Metody numeryczne w fizyce

W11OPA-SM0060G

rok akademicki 2024/25

semestr letni

Wykład 2

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 221

Politechnika Wrocławska

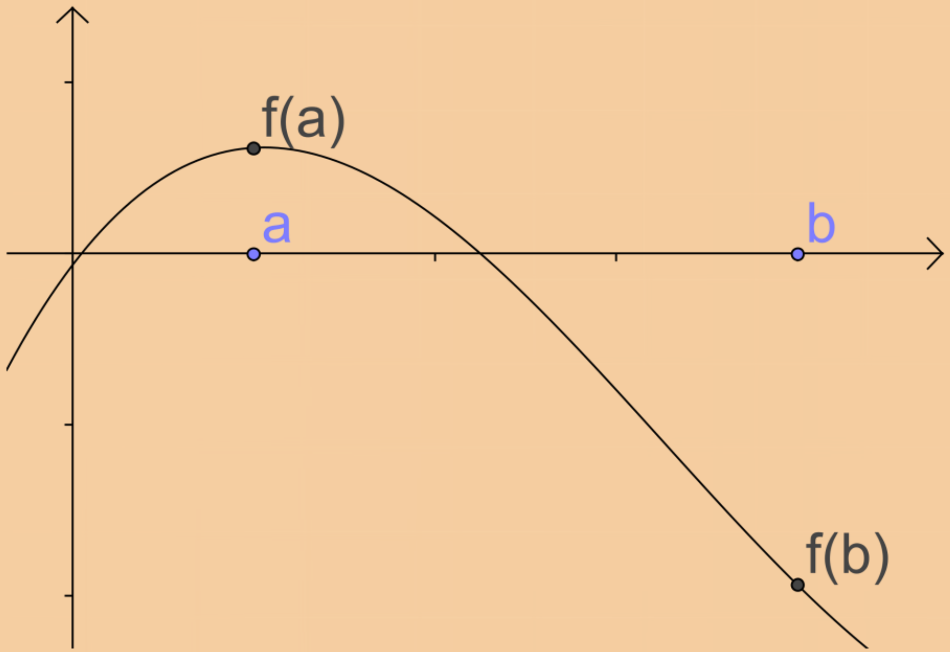
Plan prezentacji

- Metody wyznaczania miejsc zerowych
  - Metoda bisekcji
  - Metoda Newtona i metoda siecznych
- Zbieżność
- Notacja O i o

Metoda bisekcji

Twierdzenie Darboux

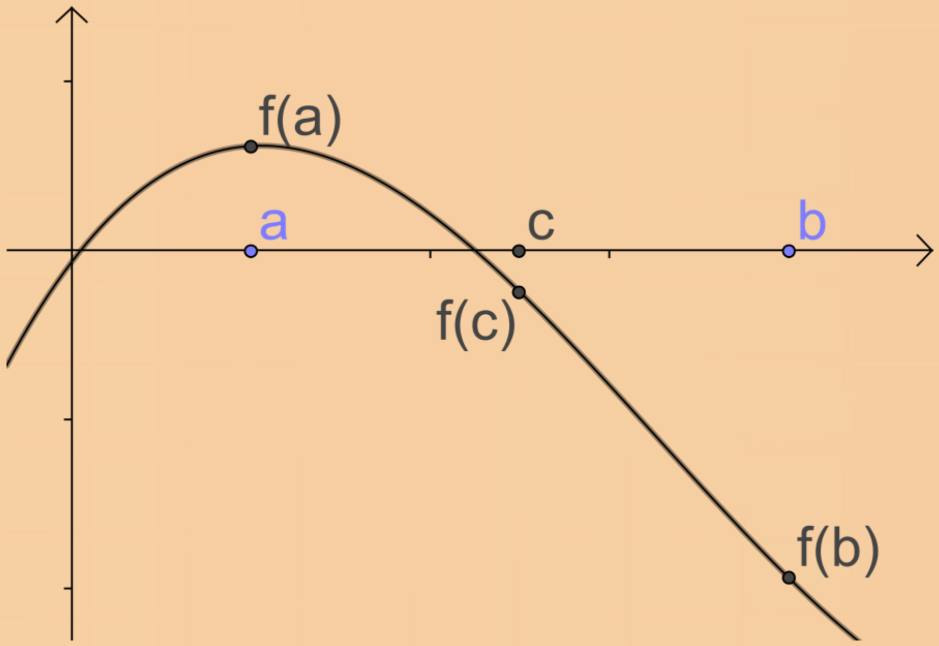
- Jeśli f jest funkcją ciągła w przedziale $[a,b]$ i jeśli $f(a)f(b)<0$, to funkcja ta musi mieć zero w (a,b).



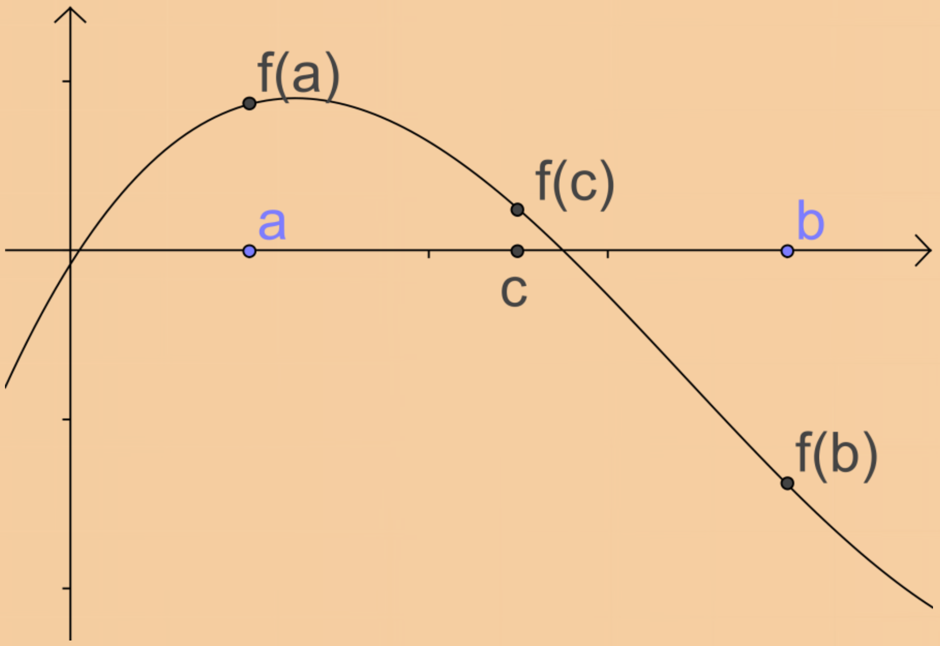
Metoda bisekcji

- Wyznaczamy punkt $c = ½(a+b)$ oraz wartość funkcji $f(c)$

jeśli $f(a)f(c)<0$ to b = c

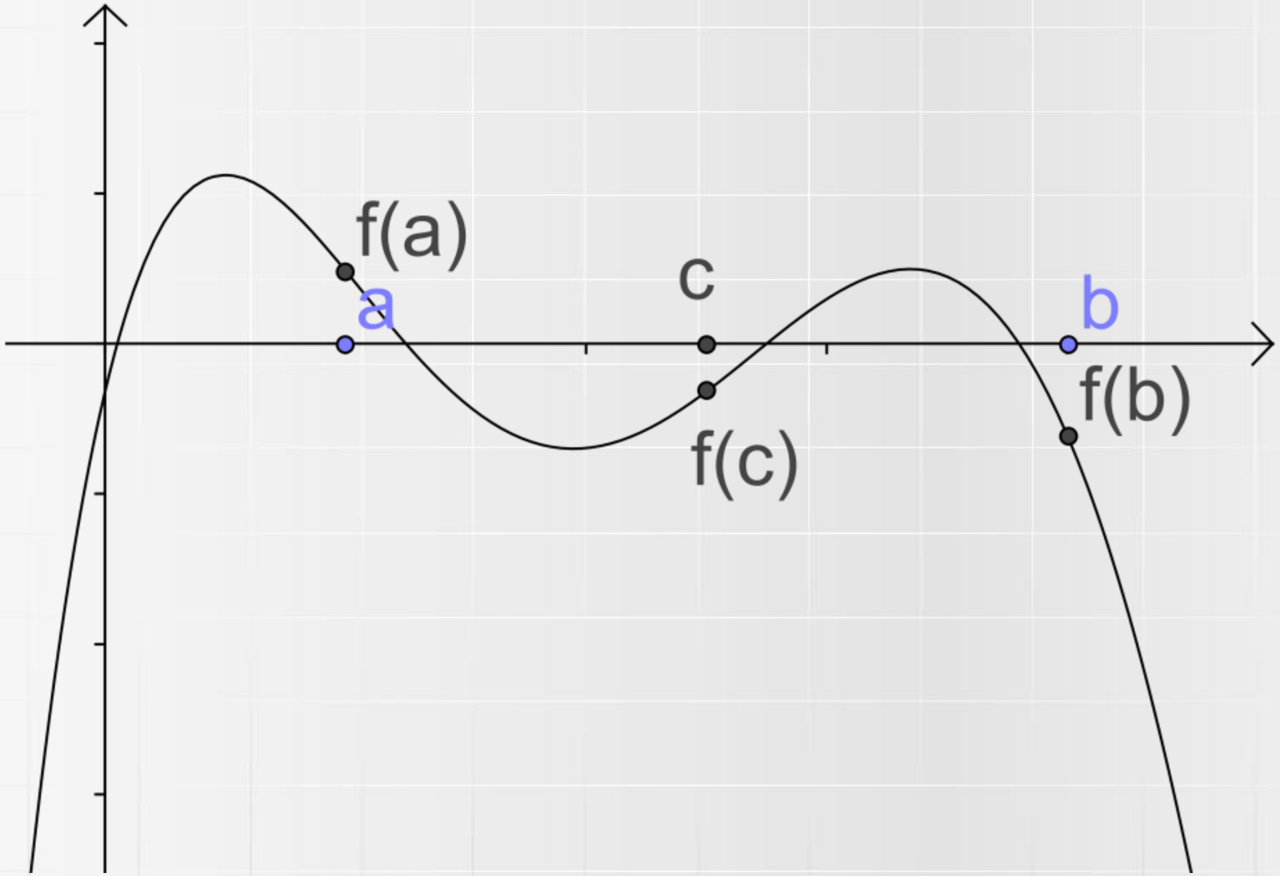


jeśli $f(b)f(c)<0$ to a = c



Metoda bisekcji

jeśli $f(a)f(c)<0$ to $b = c$



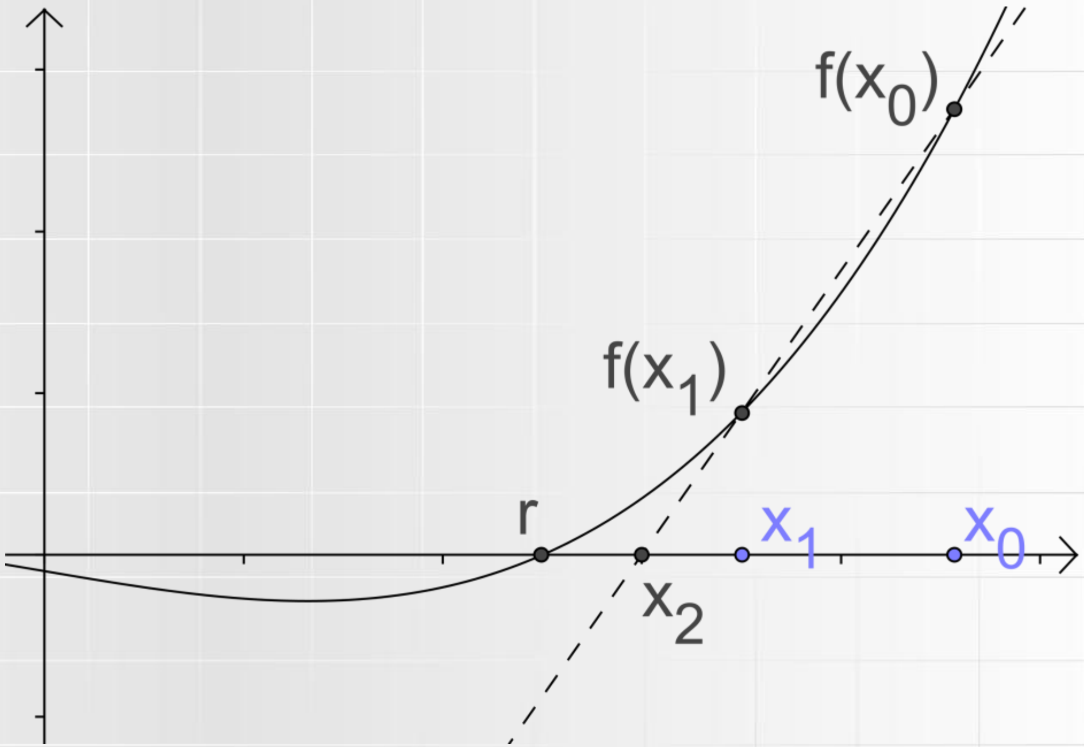
Metoda bisekcji

Kryteria zakończenia:

- przekroczenie maksymalnej liczby kroków,
- zadowalająco mały błąd,
- zadowalająco mała wartość funkcji.

Metoda siecznych

$$x_{n+1} = x_n - f\left(x_n\right)\frac{x_n - x_{n-1}}{f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)}$$

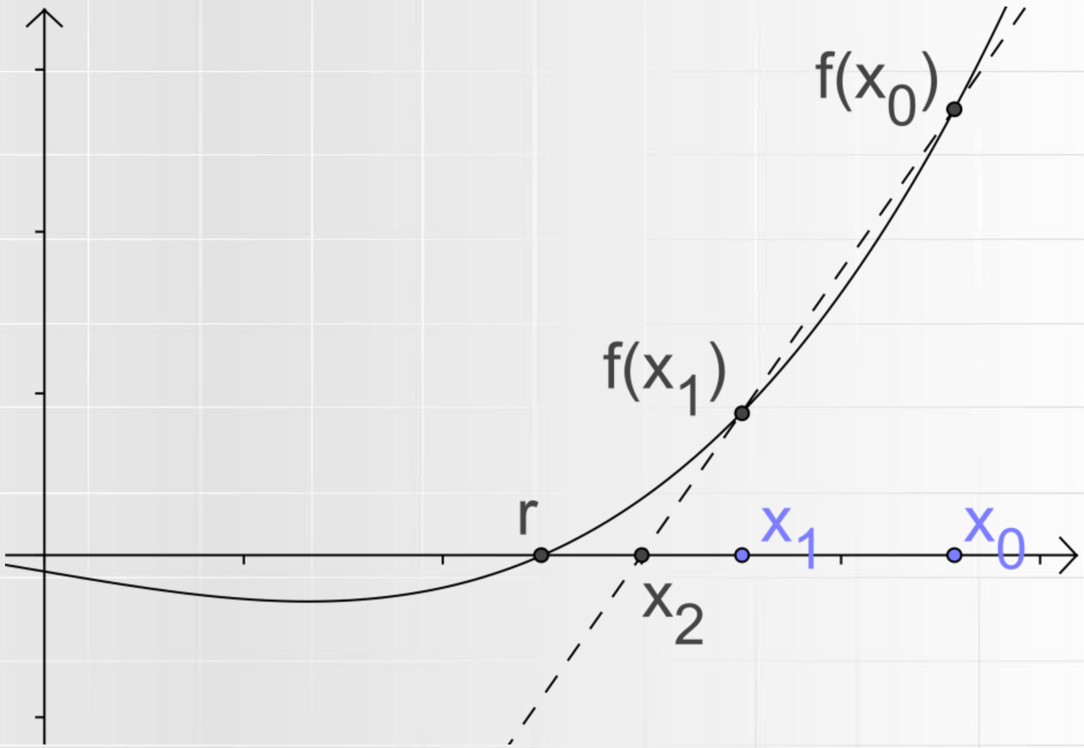


Politechnika Wrocławska

Metoda Newtona

$$x_{n+1} = x_n - f\left(x_n\right)\frac{x_n - x_{n-1}}{f\left(x_n\right) - f\left(x_{n-1}\right)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$$



Zbieżność

W wielu przypadkach program komputerowy generuje ciąg przybliżeń rozwiązania. Zbieżność określa jak szybko uzyskamy dostatecznie dobre przybliżenie.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = e \approx 2{,}718281828$$

$$x_1 = 2{,}00000\ 0$$

$$x_2 = 2{,}25000\ 0$$

$$x_5 = 2{,}48832\ 0$$

$$x_{10} = 2{,}59374\ 2$$

$$x_{100} = 2{,}70481\ 4$$

$$x_{1000} = 2{,}71692\ 4$$

Politechnika Wrocławska

Zbieżność

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_n + 1}{x_{n-1} + x_n}, x_0 = 0, x_1 = 2$$

$x_0 = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = 0{,}5$

$x_3 = 0{,}8$

$x_4 = 1{,}076923077$

$x_5 = 0{,}991803278$

$x_6 = 0{,}999695214873514$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}, x_1 = 2$$

$x_1 = 2$

$x_2 = 1{,}5$

$x_3 = 1{,}416667$

$x_4 = 1{,}414216$

$\sqrt{2} = 1{,}414213$

Politechnika Wrocławska

Rząd zbieżności

Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do x^*.

Zbieżność jest co najmniej *liniowa*, jeśli istnieją stała $c < 1$ i liczba całkowita N takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*| \ \ (n \geq N)$$

Zbieżność jest co najmniej *nadliniowa*, jeśli istnieje ciąg zbieżny do 0 $\{\varepsilon_n\}$ i liczba całkowita N takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \varepsilon_n|x_n - x^*| \ \ (n \geq N)$$

Rząd zbieżności

Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do x^*.

Zbieżność jest co najmniej *kwadratowa*, jeśli istnieją stała dodatnia *C* i liczba całkowita *N* takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2 \quad (n \geq N)$$

Zbieżność jest co najmniej *rzędu α,* jeśli istnieją stała dodatnia C, stała *α*>1 i liczba całkowita *N* takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^\alpha \quad (n \geq N)$$

Notacja O i o

Niech $\{x_n\}$ i $\{\alpha_n\}$ będą dwoma różnymi ciągami.

$$x_n = O(\alpha_n)$$

jeśli istnieją takie stałe C i n_0, że $|x_n| \leq C|\alpha_n|$ dla każdego $n \geq n_0$.

$$x_n = o(\alpha_n)$$

jeśli $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{\alpha_n}\right) = 0$. Istnieje ciąg liczb nieujemnych zbieżny do 0 taki, że $|x_n| \leq \varepsilon_n|\alpha_n|$.

Notacja O i o

Jeśli $x_n \to 0, \alpha_n \to 0$ oraz $x_n = O(\alpha_n)$ to ciąg $\{x_n\}$ dąży do 0 *co najmniej tak szybko* jak $\{\alpha_n\}$.

Jeśli $x_n \to 0, \alpha_n \to 0$ oraz $x_n = o(\alpha_n)$ to ciąg $\{x_n\}$ dąży do 0 szybciej niż $\{\alpha_n\}$.

$$\frac{n+1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \frac{5}{n} + e^{-n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n \ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right) \qquad e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Notacja *O* i *o*

Notacji tej używa się nie tylko dla ciągów.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O\left(x^5\right) \quad (x \to 0)$$

Istnieją otoczenie punktu 0 i stała C takie, że w tym otoczeniu

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \le C\left|x^5\right|.$$

$$f(x) = O\left(g(x)\right) \ (x \to \infty).$$

Istnieją takie stałe r i C, że $|f(x)| \le C|g(x)|$ dla każdego $x \ge r$.

$$\sqrt{x^2+1} = O(x) \ (x \to \infty)$$

Notacja O i o

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \ (x \to x^*)$$

jeśli istnieją takie stałe C i otoczenie punktu x^* takie, że w tym otoczeniu

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Podobnie

$$f(x) = o\big(g(x)\big) \ (x \to x^*)$$

jeśli
$$\lim_{x \to x^*} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$$

Podsumowanie

- Metody wyznaczania miejsc zerowych
  - Metoda bisekcji
  - Metoda Newtona i metoda siecznych
- Zbieżność
- Notacja O i o