



Politechnika
Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

W11OPA-SM0060G

rok akademicki 2024/25

semestr letni

Wykład 6

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Plan wykładu

- Interpolujące funkcje sklejjane

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*

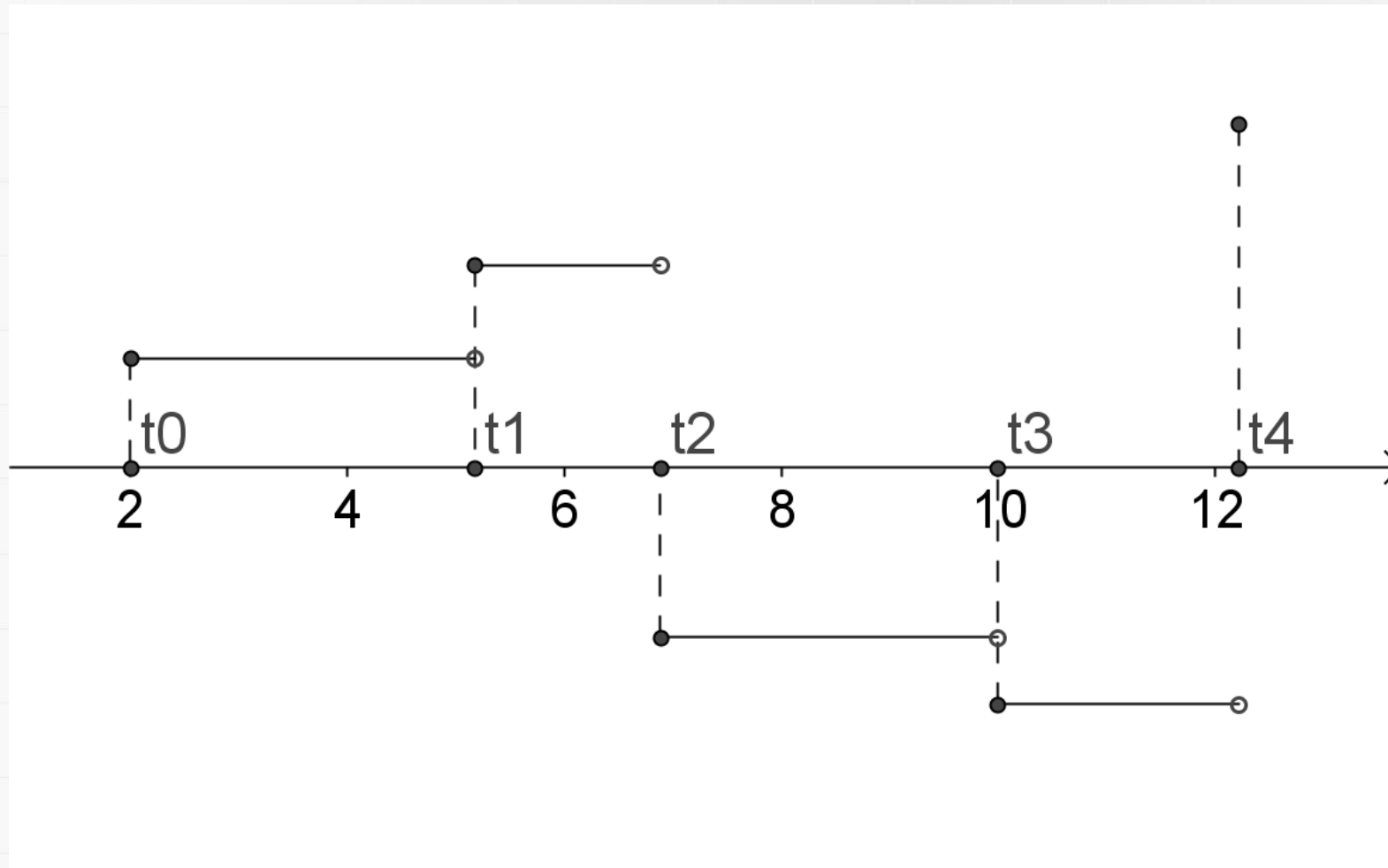
Interpolujące funkcje sklejane

Zadanie. Mamy $n+1$ węzłów $t_0, t_1, \dots, t_n$ takich, że $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Ponadto, znamy wartości w tych węzłach. Szukamy funkcji S , która:

- W każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1})$ ($0 \leq i \leq n - 1$) jest wielomianem klasy Π_k .
- Ma ciągłą $(k-1)$ -szą pochodną w przedziale $[t_0, t_n]$.
- Funkcję S nazywamy funkcją sklejaną stopnia k .

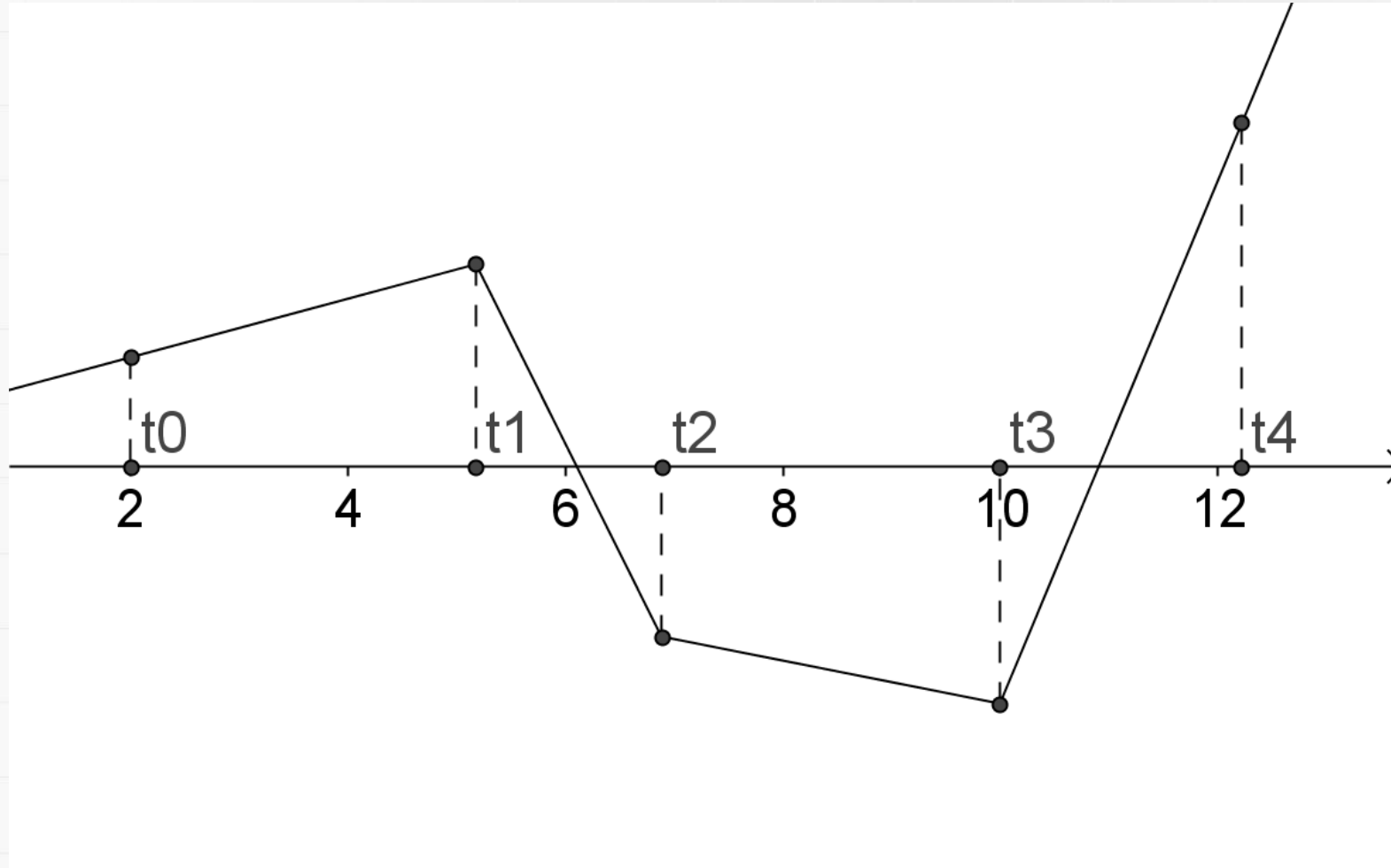
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 0



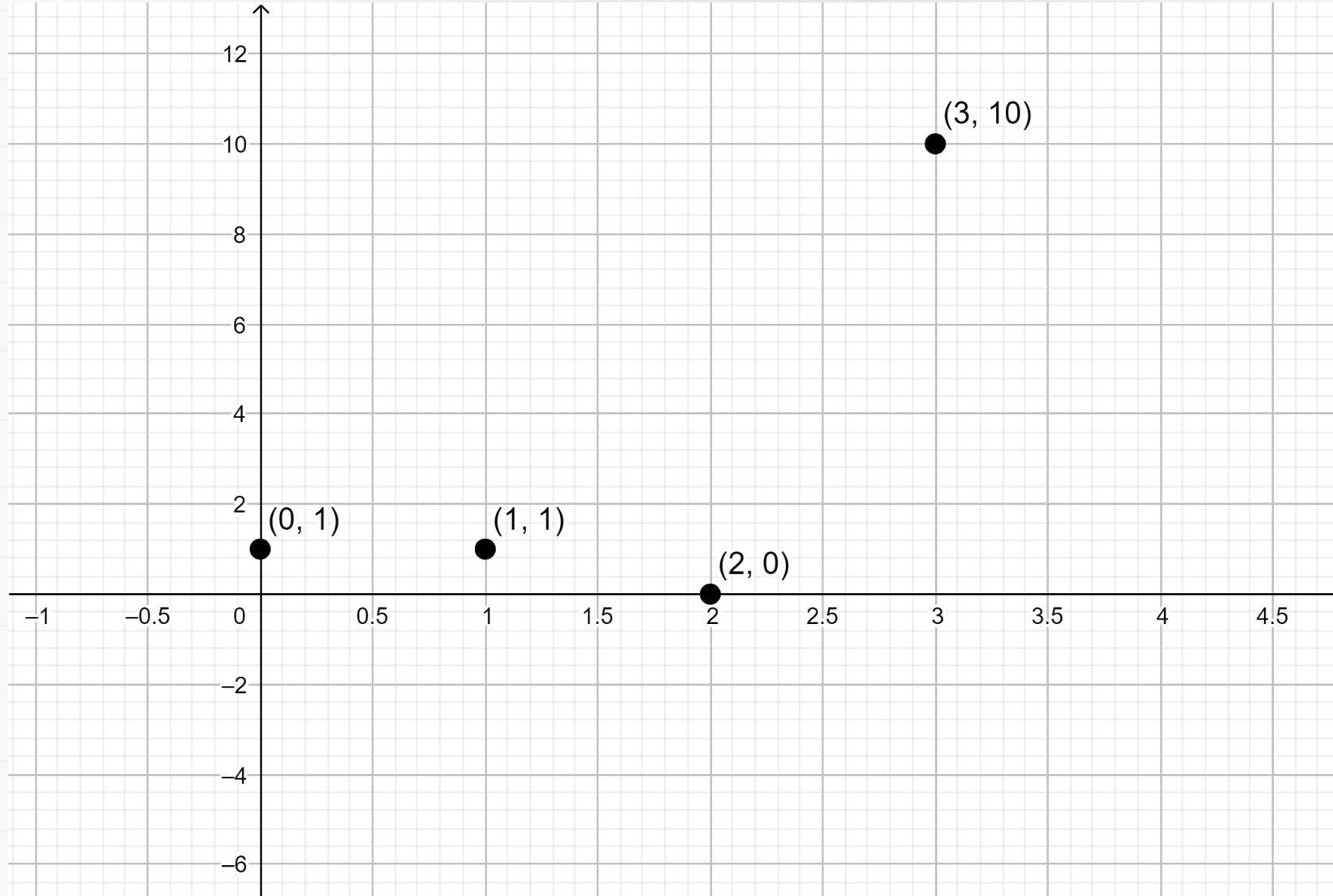
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 1



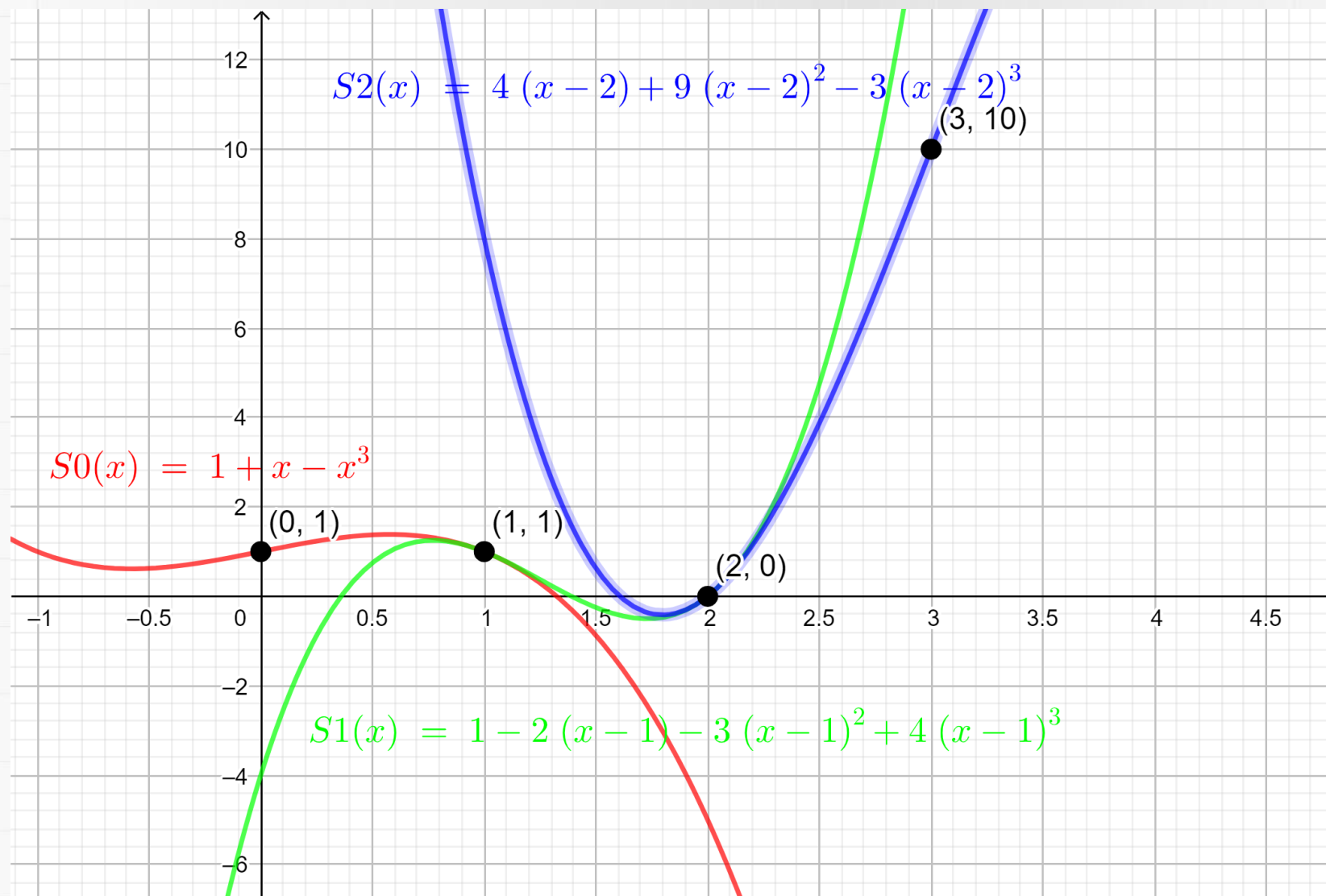
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3



Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3



Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

Szukamy takiej funkcji S , która:

- w danych węzłach t_i (dla $i = 0, 1, \dots, n$)
- ma dane wartości y_i ,
- w każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1})$ jest wielomianem S_i (dla $i = 0, 1, \dots, n - 1$) klasy Π_3 .

Wszystkie wielomiany mają łącznie $4n$ współczynników

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

Wszystkie wielomiany mają łącznie $4n$ współczynników.

Warunki na współczynniki wynikają z:

- n warunków $S_i(t_i) = y_i$ ($i = 0, \dots, n-1$)
- n warunków $S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$ ($i = 0, \dots, n-1$)
- ciągłość pochodnej S' daje jeden warunek $S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$ ($i = 1, \dots, n-1$) w każdym węźle wewnętrznym (łącznie $n-1$)
- ciągłość drugiej pochodnej S'' daje $n-1$ warunków.

W sumie mamy $4n-2$ równań.

Interpolujące funkcje sklejane

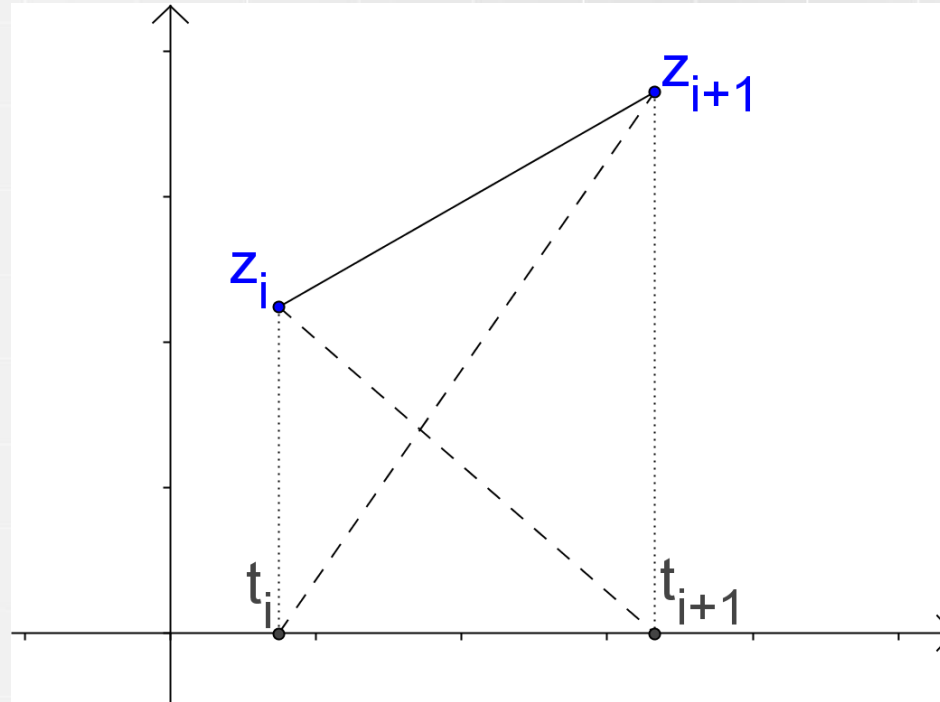
Funkcja sklejana stopnia 3

- $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
- $S'_i(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$
- $S''_i(x) = 6a_i x + 2b_i$
- $S'''_i(x) = 6a_i$
- funkcja $S''_i(x)$ jest liniowa
- wykorzystując pomocnicze wielkości $z_i = S''_i(t_i)$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S''_i(x) = \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - t_i) + \frac{z_i}{h_i}(t_{i+1} - x)$$



$$h_i = t_{i+1} - t_i$$

Interpolujące funkcje sklejjane

Funkcja sklejjana stopnia 3

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + C(x - t_i) + D(t_{i+1} - x)$$

Stałe całkowania C i D można wyznaczyć z warunków

$$S_i(t_i) = y_i \qquad S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$\begin{aligned} S_i(x) = & \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \\ & + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) (x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_ih_i}{6} \right) (t_{i+1} - x) \end{aligned}$$

Interpolujące funkcje sklejjane

Funkcja sklejjana stopnia 3

Aby wyznaczyć wielkości z_i korzystamy z warunków

$$S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$\begin{aligned} S'_i(x) = & \frac{z_{i+1}}{2h_i} (x - t_i)^2 + \frac{z_i}{2h_i} (t_{i+1} - x)^2 + \\ & + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_ih_i}{6} \right) \end{aligned}$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S_i'(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 - \frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_ih_i}{6} \right)$$

$$S_i'(t_i) = -\frac{h_i}{3}z_i - \frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

$$S_i'(t_{i+1}) = \frac{h_i}{3}z_{i+1} + \frac{h_i}{6}z_i - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

$$S_{i-1}'(t_i) = \frac{h_{i-1}}{3}z_i + \frac{h_{i-1}}{6}z_{i-1} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}}$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$z_0 = 0, \quad z_n = 0$

$$u_i = 2(h_{i-1} + h_i), \quad b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i), \quad v_i = b_i - b_{i-1}$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i) \left(C_i + (x - t_i) (B_i + (x - t_i) A_i) \right)$$

$$A_i = \frac{1}{6h_i} (z_{i+1} - z_i)$$

$$B_i = \frac{z_i}{2}$$

$$C_i = -\frac{h_i}{6} (z_{i+1} + 2z_i) + \frac{1}{h_i} (y_{i+1} - y_i)$$

Podsumowanie

- Interpolujące funkcje sklejjane