



Politechnika
Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

W11OPA-SM0060G

rok akademicki 2024/25

semestr letni

Wykład 4

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221



Plan wykładu

- Normy wektorów i macierzy
- Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych
 - Metoda Richardsona
 - Metoda Jacobiego

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*

Normy wektorów i macierzy

Normy wektorów

W przestrzeni wektorowej V norma jest funkcją $\| \cdot \|$ określoną na V , o wartościach rzeczywistych nieujemnych, która ma trzy własności:

$$\begin{aligned} \|x\| &> 0 && \text{dla } x \neq 0, x \in V, \\ \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\| && \text{dla } \lambda \in R, x \in V, \\ \|x + y\| &\leq \|x\| + \|y\| && \text{dla } x, y \in V. \end{aligned}$$

Normy wektorów i macierzy

Normy wektorów

- norma euklidesowa (norma l_2)

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2},$$

- norma l_∞

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

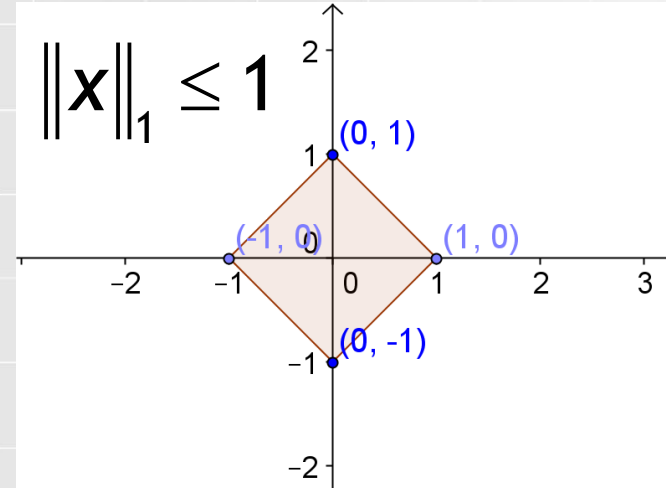
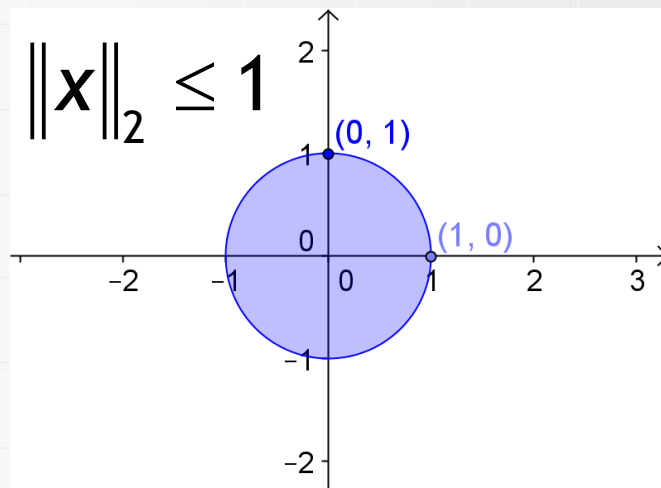
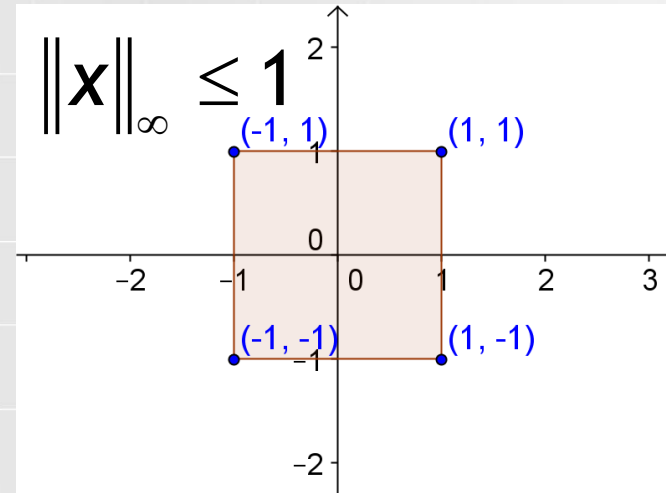
- norma l_1

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Normy wektorów i macierzy

Normy wektorów

$$\{x : x \in R^2, \|x\| \leq 1\}$$



Normy wektorów i macierzy

Normy macierzy

- Dla ustalonej normy $\| \cdot \|$ wektora indukowana przez nią norma macierzy kwadratowej A stopnia n jest określona wzorem:

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \{\|Au\| : u \in R^n\}$$

Metody iteracyjne

Przykład

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$7x_1 = 6x_2 + 3$$

$$9x_2 = 8x_1 - 4$$

$$x_1^{(k)} = \frac{6}{7} x_2^{(k-1)} + \frac{3}{7}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{8}{9} x_1^{(k-1)} - \frac{4}{9}$$

metoda Jacobiego

$$x_1^{(k)} = \frac{6}{7} x_2^{(k-1)} + \frac{3}{7}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{8}{9} x_1^{(k)} - \frac{4}{9}$$

metoda Gaussa-Seidela

Metody iteracyjne

Przykład

metoda Jacobiego

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0,00000	0,00000
10	0,14865	-0,19820
20	0,18682	-0,24909
30	0,19662	-0,26215
40	0,19913	-0,26551
50	0,19978	-0,26637

metoda Gaussa-Seidela

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0,00000	0,00000
10	0,21978	-0,24909
20	0,20130	-0,26551
30	0,20009	-0,26659
40	0,20001	-0,26666
50	0,20000	-0,26667

$$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = -\frac{4}{15}$$

Metody iteracyjne

Ogólna metoda iteracyjna

- Układ równań $Ax = b$ można wyrazić w równoważnej postaci

$$Qx = (Q - A)x + b$$

- Sugeruje to proces iteracyjny

$$Qx^{(k)} = (Q - A)x^{(k-1)} + b$$

- W procesie generowany jest ciąg $\{x^{(k)}\}$

Metody iteracyjne

Ogólna metoda iteracyjna

- Zakładając nieosobliwość Q

$$x^{(k)} = (I - Q^{-1}A)x^{(k-1)} + Q^{-1}b$$

- Rozwiązanie dokładne spełnia równanie

$$x = (I - Q^{-1}A)x + Q^{-1}b$$

- Po odjęciu stronami

$$x^{(k)} - x = (I - Q^{-1}A)(x^{(k-1)} - x)$$

Metody iteracyjne

Ogólna metoda iteracyjna

- Dla dowolnej normy wektorowej i indukowanej nią normy macierzowej

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \|I - Q^{-1}A\| \|x^{(k-1)} - x\|$$

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \|I - Q^{-1}A\|^k \|x^{(0)} - x\|$$

- Jeśli $\|I - Q^{-1}A\| < 1$ to $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x\| = 0$.

Metody iteracyjne

Metoda Richardsona

- W metodzie Richardsona $Q = I$, co daje

$$\mathbf{x}^{(k)} = (I - A) \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{r}^{(k-1)}$$

$$\mathbf{r}^{(k-1)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)}$$

- Metoda jest zbieżna dla macierzy, dla których

$$\|I - A\| < 1$$

Metody iteracyjne

Metoda Jacobiego

- W metodzie Jacobiego Q jest macierzą przekątniową taką, że $q_{ii} = a_{ii}$.
- Metoda jest zbieżna dla macierzy dominujących przekątniowo

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Podsumowanie

- Normy wektorów i macierzy
 - normy wektorowe l_1, l_2, l_∞
 - normy macierzy indukowane normami wektorowymi
- Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych
 - metoda Richardsona ($Q = I$)
 - metoda Jacobiego (Q - macierz zawierająca przekątną macierzy A)