Wybrane zagadnienia fotoniki

W11FTE-SM0080G

rok akademicki 2024/25

semestr letni

Wykład 1

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221

Politechnika Wrocławska

Politechnika Wrocławska

Osoby ze szczególnymi potrzebami

- Będę starał się, aby na moich zajęciach każdy miał równe prawo do zdobycia wiedzy i rozliczenia się z niej

Wsparcie psychologiczne

- https://ddo.pwr.edu.pl/dla-studentow/wsparcie-psychologiczne

Liderzy dostępności

- https://ddo.pwr.edu.pl/liderzy-dostepnosci

Politechnika Wrocławska

Cele przedmiotu

- Umiejętność wykorzystania zaawansowanych metod numerycznych do modelowania zagadnień z zakresu fotoniki
- Zakres wiedzy
  - propagacja promieniowania elektromagnetycznego
    - w ośrodkach objętościowych
    - w falowodach
  - oddziaływania światła z materią
    - detekcja promieniowania
    - zjawiska nieliniowe
    - podstaw optyki statystycznej
    - propagacji światła w ośrodkach periodycznych

Plan wykładu

- Równania Maxwella
- Równania materiałowe
- Warunki brzegowe
- Gęstość energii i wektor Poyntinga
- Formalizm funkcji zespolonych
- Równanie falowe (w ośrodku jednorodnym izotropowym)
- Fala elektromagnetyczna

Politechnika Wrocławska

Równania Maxwella

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$\mathbf{E}$ $\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$

$\mathbf{H}$ $\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$

$\mathbf{D}$ $\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\right]$

$\mathbf{B}$ $\left[\frac{\mathrm{Wb}}{\mathrm{m}^2}\right]$

$\mathbf{J}$ $\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}\right]$

ρ $\left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}\right]$

Politechnika Wrocławska

Równania materiałowe

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12} \left[\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\right]$$

Politechnika Wrocławska

Warunki brzegowe

Ciągłość składowych

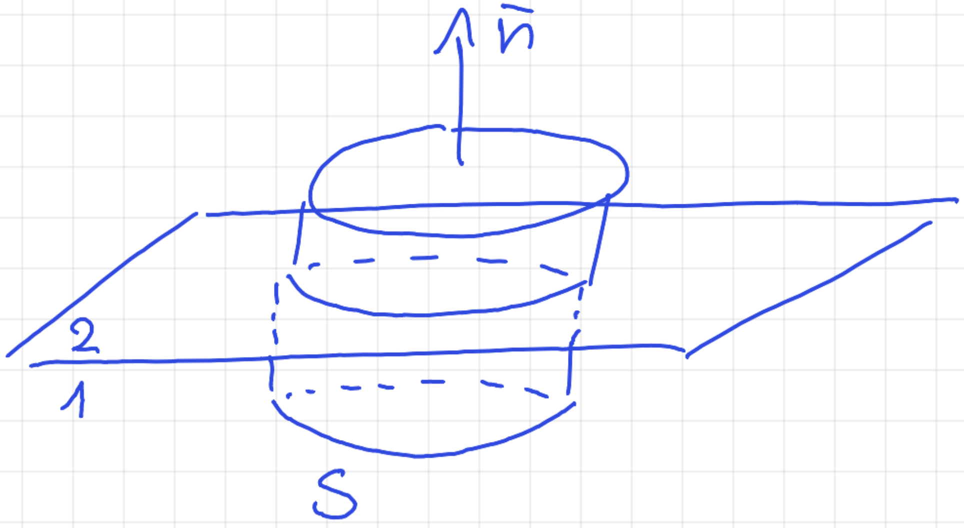
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\iiint \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \iint \mathbf{F} \cdot dS$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1 \right) = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 \right) = \sigma \qquad \sigma \quad \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \right]$$



$$B_{2n} = B_{1n}$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

Warunki brzegowe

Ciągłość składowych

$$\iint \nabla \times \mathbf{F} \cdot dS = \int \mathbf{F} \cdot dl$$

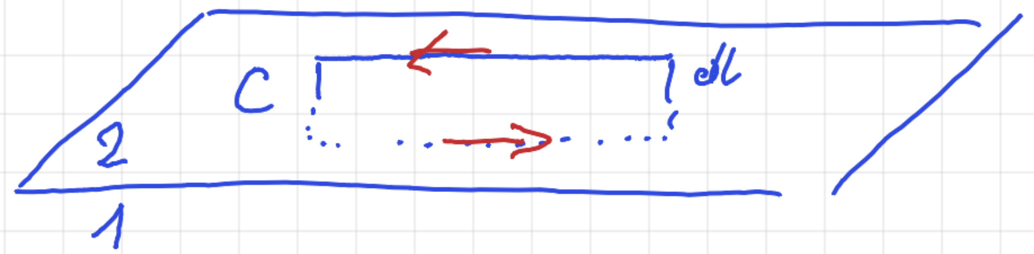
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1 \right) = 0$$

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1 \right) = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{K} \quad \left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} \right]$$



$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t}$$

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{K}$$

Gęstość energii i wektor Poyntinga

Praca wykonana przez falę elektromagnetyczną

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{E}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{H}\right)-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{J}=\nabla\times\mathbf{H}-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)=\mathbf{H}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)-\mathbf{E}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{H}\right)$$

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}=-\nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)-\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

Gęstość energii i wektor Poyntinga

Praca wykonana przez falę elektromagnetyczną

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = -\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) - \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E}\times\mathbf{H} = \mathbf{S}$$

$$\mathbf{S} \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2\cdot s} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$$

$$U = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$$

$$U \quad \left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}\right]$$

$$\nabla\cdot\mathbf{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$$

dla $\mathbf{J}=0$ $\quad \nabla\cdot\mathbf{S} + \dfrac{\partial U}{\partial t} = 0$

Politechnika Wrocławska

Politechnika Wrocławska

Gęstość energii i wektor Poyntinga

Praca wykonana przez falę elektromagnetyczną

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = -\nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) - \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H} + \mu_0\mathbf{M}$$

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} = -\nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right) - \mu_0\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \varepsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} - \mu_0\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} - \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}$$

Politechnika Wrocławska

Fale monochromatyczne i formalizm funkcji zespolonych

$$a(t) = |A|\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$A = |A|\exp(i\alpha)$$

$$\nu \quad [\mathrm{Hz}]$$

$$a(t) = \mathrm{Re}\left[A\exp(i\omega t)\right]$$

$$a(t) = A\exp(i\omega t)$$

Politechnika Wrocławska

Fale monochromatyczne i formalizm funkcji zespolonych

$$\frac{d}{dt}a(t)=\frac{d}{dt}|A|\cos(\omega t+\alpha)=-\omega|A|\sin(\omega t+\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}a(t)=\frac{d}{dt}A\exp(i\omega t)=-i\omega A\exp(i\omega t)$$

Politechnika Wrocławska

Fale monochromatyczne i formalizm funkcji zespolonych

$$a(t) = |A|\cos(\omega t + \alpha) = \mathrm{Re}\left[A\exp(i\omega t)\right]$$

$$b(t) = |B|\cos(\omega t + \beta) = \mathrm{Re}\left[B\exp(i\omega t)\right]$$

$$A = |A|\exp(i\alpha)$$

$$B = |B|\exp(i\beta)$$

$$a(t)b(t) = \frac{|A||B|}{2}\left[\cos(2\omega t + \alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\right]$$

$$a(t)b(t) = AB\exp(i2\omega t) = |A||B|\exp\left(i(2\omega t + \alpha + \beta)\right)$$

Fale monochromatyczne i formalizm funkcji zespolonych

Uśrednianie po czasie

$$\left\langle a(t)b(t)\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T |A|\cos(\omega t+\alpha)|B|\cos(\omega t+\beta)\,dt$$

$$a(t)b(t) = \frac{|A||B|}{2}\left[\cos(2\omega t+\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\left\langle a(t)b(t)\right\rangle = \frac{|A||B|}{2}\cos(\alpha-\beta)$$

$$\left\langle a(t)b(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[A^{*}B\right]$$

$$\left\langle a(t)b(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[a(t)^{*}\,b(t)\right]$$

Fale monochromatyczne i formalizm funkcji zespolonych

Uśrednianie po czasie

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right]$$

$$U = \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}^* + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}^*\right]$$

$$P_\mathrm{D} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}^*\cdot\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t}\right]$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\exp(i\omega t)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0\exp(i\omega t)$$

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}_0\exp(i\omega t)$$

$$P_\mathrm{D} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(i\omega\varepsilon_0\chi\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^*\right)$$

$$\chi = \chi' - i\chi''$$

$$P_\mathrm{D} = \frac{1}{2}\omega\varepsilon_0\chi''\mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0^*$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

Ograniczając się do ośrodków o $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$ oraz skalarnych przenikalnościach

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{E} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\nabla \cdot \mathbf{E}\right) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\psi = A \exp\left(i\left(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right)\right)$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\psi = A\exp\left(i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)\right)$$

$$\left|\mathbf{k}\right| = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$v = \frac{\omega}{\left|\mathbf{k}\right|}$$

$$\lambda' = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\frac{v}{\omega}$$

$$k = \left|\mathbf{k}\right|$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$v = \frac{c}{n}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 299\ 792\ 458\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}}$$

Politechnika Wrocławska

Fala elektromagnetyczna

$$\mathbf{E} = \mathbf{u}_1 E_0 \exp\left(i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)\right)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{u}_2 H_0 \exp\left(i\left(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)\right)$$

$$\nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \cdot H = 0$$

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{k} = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{k} = 0$$

fala elektromagnetyczna

jest falą poprzeczną

$$\nabla \times \mathbf{E} - u_2 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{u}_1}{|\mathbf{k}|}$$

$$H_0 = \frac{E_0}{\eta} \qquad \eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2 \perp \mathbf{k} \perp \mathbf{u}_1$$

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$$

Fala elektromagnetyczna

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2\eta}\left|E_0\right|^2 \mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{k}}{2\omega\mu}\left|E_0\right|^2 = \frac{\mathbf{k}}{2\omega\mu}\left|\mathbf{E}\right|^2$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$$

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon\left|E_0\right|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\left|\mathbf{E}\right|^2$$

$$S = vU$$

Politechnika Wrocławska

Podsumowanie

- Równania Maxwella
- Równania materiałowe
- Warunki brzegowe
- Gęstość energii i wektor Poyntinga
- Formalizm funkcji zespolonych
- Równanie falowe (w ośrodku jednorodnym izotropowym)
- Fala elektromagnetyczna