



Politechnika
Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

W11OPA-SM0060G

rok akademicki 2024/25

semestr letni

Wykład 8

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Plan wykładu

- Całkowanie numeryczne
 - Zastosowanie interpolacji wielomianowej
 - Wzór Newtona-Cotesa
 - Wzór trapezów
 - Wzór Simpsona

Całkowanie numeryczne

Zastosowanie interpolacji wielomianowej

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$A_i = \int_a^b l_i(x) dx$$

Jeżeli węzły są równoodległe, to powyższy wzór nazywamy wzorem Newtona-Cotesa

Całkowanie numeryczne

Wzór trapezów

Całkowanie z wykorzystaniem interpolacji wielomianowej dla przypadku $n = 1$ sprowadza się do wzoru trapezów ($x_0 = a$, $x_1 = b$)

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - b}{a - b}$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a}$$

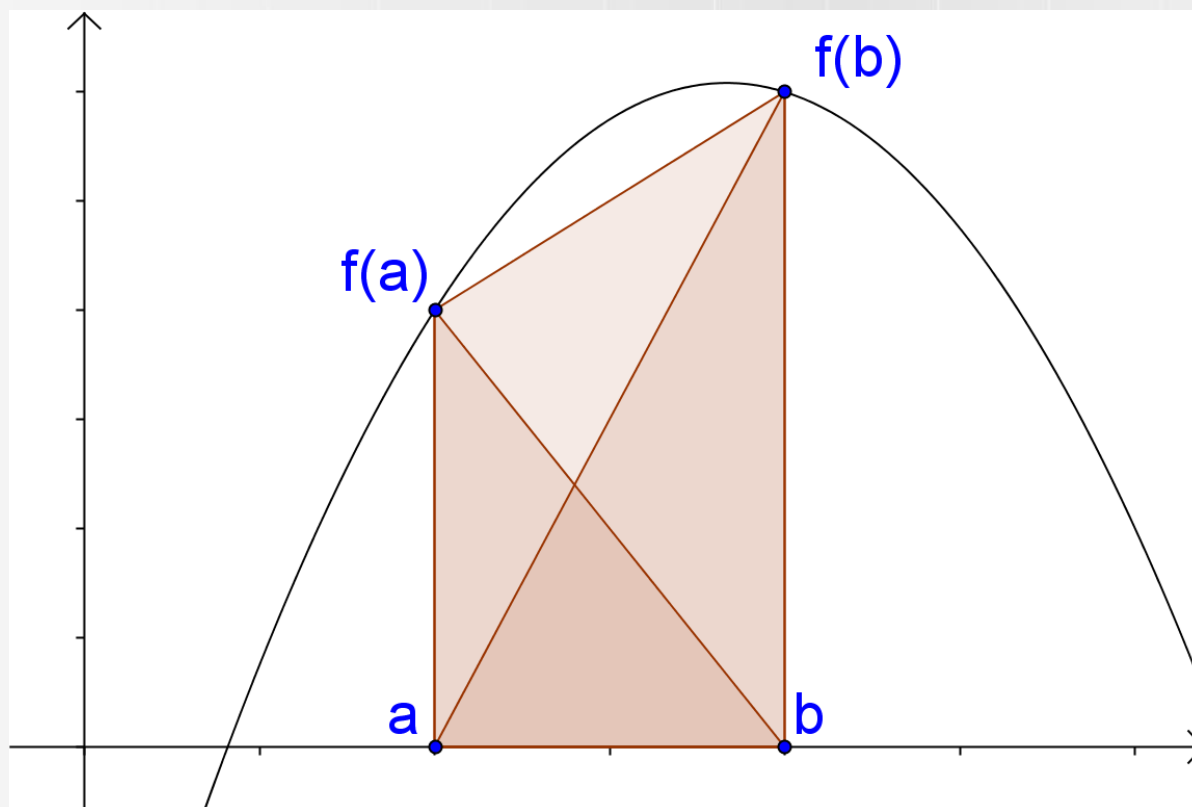
$$A_0(x) = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx = \frac{1}{2}(b - a) \quad A_1(x) = \int_a^b \frac{x - a}{b - a} dx = \frac{1}{2}(b - a)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b - a)[f(a) + f(b)]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b - a)[f(a) + f(b)] - \frac{1}{12}(b - a)^3 f''(\xi)$$

Całkowanie numeryczne

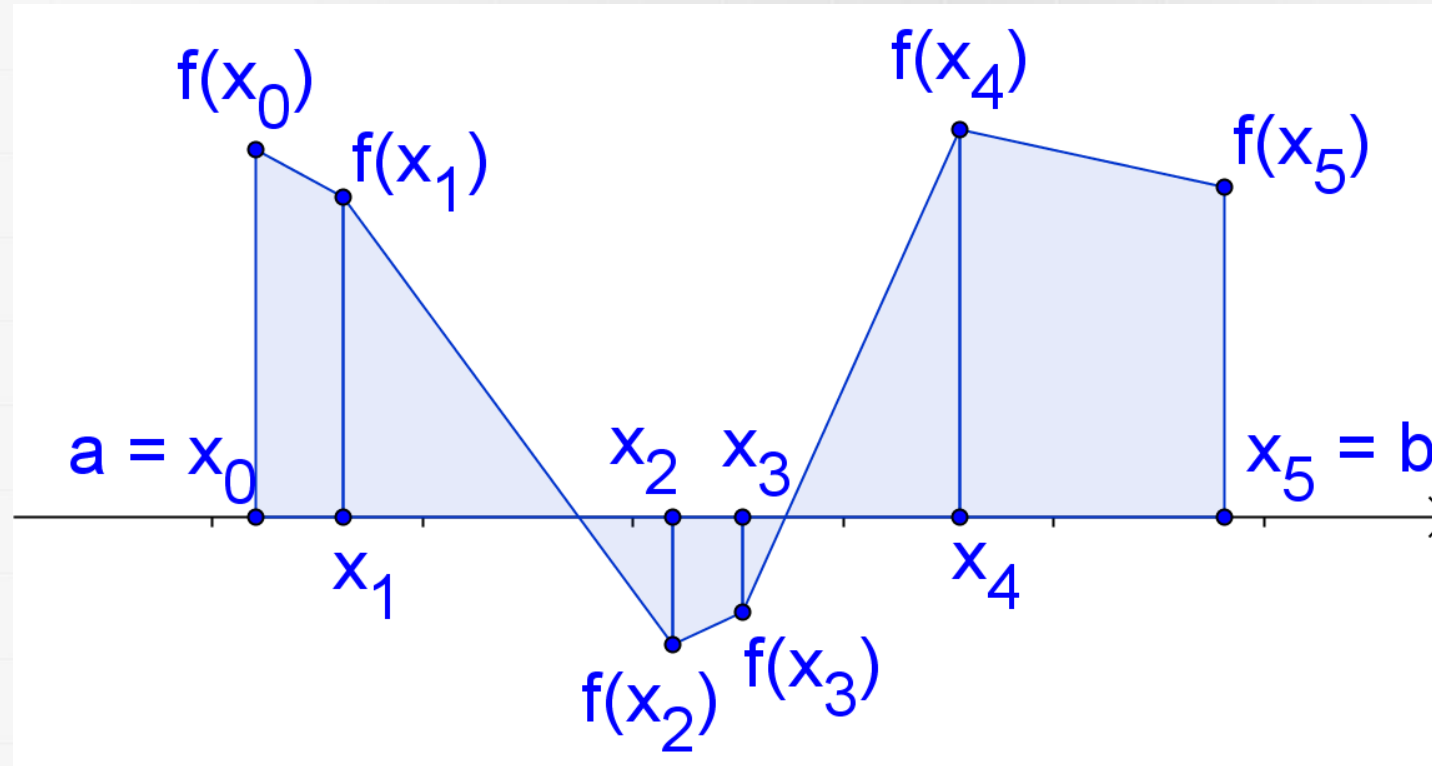
Wzór trapezów



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]$$

Całkowanie numeryczne

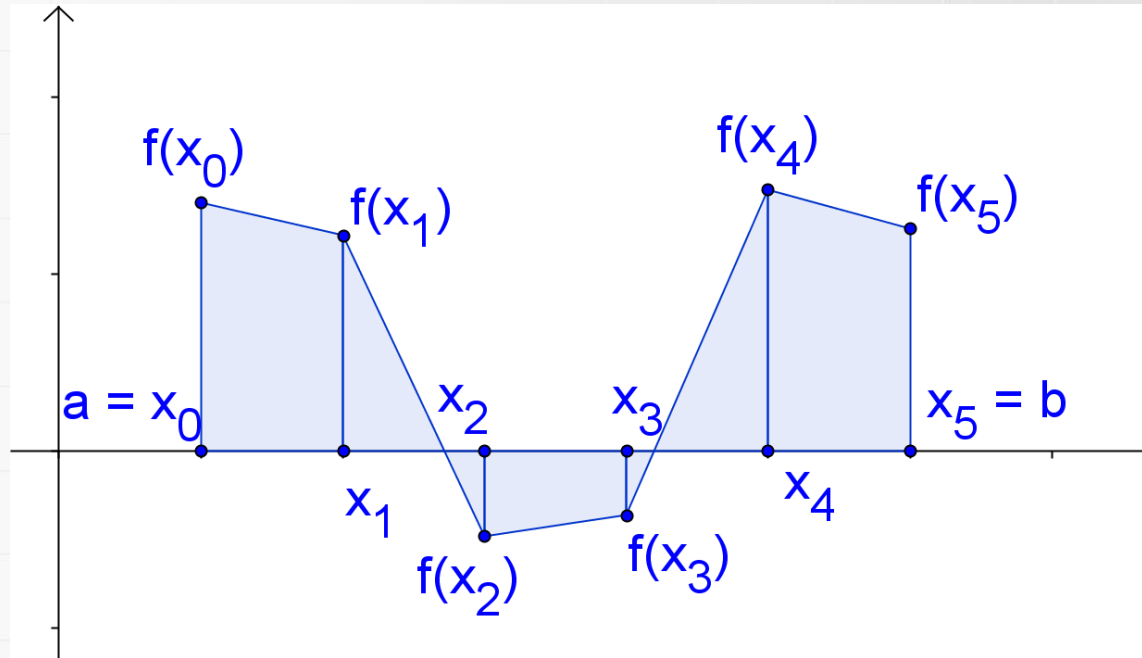
Złożony wzór trapezów



$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$

Całkowanie numeryczne

Złożony wzór trapezów

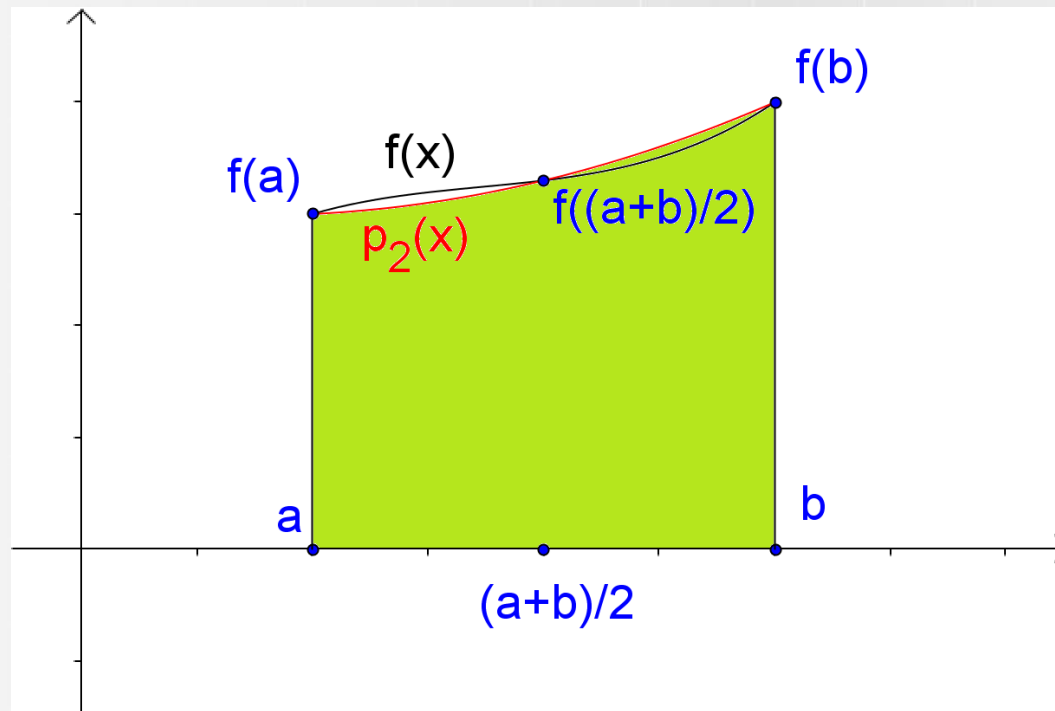


$$x_i = a + ih$$
$$h = \frac{(b - a)}{n}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} h \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] = h \left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

Całkowanie numeryczne

Wzór Simpsona



$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{6}(b-a) \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$$

Całkowanie numeryczne

Złożony wzór Simpsona

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{6}(b-a) \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad x_i = a + ih \quad (0 \leq i \leq 2n)$$
$$h = \frac{(b-a)}{2n}$$

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \approx \\ &\approx \frac{1}{3} h \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right] = \\ &= \frac{1}{3} h \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} f(x_{2i+2}) + f(x_{2n}) \right] \end{aligned}$$

Podsumowanie

- Całkowanie numeryczne
 - Zastosowanie interpolacji wielomianowej
 - Wzór Newtona-Cotesa
 - Wzór trapezów
 - Wzór Simpsona