



Politechnika
Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

W11OPA-SM0060G

rok akademicki 2024/25

semestr letni

Wykład 5

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Plan wykładu

- Wielomian interpolujący
- Wzór interpolacyjny Newtona
- Wzór interpolacyjny Lagrange'a
- Ilorazy różnicowe
- Interpolacja Hermite'a

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*

Wielomian interpolujący

Zadanie. Znaleźć wielomian p możliwie najniższego stopnia taki, że dla danych $n + 1$ punktów (x_i, y_i) jest $p(x_i) = y_i$ ($0 \leq i \leq n$).

Twierdzenie. Jeśli liczby $x_0, x_1, \dots, x_n$ są parami różne to istnieje dokładnie jeden wielomian $p \in \Pi_n$ taki, że $p(x_i) = y_i$ ($0 \leq i \leq n$).

Wielomian interpolujący

Dowód - jednoznaczność

Założmy, że istnieją dwa wielomiany klasy Π_n interpolujące wartości y_i w węzłach x_i : $p_n(x)$ oraz $q_n(x)$.

Rozważmy wielomian $p_n(x) - q_n(x)$, który także należy do klasy Π_n .

Wielomiany należące do Π_n mogą znikać w co najwyżej n punktach, o ile nie znikają tożsamościowo.

Wielomian $p_n(x) - q_n(x)$ znika w $n+1$ punktach x_i dla $(0 \leq i \leq n)$, zatem $p_n(x) \equiv q_n(x)$.

Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

Istnienie - dla $n = 0$ wielomian stały $p_0(x) = y_0$ spełnia jedyny warunek interpolacyjny $p_0(x_0) = y_0$.

Założmy, że dla pewnego k istnieje wielomian p_{k-1} klasy Π_{k-1} taki, że $p_{k-1}(x_i) = y_i$ dla $(0 \leq i \leq k-1)$.

Wielomian $p_k(x)$ możemy zapisać jako

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}).$$

Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

Wielomian $p_k(x)$ możemy zapisać jako

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}).$$

Stopień tego wielomianu nie przewyższa k .

Wielomian ten spełnia warunki interpolacyjne ($0 \leq i \leq k-1$).

Pozostaje wyznaczyć c_k tak, żeby $p_k(x_k) = y_k$.

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1}) = y_k.$$

Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

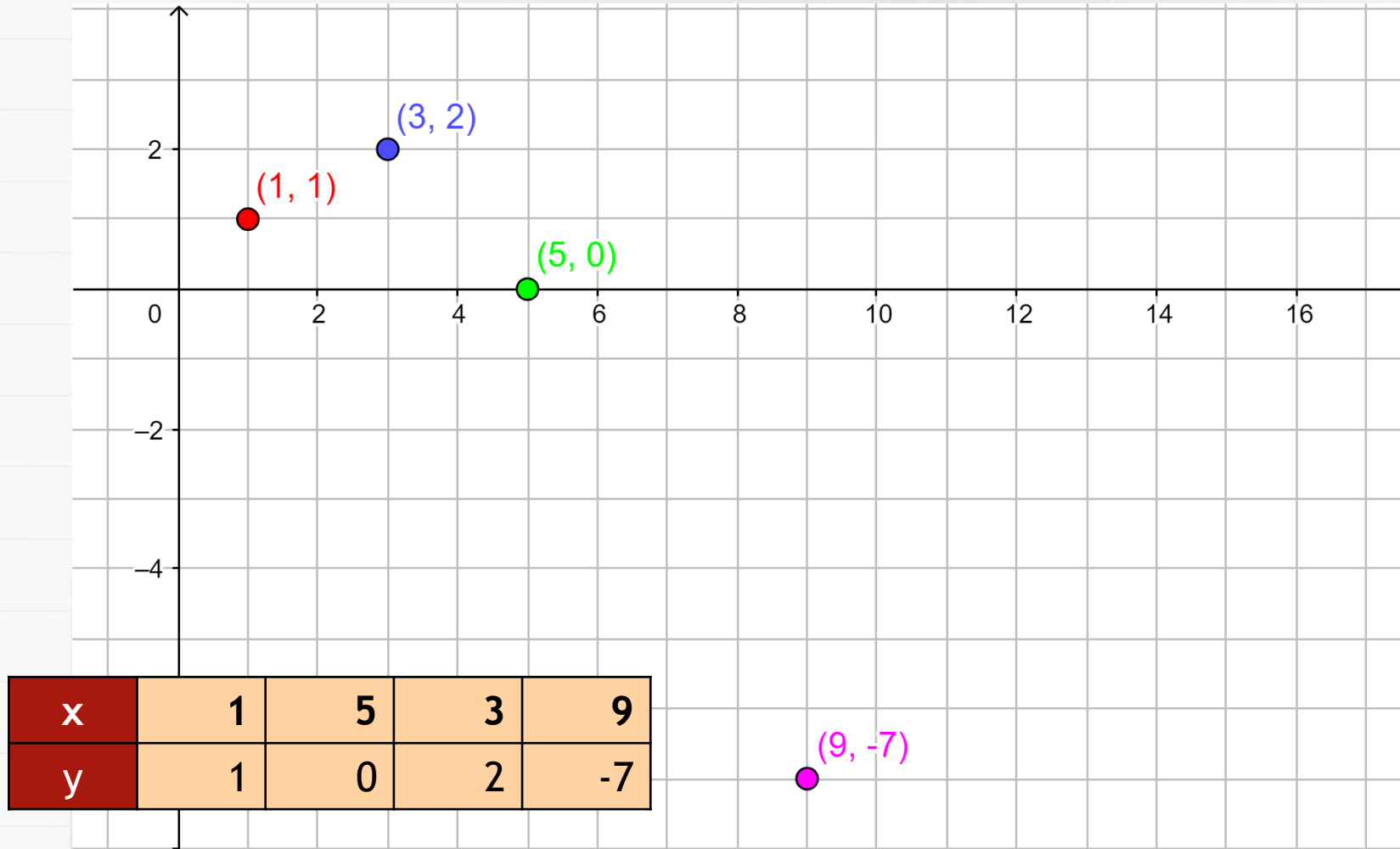
$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1}) = y_k.$$

$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})}$$

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^k \left(c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

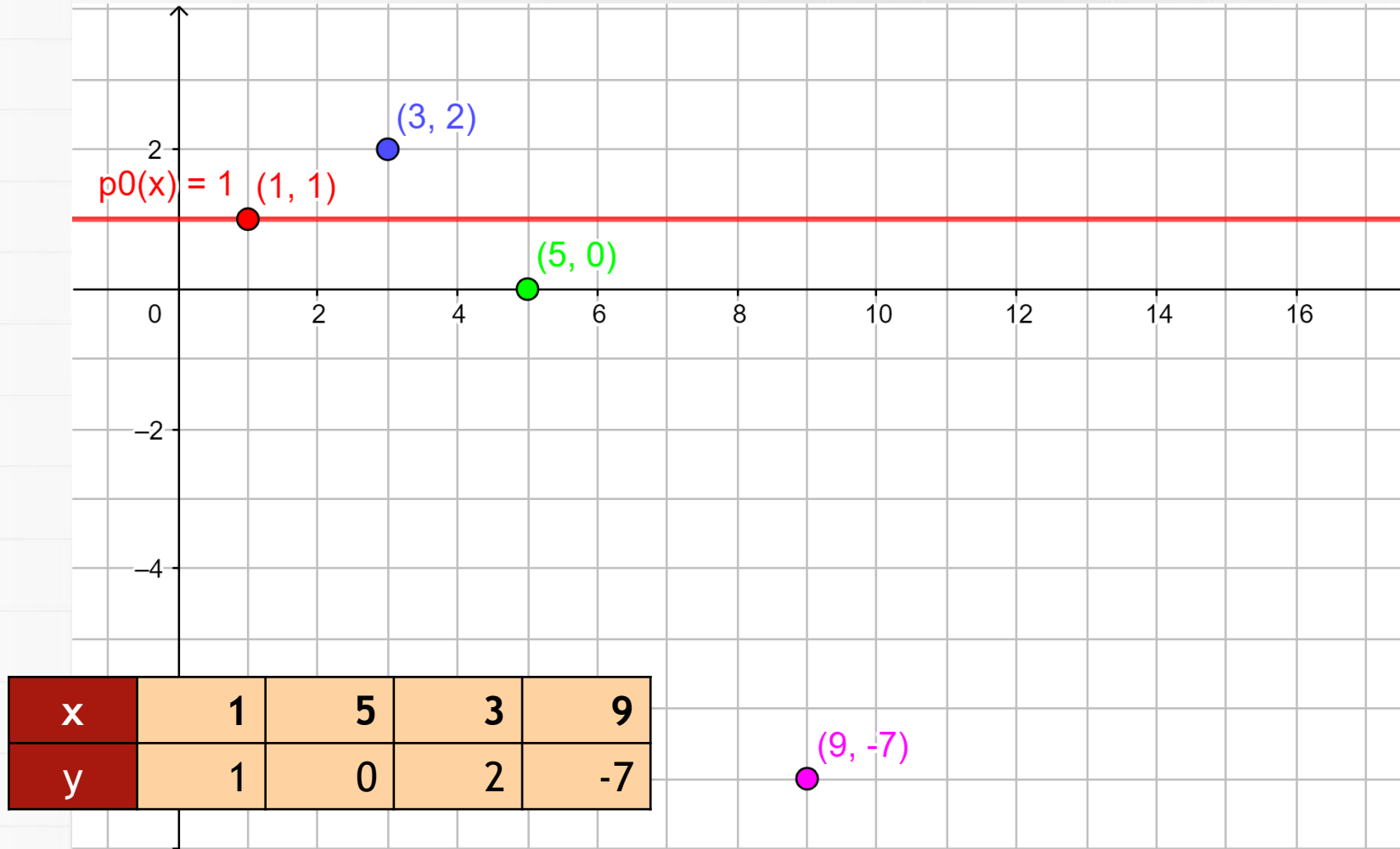
Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



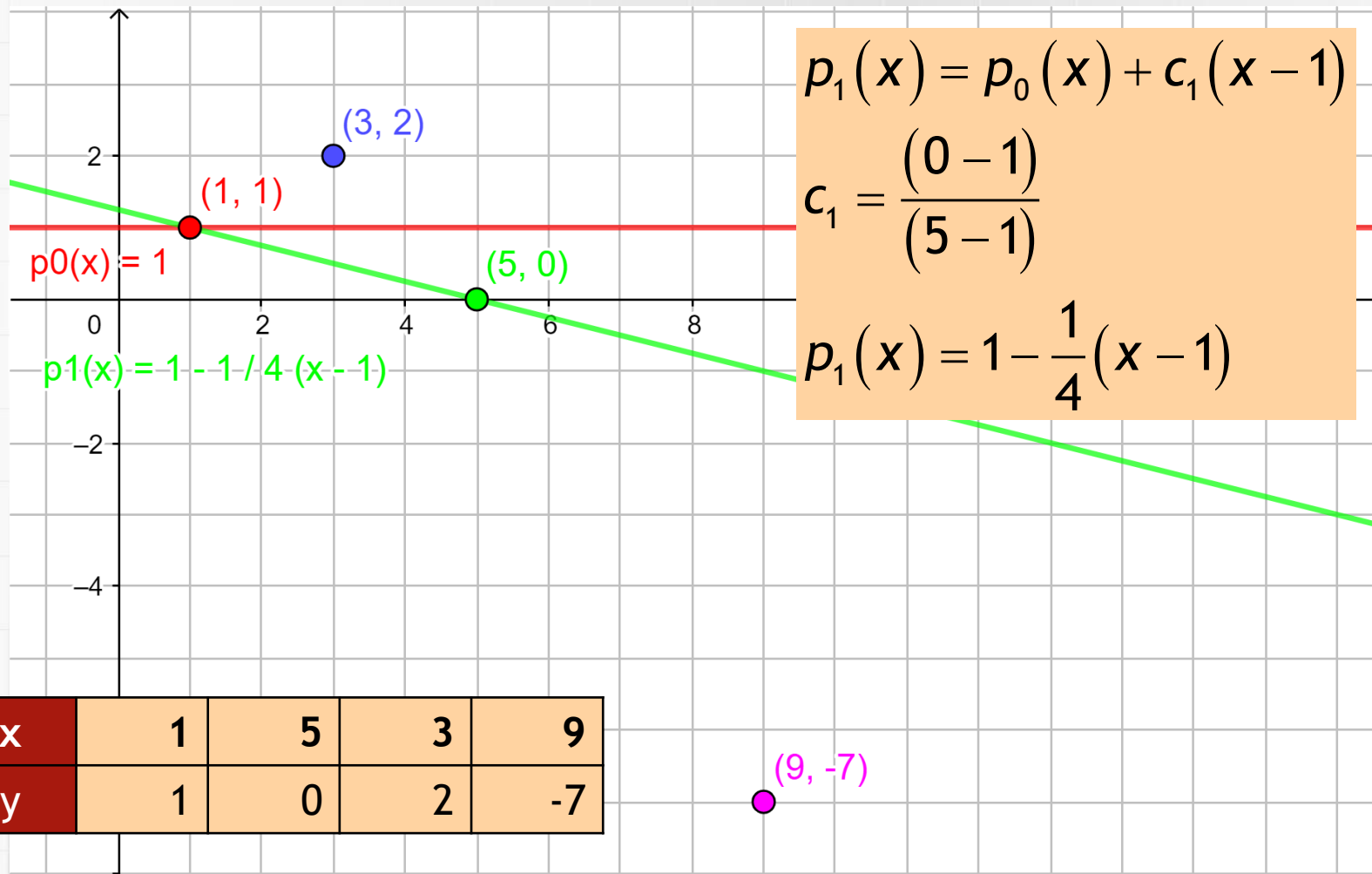
Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



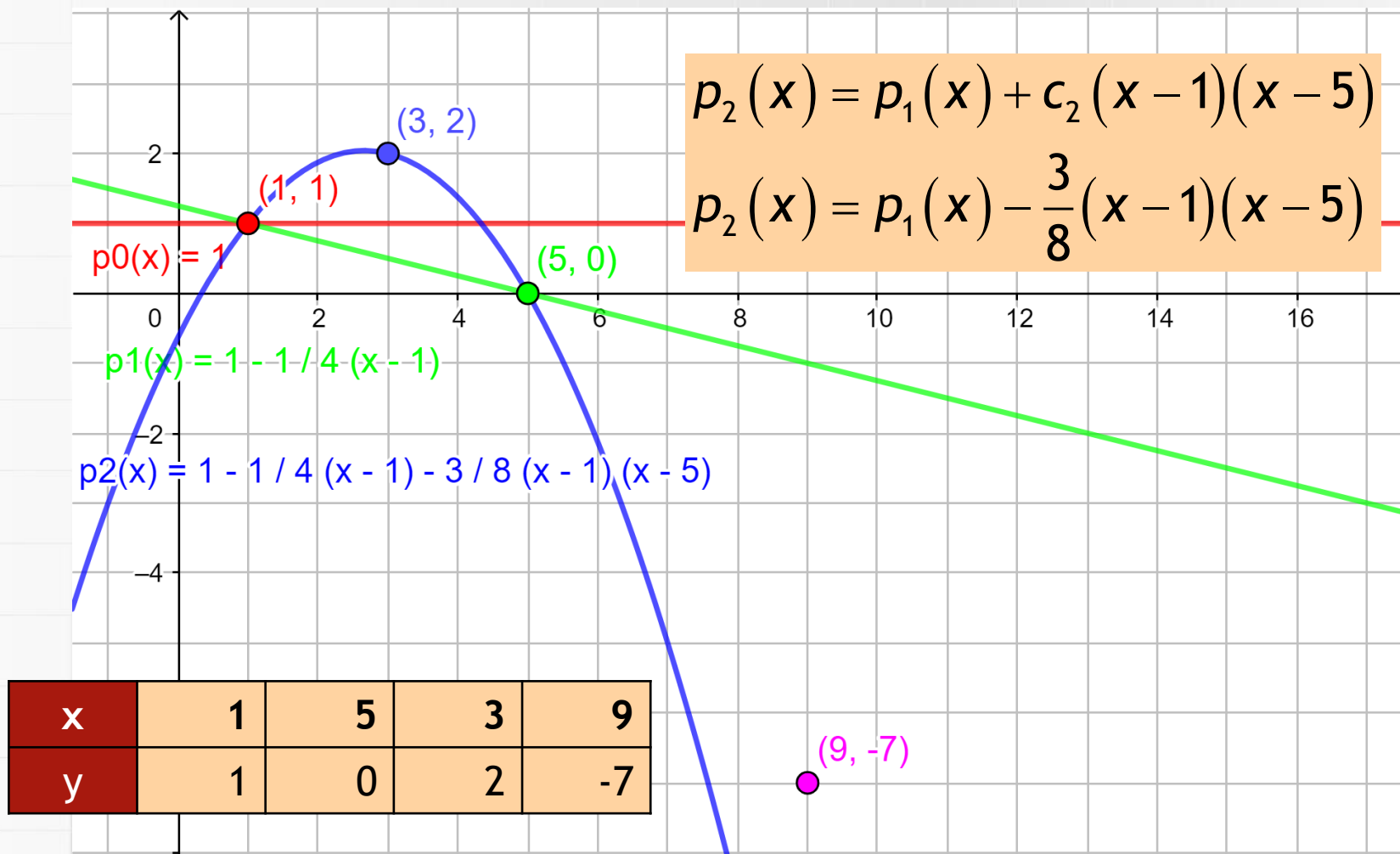
Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



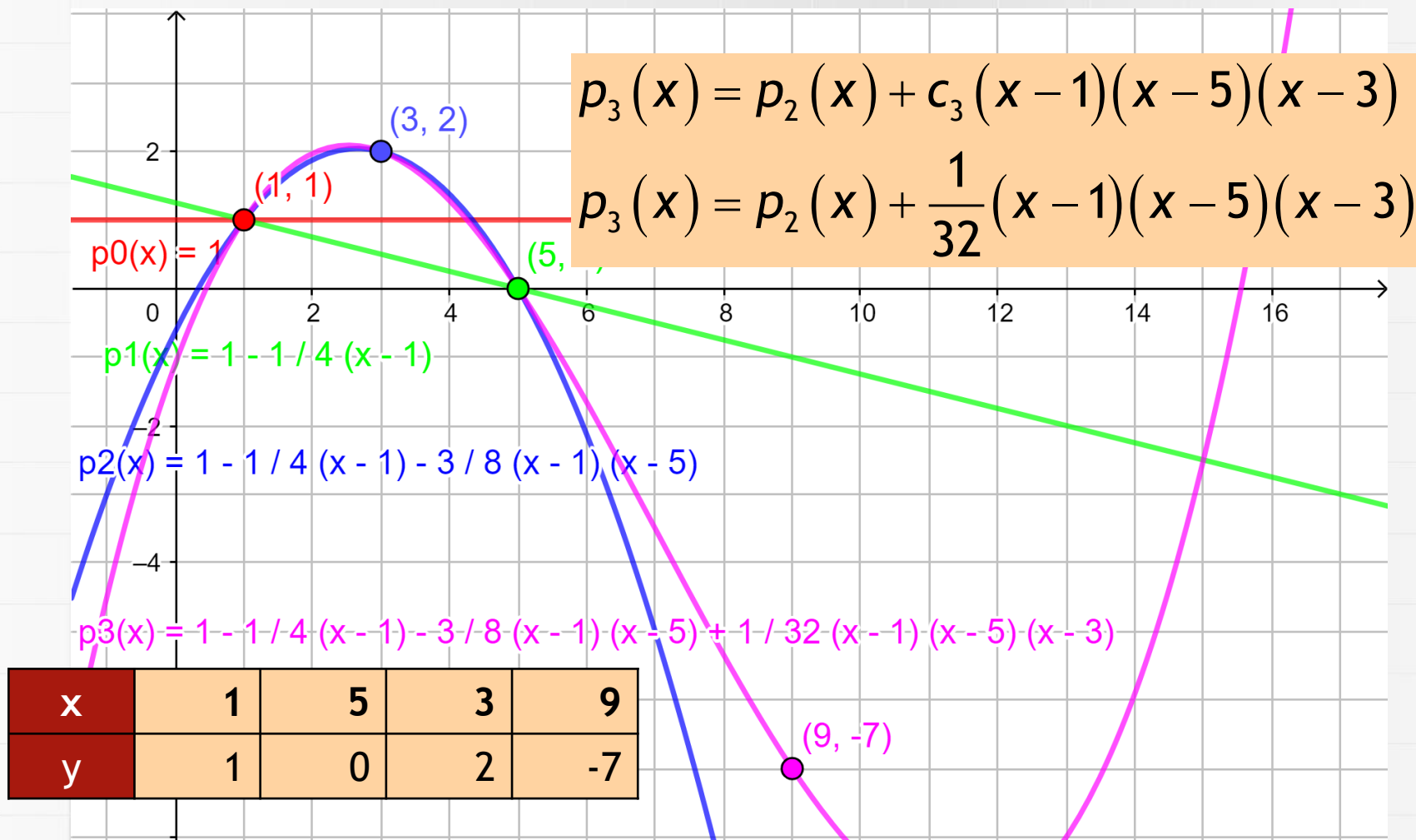
Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



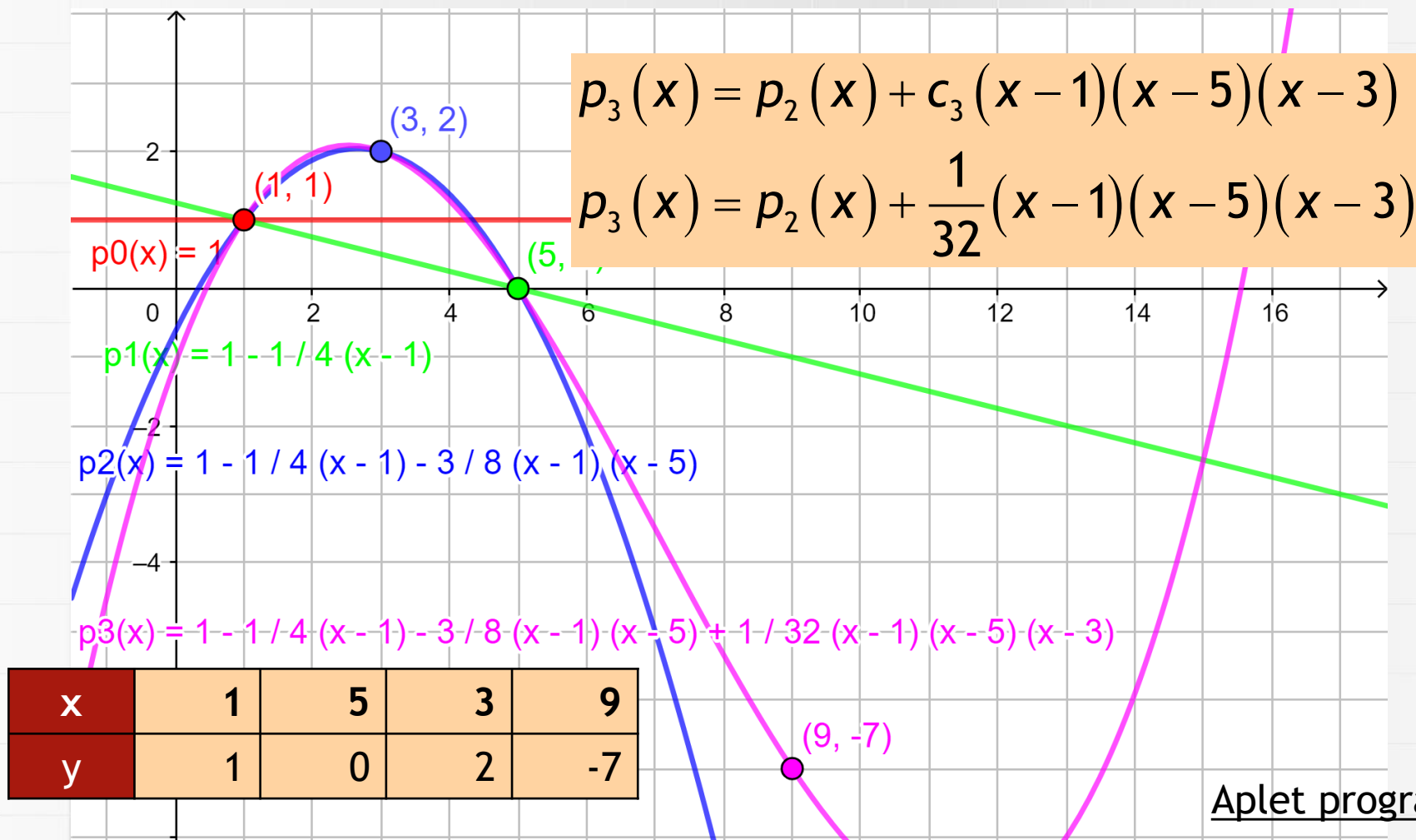
Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład

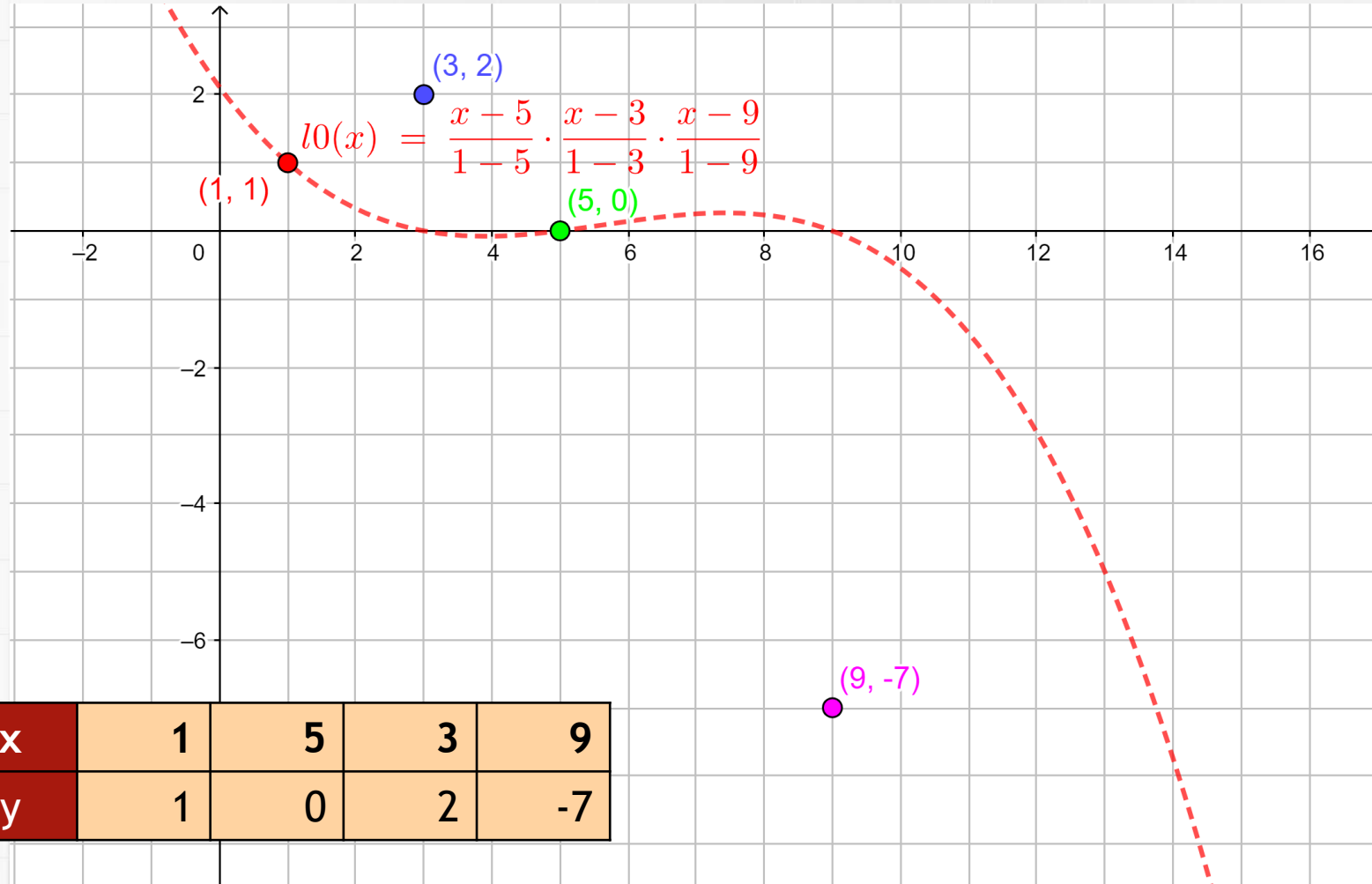


Wzór interpolacyjny Newtona

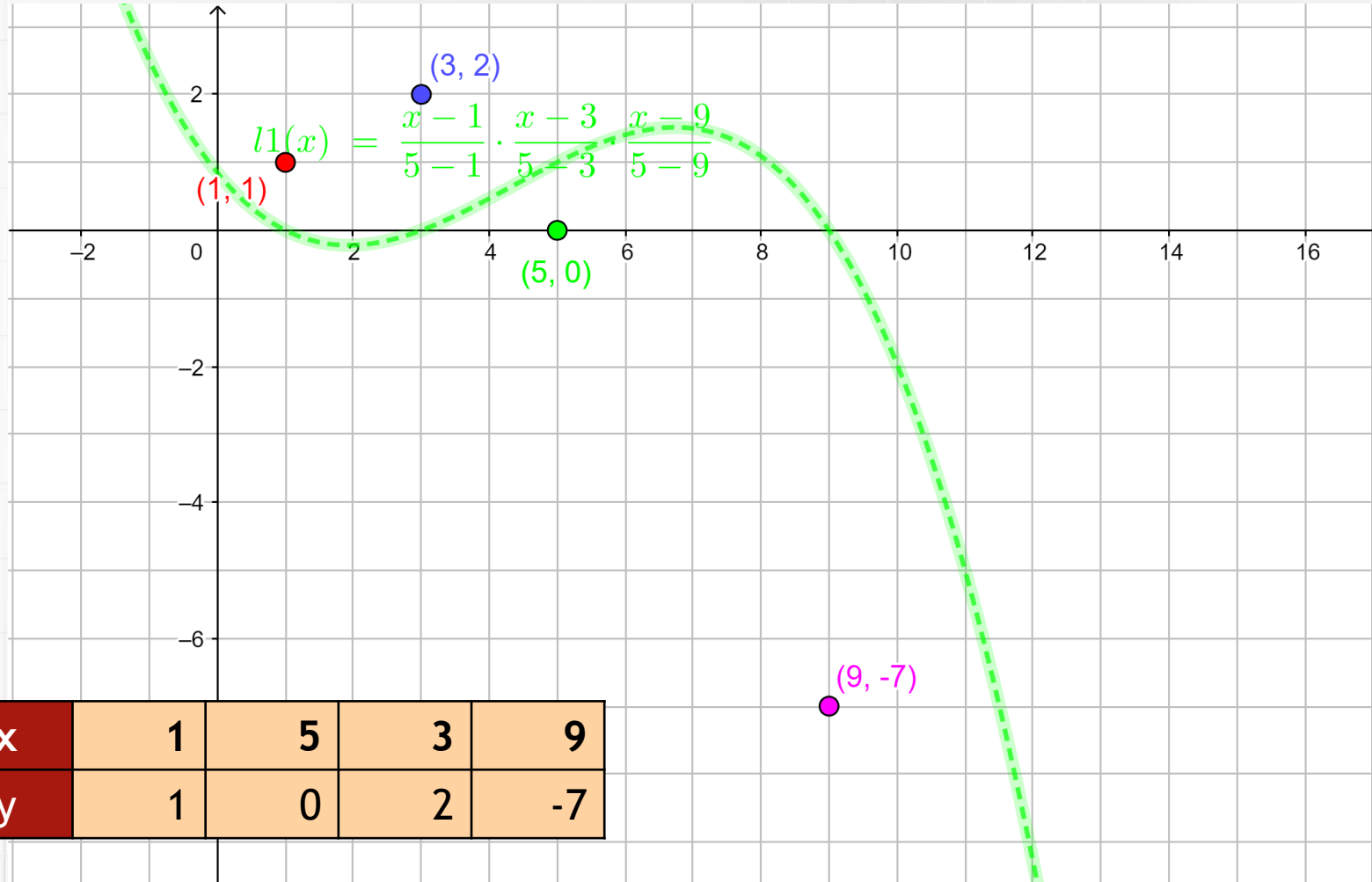
Przykład



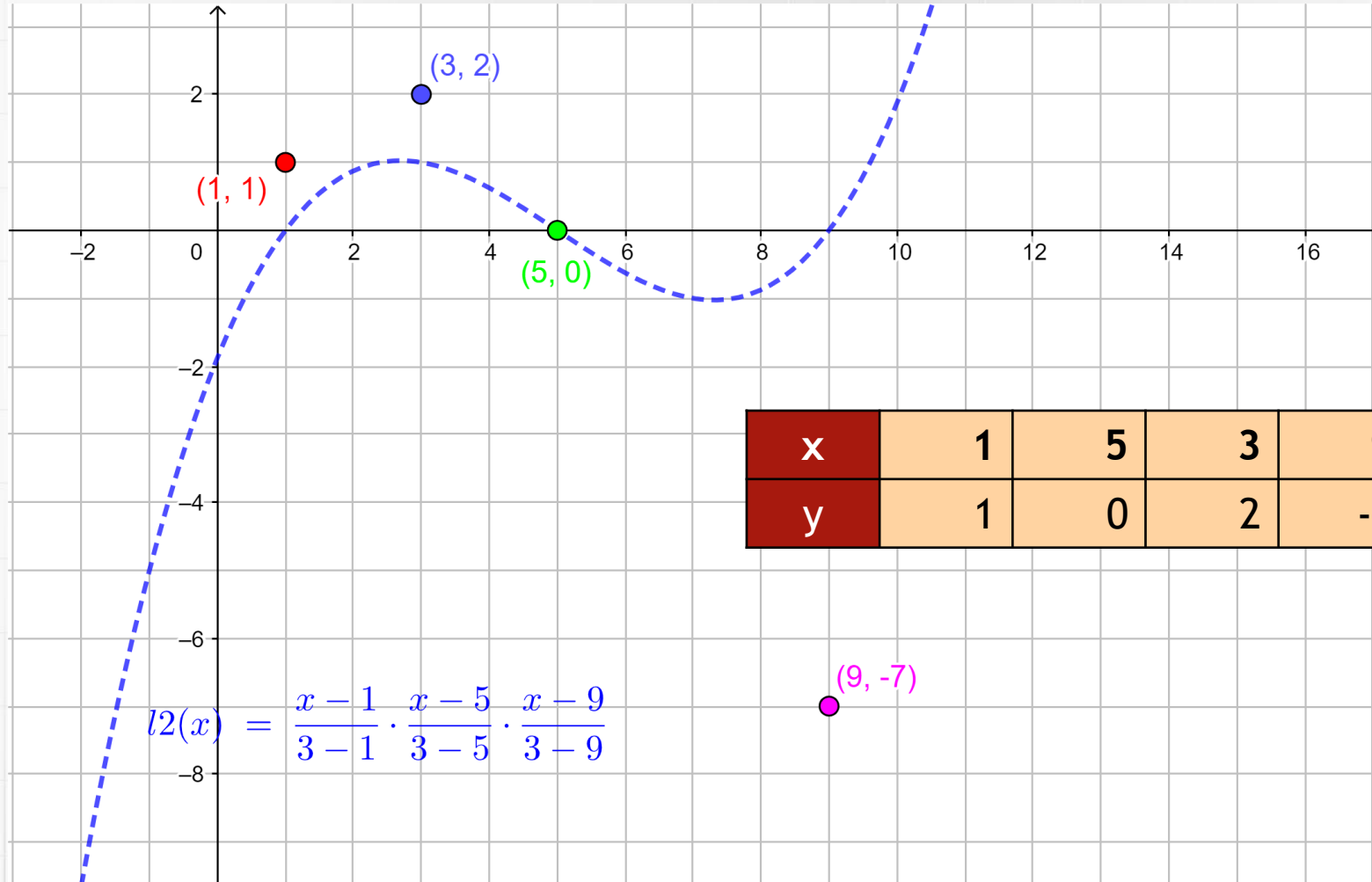
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



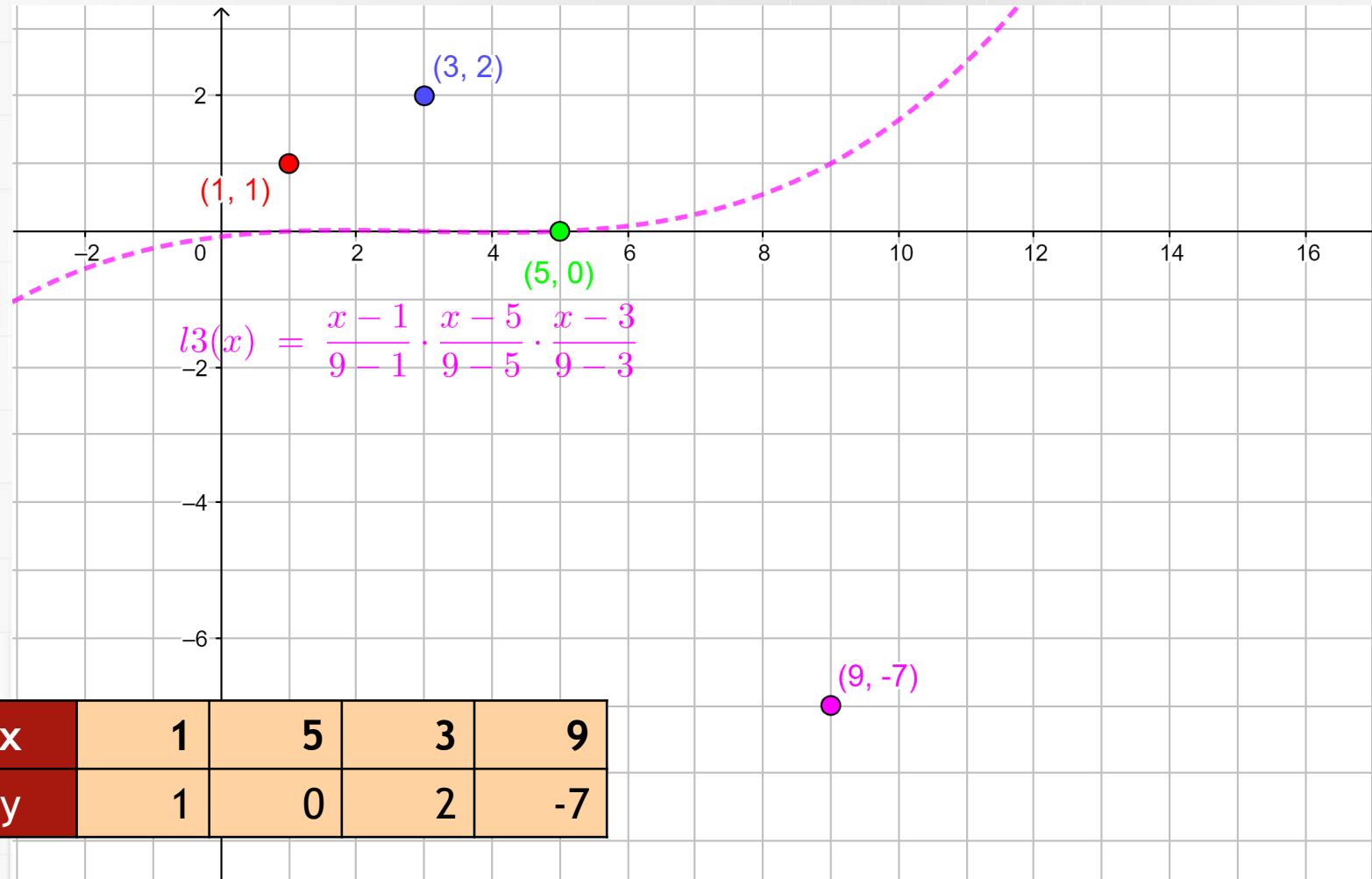
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



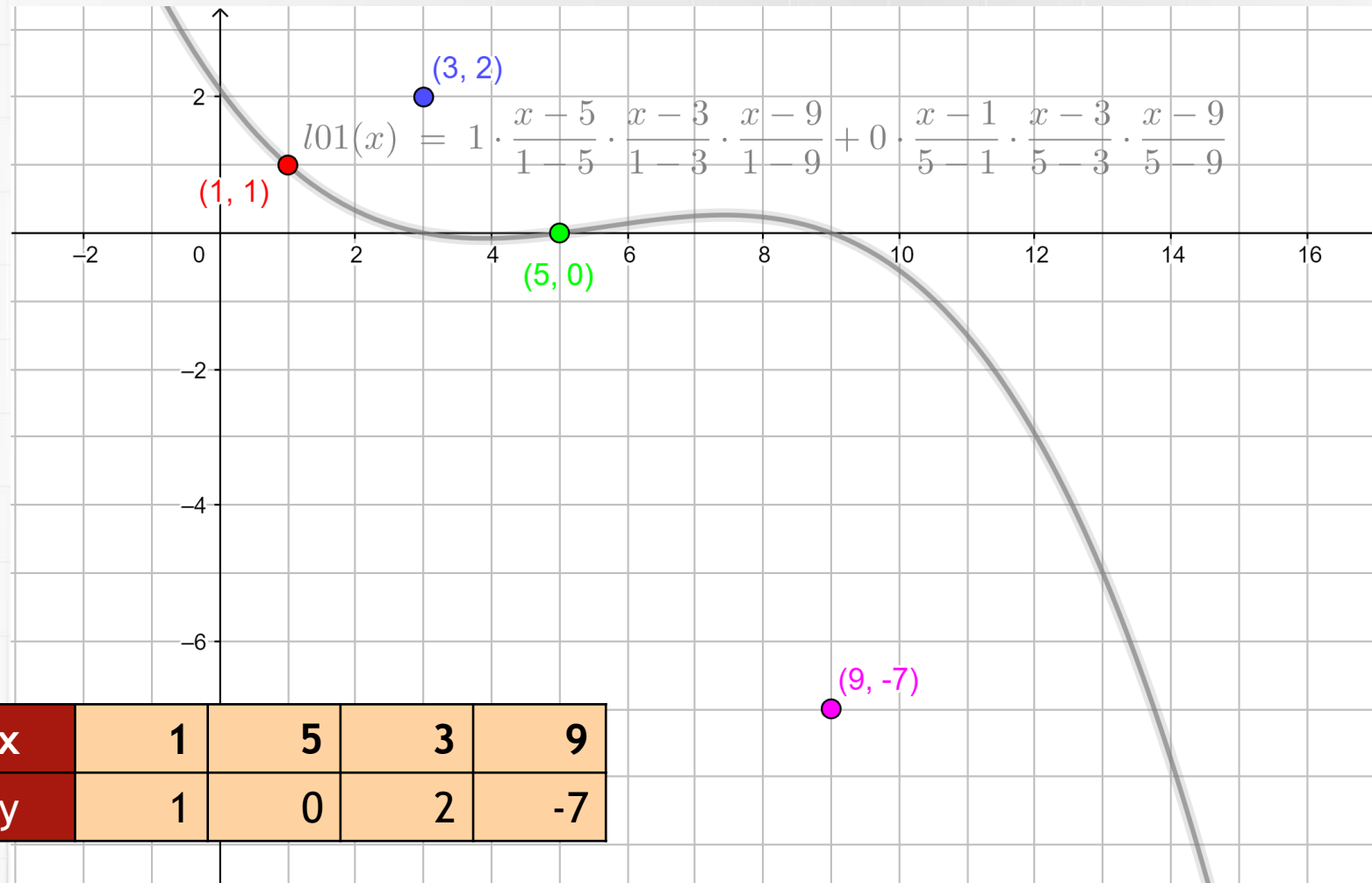
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



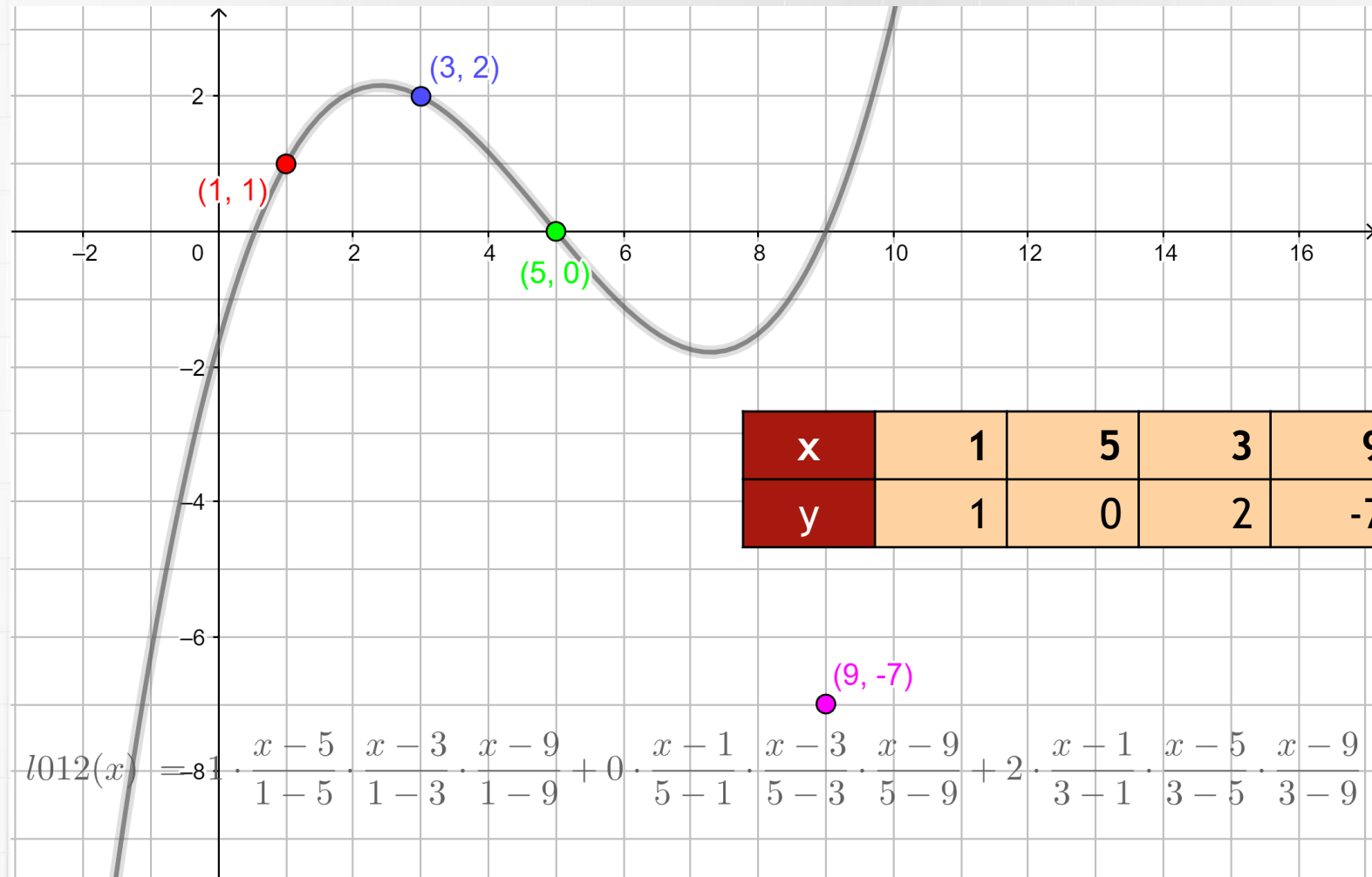
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



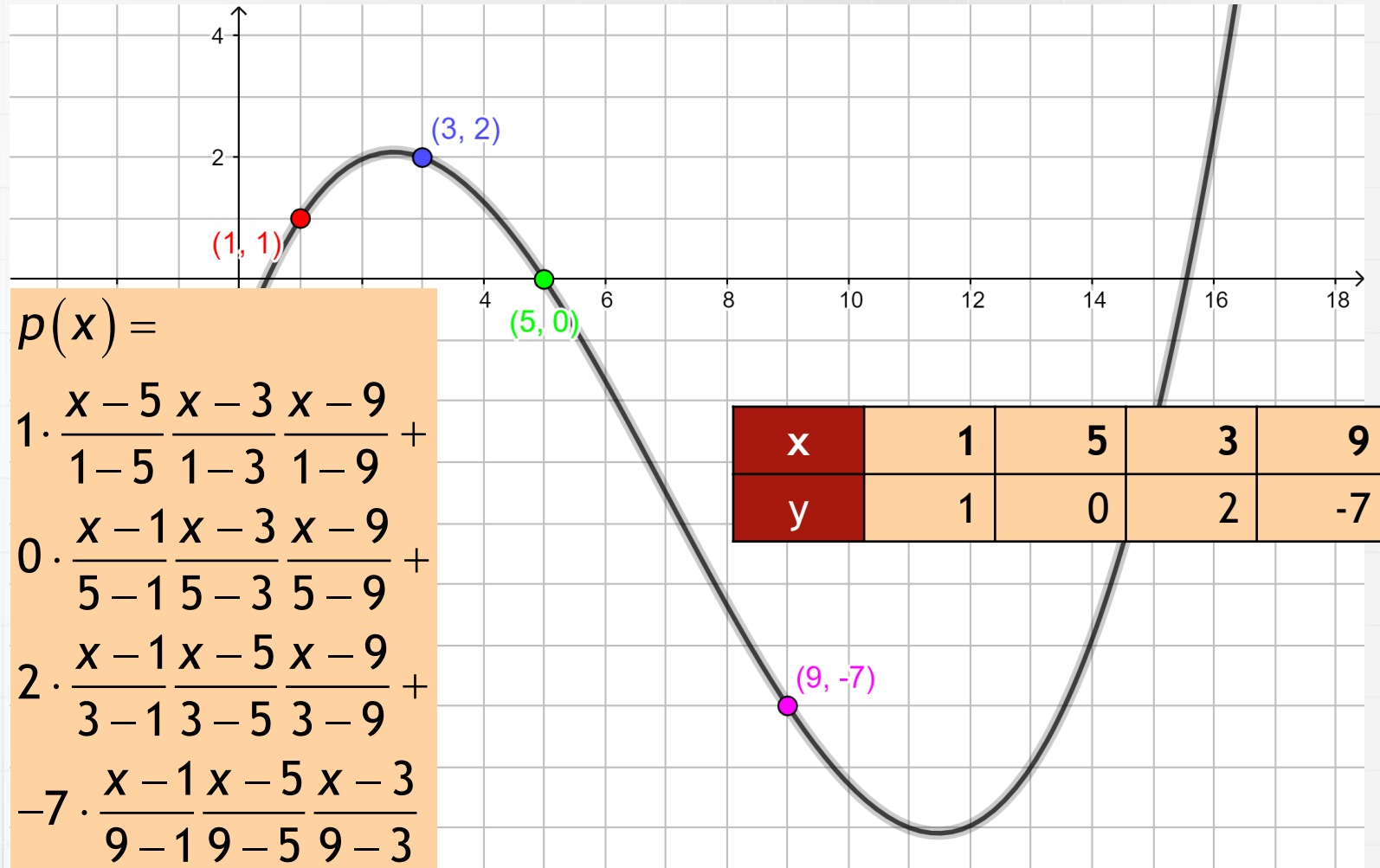
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



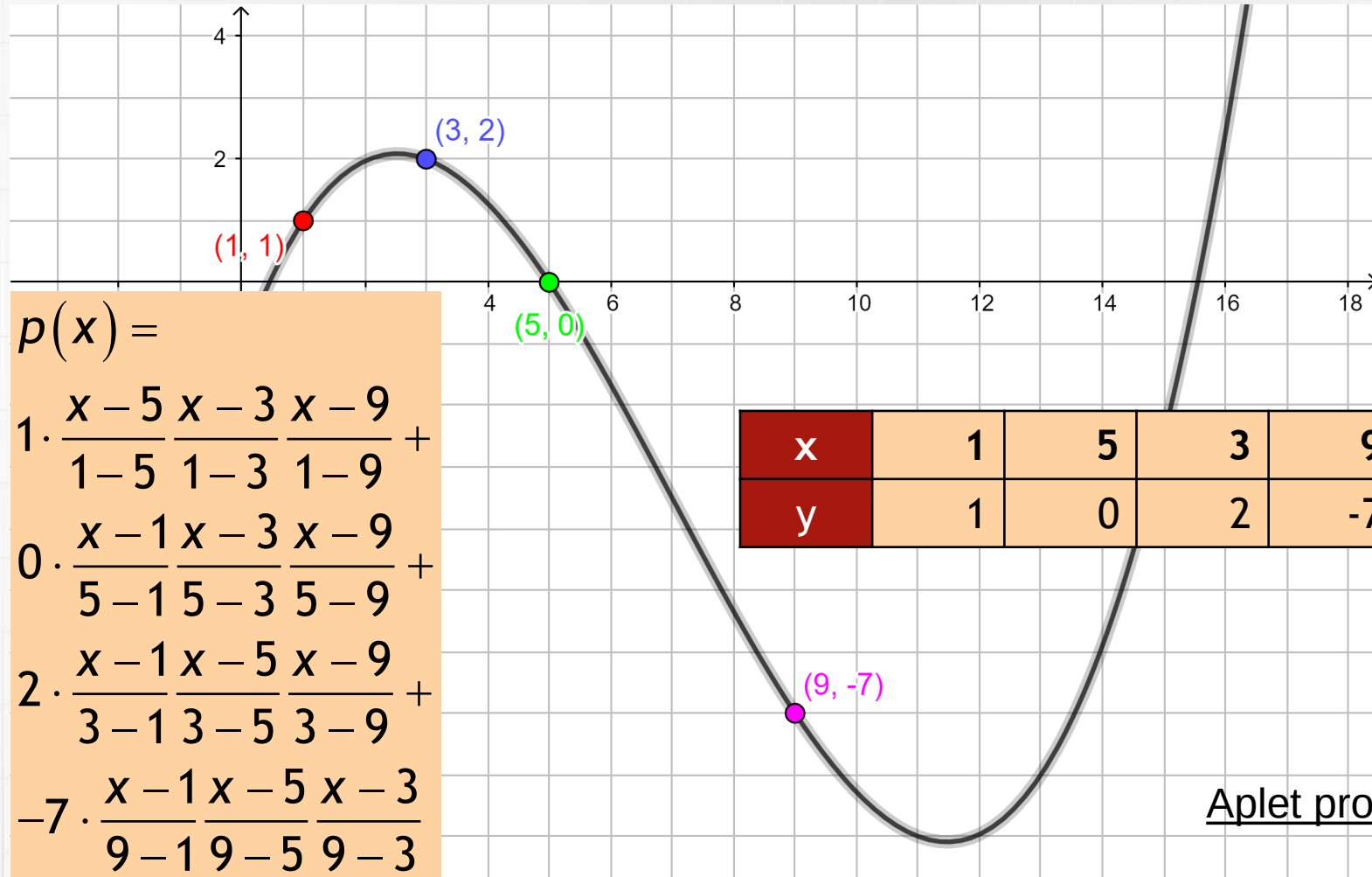
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



Wzór interpolacyjny Lagrange'a



Wzór interpolacyjny Lagrange'a



Aplet programu geogebra

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$l_i(x) = c(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

$$l_i(x) = 1$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$$

Iloraz różnicowy

Wielomian $p(x)$ klasy Π_n spełniający dla danej funkcji f warunki interpolacyjne

$$p(x_i) = f(x_i)$$

można wyrazić za pomocą wzoru Newtona:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Współczynniki c_k zależą tylko od węzłów $x_0, x_1, \dots, x_k$ i wartości funkcji w tych węzłach.

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

Jest to iloraz różnicowy rzędu k .

Iloraz różnicowy

- iloraz różnicowy rzędu zerowego

$$f[x_0] = f(x_0)$$

- iloraz różnicowy rzędu pierwszego

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Iloraz różnicowy

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$
x_3	$f[x_3]$	

Iloraz różnicowy

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$	
x_3	$f[x_3]$		

Iloraz różnicowy

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Iloraz różnicowy

- ilorazy różnicowe spełniają zależność

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Wzór interpolacyjny Newtona

Iloraz różnicowy

1	1	-1/4	-3/8	1/32
5	0	-1	-1/8	
3	2	-3/2		
9	-7			

$$p_3(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)(x-5) + \frac{1}{32}(x-1)(x-5)(x-3)$$

Interpolacja Hermite'a

Uogólnienie interpolacji Newtona

Interpolacja Hermite'a, czyli interpolacja z węzłami wielokrotnymi. Szukamy wielomianu, który w węzłach ma dane nie tylko wartości, ale i pochodne.

Interpolacja Hermite'a

Przykład

Szukamy wielomianu p klasy Π_2 takiego, że

- $p(x_0) = c_{00}$, $p'(x_0) = c_{01}$, $p(x_1) = c_{10}$.
- Tablica ilorazów różnicowych ma wtedy postać:

x_0	c_{00}	c_{01}	c_{02}
x_0	c_{00}	c_{11}	
x_1	c_{10}		

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2$$

Interpolacja Hermite'a

Przykład 2

$$p(1) = 2, p'(1) = 3, p(2) = 6, p'(2) = 7, p''(2) = 8$$

$$f[x_0, x_0, \dots, x_0] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

1	2	3	1	2	-1
1	2	4	3	1	
2	6	7	4		
2	6	7			
2	6				

$$p(x) = 2 + 3(x - 1) + (x - 1)^2 + 2(x - 1)^2(x - 2) - 1(x - 1)^2(x - 2)^2$$

Interpolacja wielomianowa

Ważne zagadnienia

- Dokładność interpolacji
- Wybór węzłów interpolacji
- Zbieżność wielomianów interpolacyjnych