

Ćwiczenia – lista 9

Zagadnienie początkowe

1. Drgania podłużne dwustronnie umocowanego sprężystego pręta są opisane przez następujące zagadnienie brzegowe:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -k^2 u, \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Pokaż, że rozwiązaniami tego zagadnienia są następujące funkcje i wartości własne:

$$u_n(x) = \sqrt{2} \sin(k_n x), \\ k_n^2 = (n\pi)^2.$$

2. Wykorzystując metodę różnic skończonych, sprowadź zagadnienie brzegowe z poprzedniego zadania do algebraicznego zagadnienia własnego.

$$\mathbf{B}u = \lambda u,$$

gdzie $\mathbf{B}$ jest macierzą $n \times n$, u jest wektorem własnym, a λ jest wartością własną.

3. Pokaż, że wartości i wektory własne macierzy trójkątnej $\mathbf{B}_{n \times n}$ postaci:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

wyrażają się następująco:

$$\mu_k = 4 \left[\sin \frac{k\pi}{2(n+1)} \right]^2, \\ \varphi_{i,k} = \sin \frac{ik\pi}{n+1}.$$