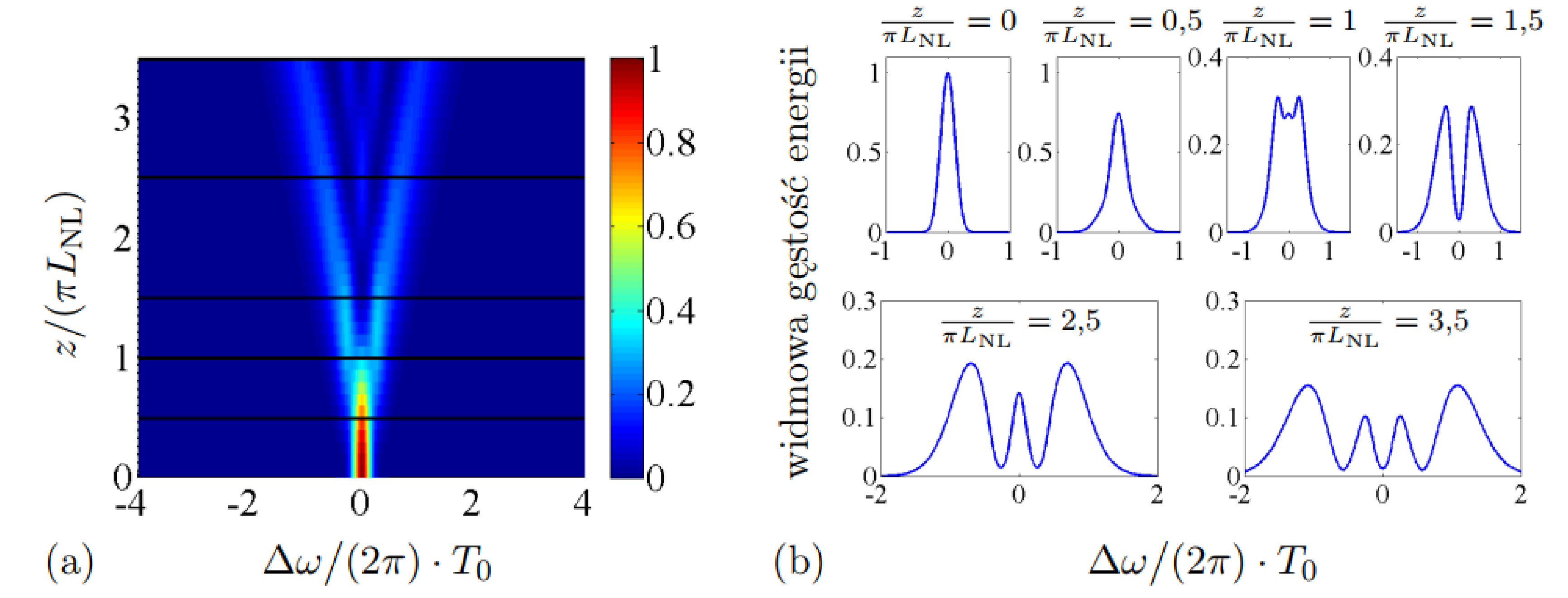
- impuls doznaje dodatkowego przesunięcia w fazie φ_{NL}, które zależy od mocy
- powoduje to ciągłą generację nowych częstotliwości i poszerzenie spektralne impulsu
- w obszarze początkowym (końcowym) impulsu pojawiają się częstotliwości mniejsze (większe) niż częstotliwość centralna

Samomodulacja fazy

Dodatkowe przesunięcie w fazie

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 A}{\partial t^3} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\boxed{L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0}}$$



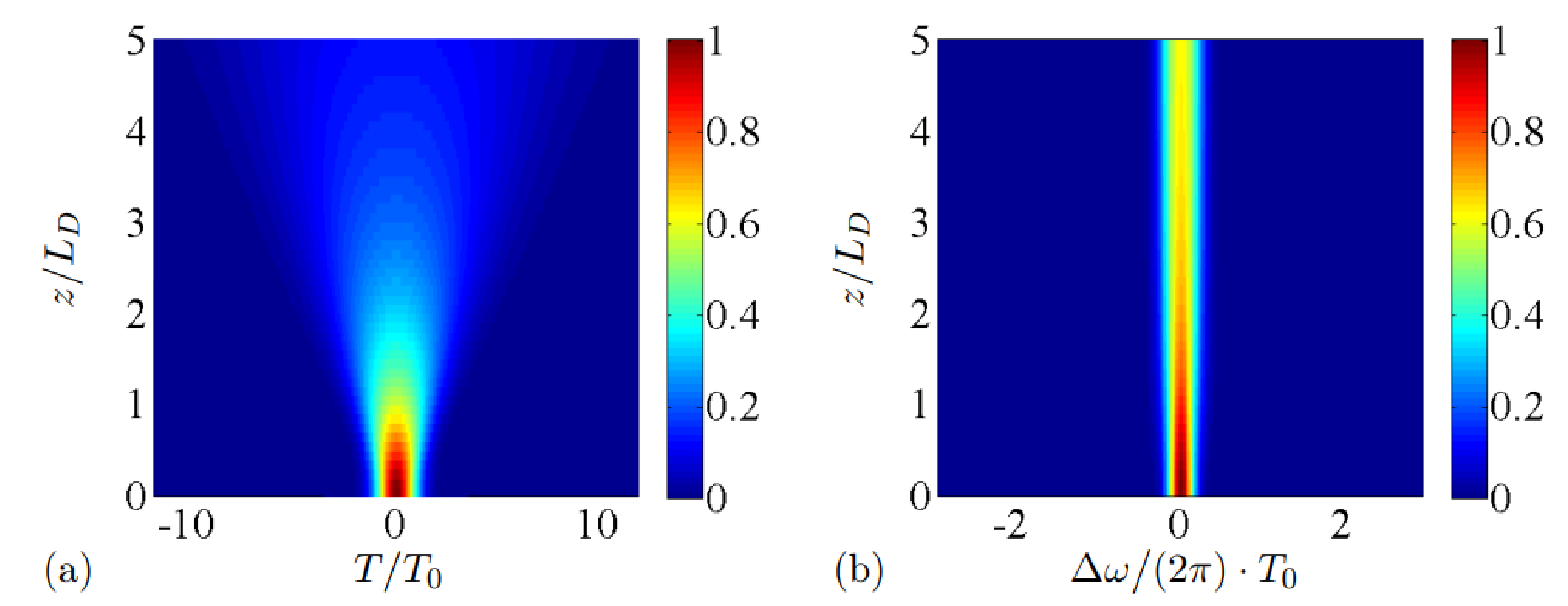
Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja normalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$\boxed{\beta_2 > 0}$

$\boxed{L_{NL} = L_D}$

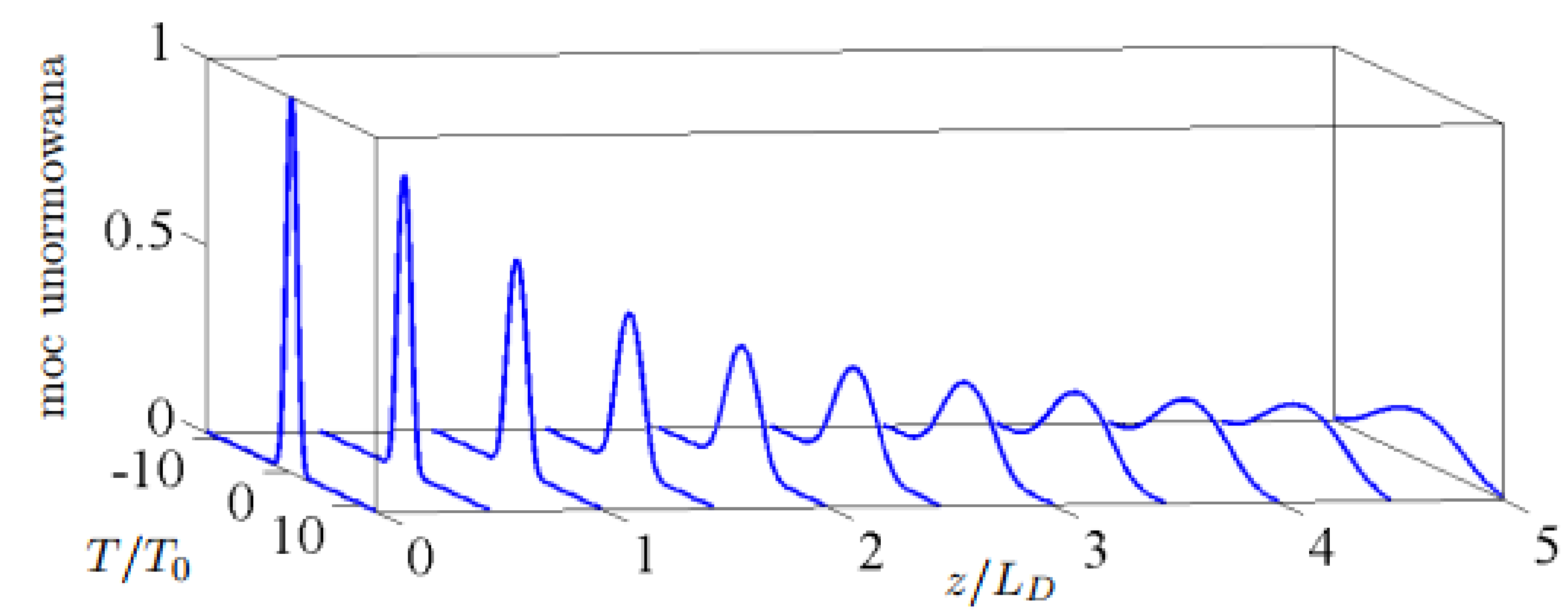


Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja normalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$\boxed{\beta_2 > 0}$ $\boxed{L_{NL} = L_D}$

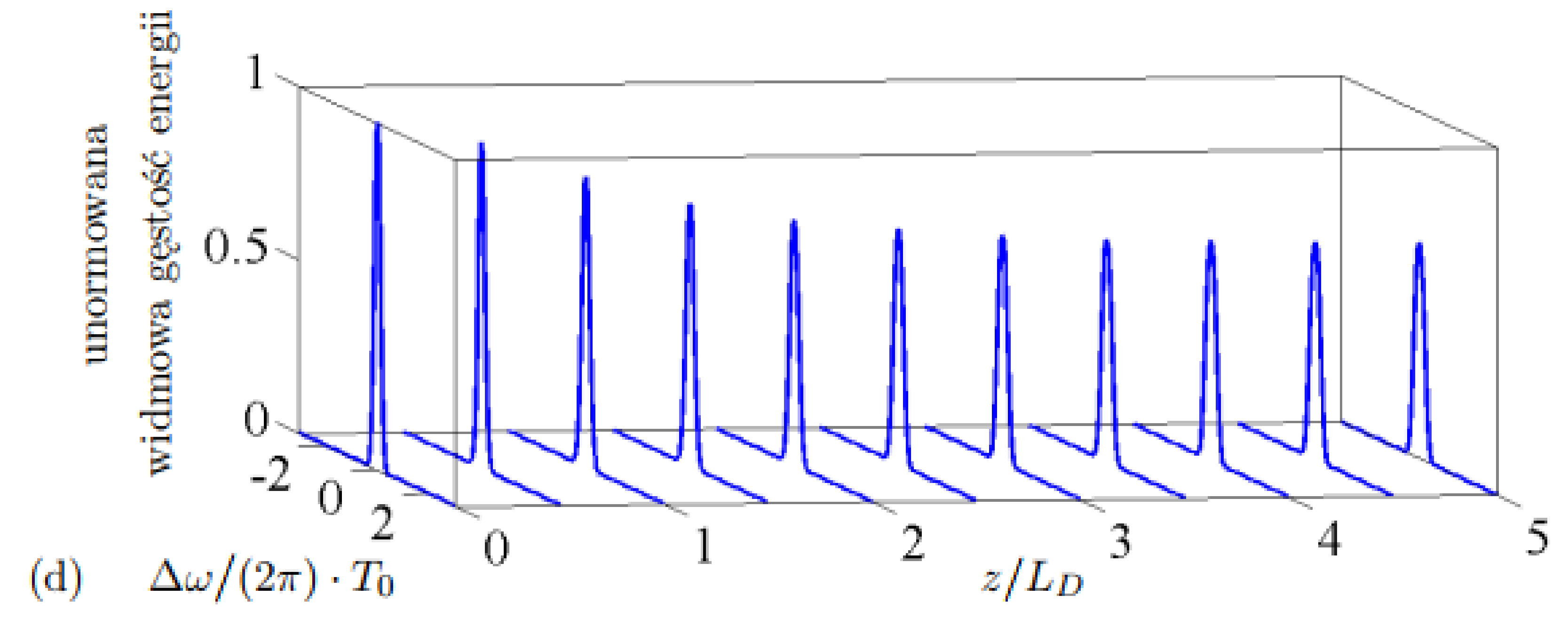


Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja normalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$\boxed{\beta_2 > 0}$ $\boxed{L_{NL} = L_D}$



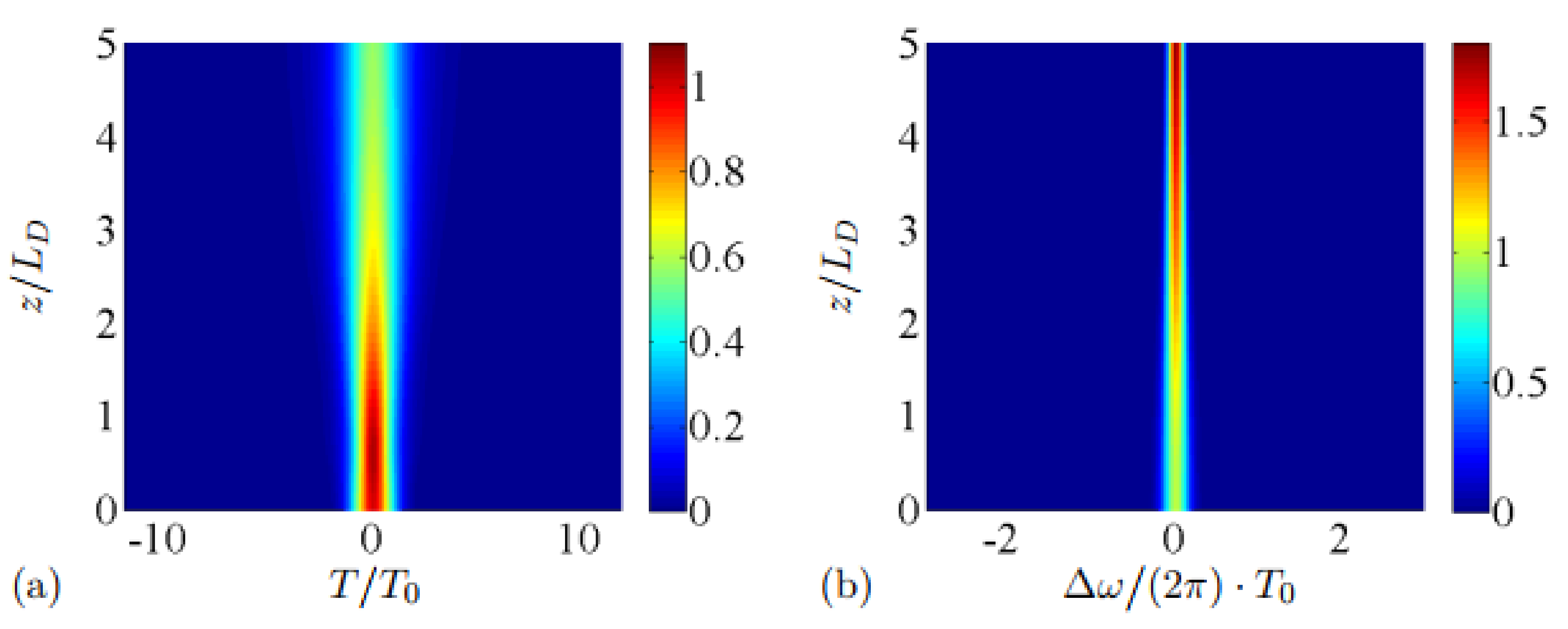
Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja anomalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$\boxed{\beta_2 < 0}$

$\boxed{L_{NL} = L_D}$

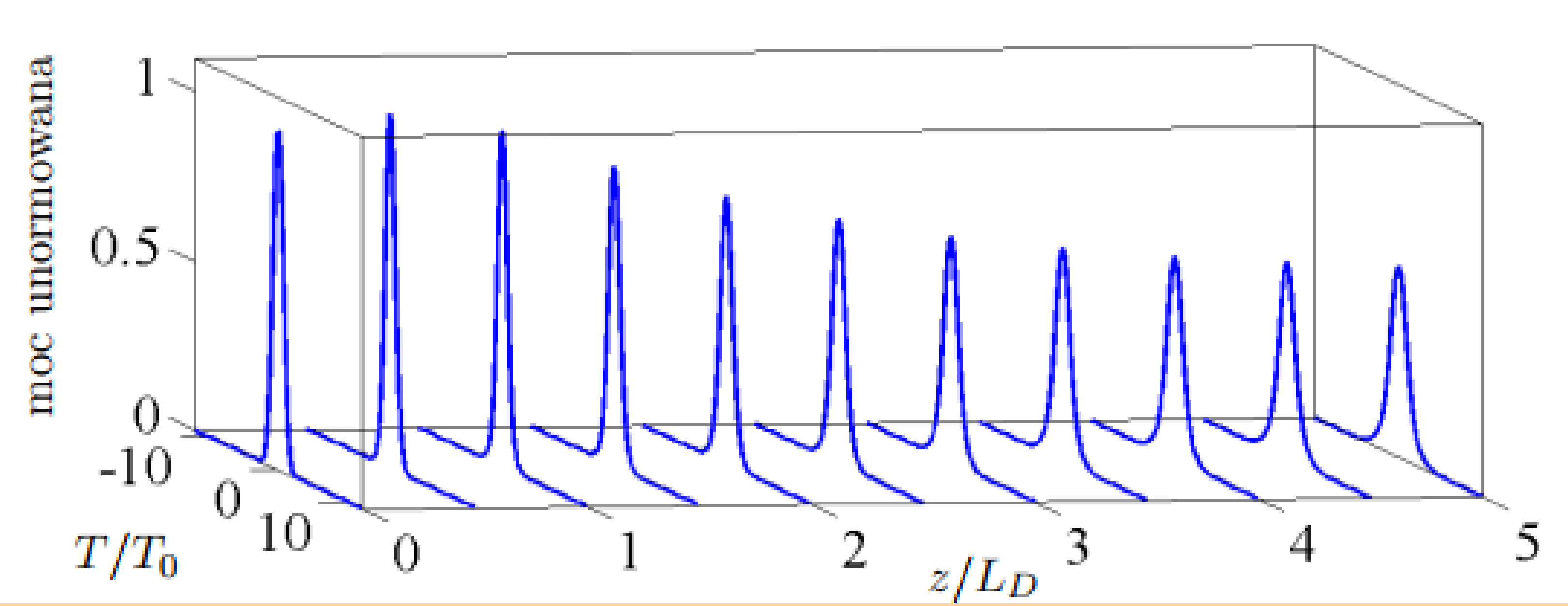


Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja anomalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$\boxed{\beta_2 < 0}$ $\boxed{L_{NL} = L_D}$



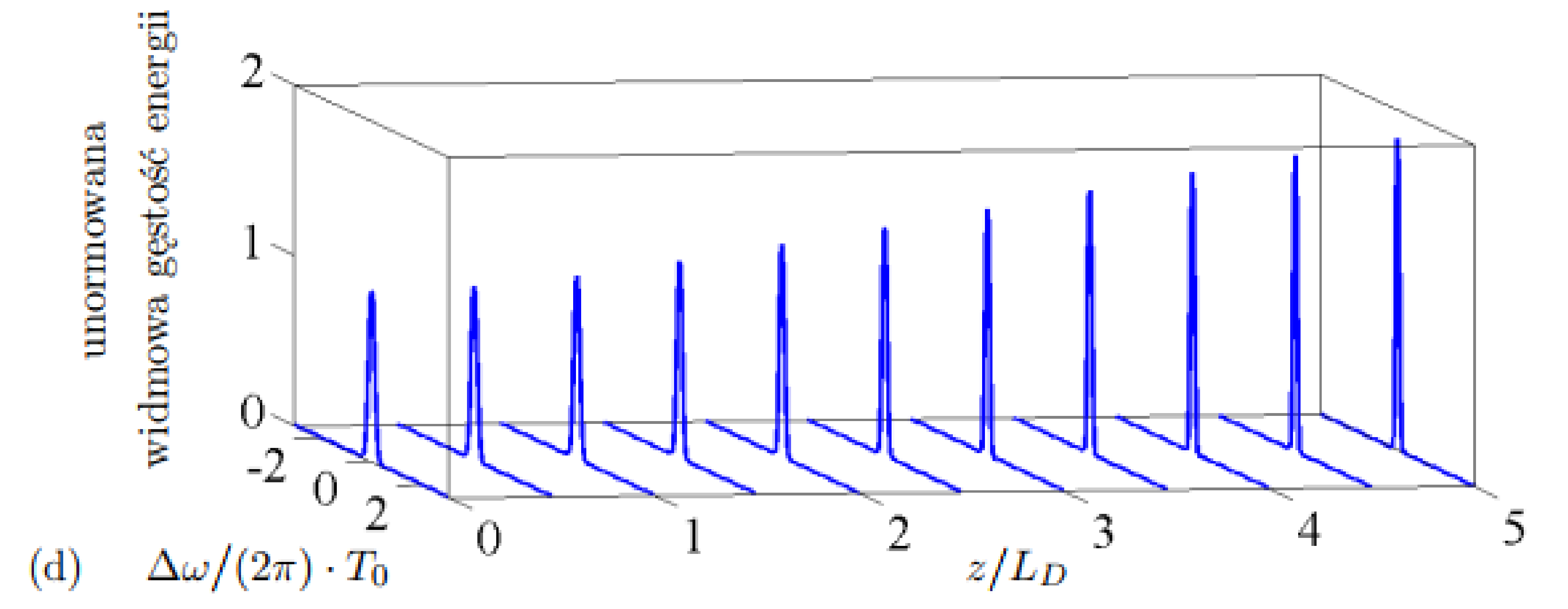
Politechnika Wrocławska

Samomodulacja fazy

SPM + dyspersja anomalna

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$\boxed{\beta_2 < 0}$ $\boxed{L_{NL} = L_D}$



Politechnika Wrocławska

Samomodulacja fazy

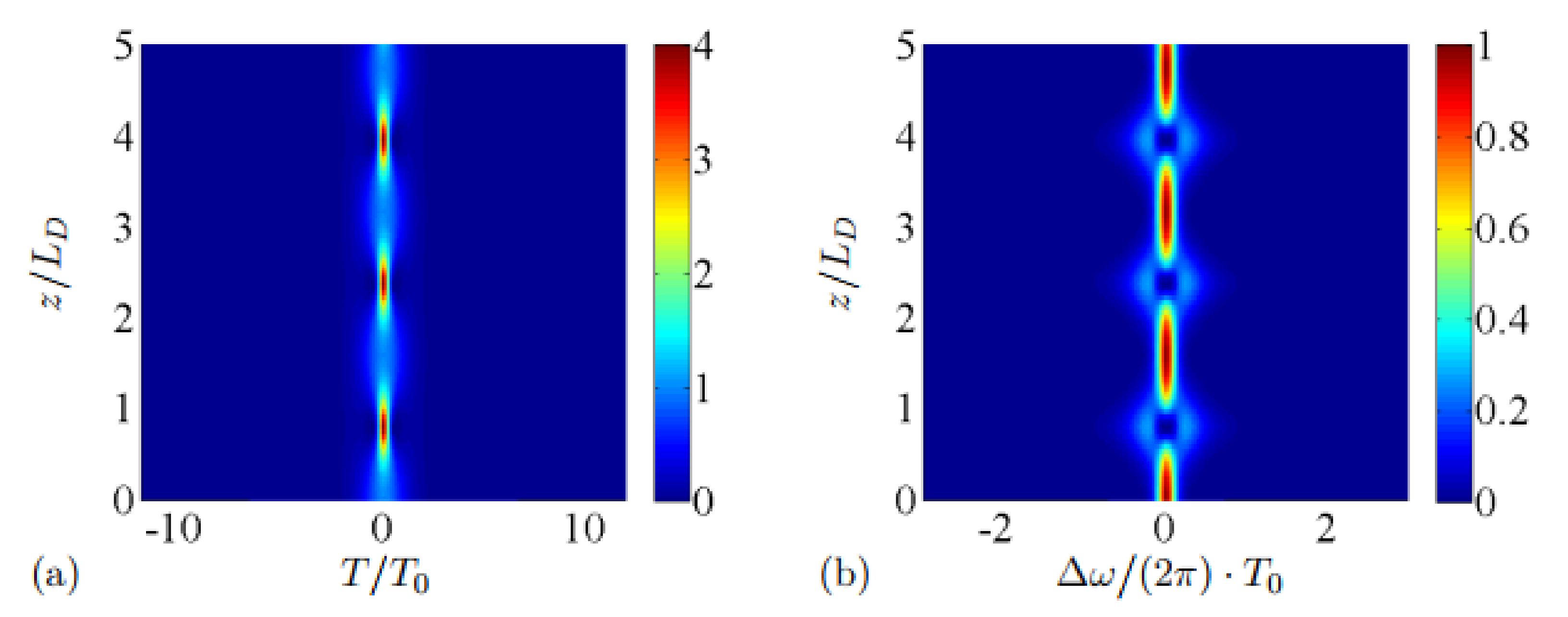
Soliton drugiego rzędu

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

$$\boxed{\beta_2 < 0}$$

$$\boxed{N^2 = \frac{L_D}{L_{NL}}}$$

$$\boxed{N = 2}$$



Niestabilność modulacyjna

Propagacja fali ciągłej

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

- jednym z wielu rozwiązań równania Schrödingera jest fala ciągła

$$A(z) = \sqrt{P_0}\exp\left(i\phi_{NL}\right)$$

$$\phi_{NL}(z) = \gamma P_0 z$$

Politechnika Wrocławska

Niestabilność modulacyjna

Propagacja fali ciągłej

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

- rozwiązanie to nie jest stabilne ze względu na małe zaburzenia w reżimie dyspersji anomalnej

$$A(z,t) = \sqrt{P_0 + a(z,t)} \exp(i\phi_{NL})$$

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = i\gamma P_0 (a + a^*)$$

Politechnika Wrocławska

Niestabilność modulacyjna

Propagacja fali ciągłej

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

- rozwiązanie to nie jest stabilne ze względu na małe zaburzenia w reżimie dyspersji anomalnej

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = i\gamma P_0\left(a + a^*\right)$$

$$a(z,t) = a_1 \exp\left[+i\left(Kz - \Omega t\right)\right] + a_2 \exp\left[-i\left(Kz - \Omega t\right)\right]$$

Politechnika Wrocławska

Niestabilność modulacyjna

Propagacja fali ciągłej

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$

- rozwiązanie to nie jest stabilne ze względu na małe zaburzenia w reżimie dyspersji anomalnej

$$\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = i\gamma P_0 \left(a + a^*\right)$$

$$K^2 = \frac{1}{4}\beta_2^2\Omega^2\left(\Omega^2 + \frac{4\gamma P_0}{\beta_2}\right)$$

$$a(z,t) = a_1 \exp\left[+i\left(Kz - \Omega t\right)\right] + a_2 \exp\left[-i\left(Kz - \Omega t\right)\right]$$

Niestabilność modulacyjna

Widmo wzmocnienia

- rozwiązanie to nie jest stabilne ze względu na małe zaburzenia w reżimie dyspersji anomalnej

$$K^2 = \frac{1}{4}\beta_2^2\Omega^2\left(\Omega^2 + \frac{4\gamma P_0}{\beta_2}\right) \qquad \Omega_c^2 = \frac{4\gamma P_0}{|\beta_2|} = \frac{4}{|\beta_2| L_{NL}}$$

$$K = \pm\frac{1}{2}|\beta_2\Omega|\sqrt{\Omega^2 + \operatorname{sgn}(\beta_2)\Omega_c^2}$$

$$\beta_2 < 0 \qquad |\Omega| < \Omega_c$$

$$g(\Omega) = 2\operatorname{Im}(K) = |\beta_2\Omega|\sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2} \qquad \Omega_{max} = \pm\frac{\Omega_c}{\sqrt{2}}$$

Politechnika Wrocławska

Niestabilność modulacyjna

Widmo wzmocnienia

- rozwiązanie to nie jest stabilne ze względu na małe zaburzenia w reżimie dyspersji anomalnej

$$g(\Omega) = 2\mathrm{Im}(K) = |\beta_2 \Omega| \sqrt{\Omega_c^2 - \Omega^2}$$

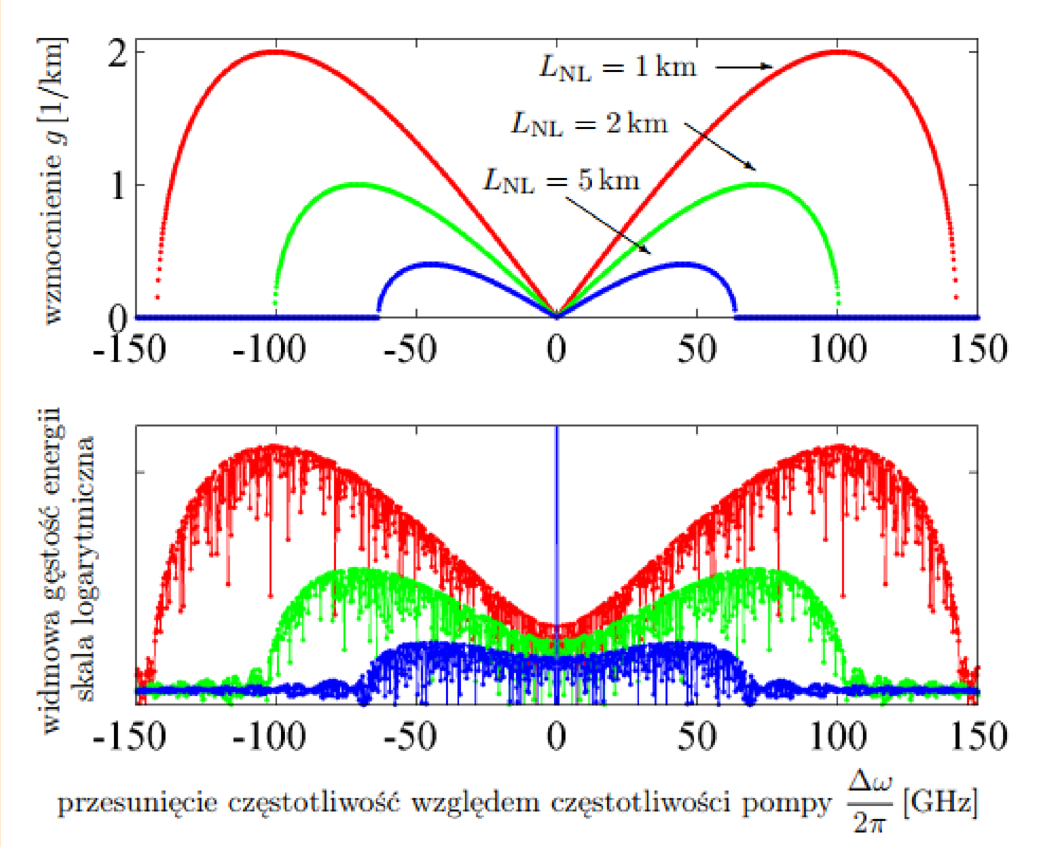
$$\Omega_c^2 = \frac{4\gamma P_0}{|\beta_2|} = \frac{4}{|\beta_2| L_{NL}}$$

$$\Omega_{max} = \pm \frac{\Omega_c}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2\gamma P_0}{\beta_2}}$$

$$g(\Omega_{max}) = 2\gamma P_0$$

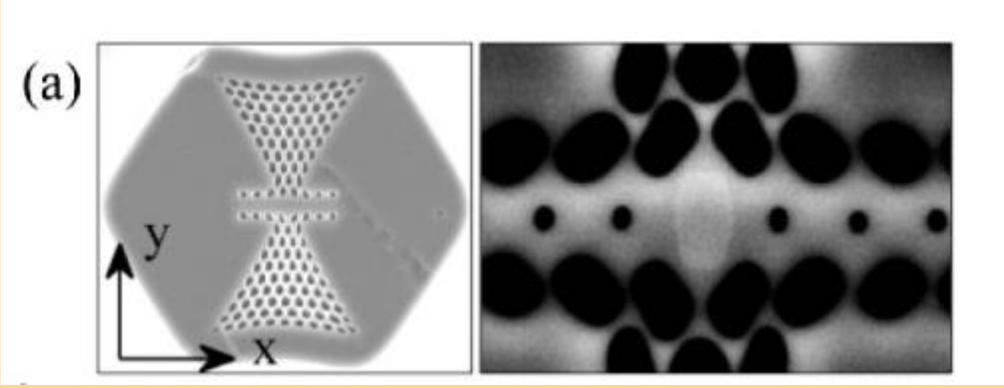
Niestabilność modulacyjna

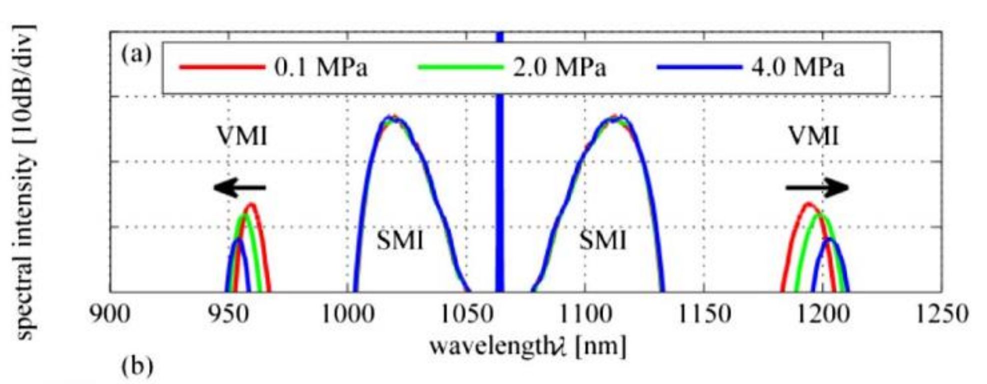
Widmo wzmocnienia

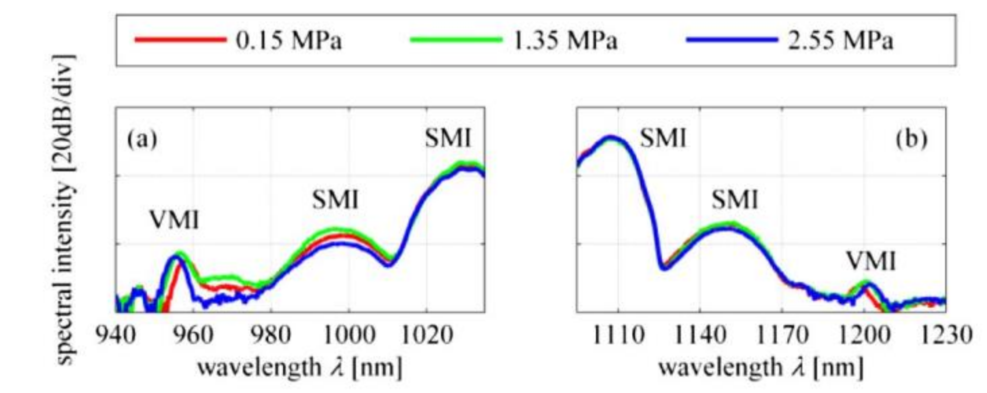


Niestabilność modulacyjna

Widmo wzmocnienia







K. Tarnowski A. Anuszkiewicz, J. Olszewski, P. Mergo,
B. Kibler, W. Urbanczyk, Opt. Lett. 38, 5260-5263 (2013).

Politechnika
Wrocławska

Podsumowanie

- Nieliniowe równanie Schrödingera
- Dyspersja chromatyczna
- Samomodulacja fazy
- Solitony
- Niestabilność modulacyjna