

# Zjawiska nieliniowe w światłowodach

## W110PA-SM0050W (FTP003030W)

### rok akademicki 2023/24

### semestr zimowy

## Wykład 6

**Karol Tarnowski**

[karol.tarnowski@pwr.edu.pl](mailto:karol.tarnowski@pwr.edu.pl)

**L-1 p. 220**

# Plan wykładu

## Oddziaływanie dwóch fal

- wzajemna modulacja fazy
- generacja nowych częstotliwości

## Oddziaływanie czterech fal

## Opis teoretyczny

## Warunek dopasowania fazowego

## Przykłady



# Wzajemna modulacja fazy

Polaryzacja nieliniowa w obecności dwóch fal

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left[ E_1 \exp(-i\omega_1 t) + E_2 \exp(-i\omega_2 t) \right] + \text{c.c.}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left[ E_1 \exp(-i\omega_1 t) + E_2 \exp(-i\omega_2 t) + E_1^* \exp(+i\omega_1 t) + E_2^* \exp(+i\omega_2 t) \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \{ & P_{\text{NL}}(\omega_1) \exp[-i\omega_1 t] + P_{\text{NL}}(\omega_2) \exp[-i\omega_2 t] + \\ & + P_{\text{NL}}(2\omega_1 - \omega_2) \exp[-i(2\omega_1 - \omega_2)t] + P_{\text{NL}}(2\omega_2 - \omega_1) \exp[-i(2\omega_2 - \omega_1)t] \} + \text{c.c.} \end{aligned}$$



# Wzajemna modulacja fazy

Polaryzacja nieliniowa w obecności dwóch fal

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left\{ \mathbf{P}_{\text{NL}}(\omega_1) \exp[-i\omega_1 t] + \mathbf{P}_{\text{NL}}(\omega_2) \exp[-i\omega_2 t] + \right. \\ \left. + \mathbf{P}_{\text{NL}}(2\omega_1 - \omega_2) \exp[-i(2\omega_1 - \omega_2)t] + \mathbf{P}_{\text{NL}}(2\omega_2 - \omega_1) \exp[-i(2\omega_2 - \omega_1)t] \right\} + \text{c.c.}$$

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\omega_1) = \chi_{\text{eff}} \left( |\mathbf{E}_1|^2 + 2|\mathbf{E}_2|^2 \right) \mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\omega_2) = \chi_{\text{eff}} \left( |\mathbf{E}_2|^2 + 2|\mathbf{E}_1|^2 \right) \mathbf{E}_2$$

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(2\omega_1 - \omega_2) = \chi_{\text{eff}} \mathbf{E}_1^2 \mathbf{E}_2^*$$

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(2\omega_2 - \omega_1) = \chi_{\text{eff}} \mathbf{E}_2^2 \mathbf{E}_1^*$$

$$\chi_{\text{eff}} = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{\text{xxxx}}^{(3)}$$

# Mieszanie czterech fal

Polaryzacja nieliniowa w obecności czterech fal

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^4 E_j \exp \left[ i(\beta_j z - \omega t) \right] + \text{c.c.}$$

$$\mathbf{P}_{\text{NL}} = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \sum_{j=1}^4 P_j \exp \left[ i(\beta_j z - \omega t) \right] + \text{c.c.}$$

# Mieszanie czterech fal

Polaryzacja nieliniowa w obecności czterech fal

$$\mathbf{P}_{\text{NL}} = \frac{1}{2} \hat{\chi} \sum_{j=1}^4 P_j \exp \left[ i \left( \beta_j z - \omega t \right) \right] + \text{c.c.}$$

$$P_4 = \chi_{\text{eff}} \left[ |E_4|^2 E_4 + 2 \left( |E_1|^2 + |E_2|^2 + |E_3|^2 \right) E_4 + \right. \\ \left. + 2E_1 E_2 E_3 \exp(i\theta_+) + 2E_1 E_2 E_3^* \exp(i\theta_-) + \dots \right]$$

$$\theta_+ = \left( \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \beta_4 \right) z - \left( \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 \right) t$$

$$\theta_- = \left( \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4 \right) z - \left( \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 \right) t$$

# Mieszanie czterech fal

Warunek dopasowania fazowego

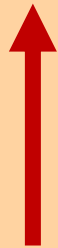
$$\theta_- = (\beta_1 + \beta_2 - \beta_3 - \beta_4)z - (\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)t$$

$$\Delta k = \beta_3 + \beta_4 - \beta_1 - \beta_2 = \left( \frac{n_3 \omega_3}{c} + \frac{n_4 \omega_4}{c} - \frac{n_1 \omega_1}{c} - \frac{n_2 \omega_2}{c} \right)$$

# Mieszanie czterech fal

## Zdegenerowany FWM

$$\Omega_s = \omega_1 - \omega_3 = \omega_4 - \omega_1, \quad \omega_3 < \omega_4$$



$\omega_3$



$\omega_1$



$\omega_4$





# Mieszanie czterech fal

Układ sprzężonych nieliniowych równań Schrödingera

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{in_2\omega_1}{c} \left[ \left( f_{11}|A_1|^2 + 2\sum_{k \neq 1} f_{1k}|A_k|^2 \right) A_1 + 2f_{1234} A_2^* A_3 A_4 \exp(+i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{in_2\omega_2}{c} \left[ \left( f_{22}|A_2|^2 + 2\sum_{k \neq 2} f_{2k}|A_k|^2 \right) A_2 + 2f_{2134} A_1^* A_3 A_4 \exp(+i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{in_2\omega_3}{c} \left[ \left( f_{33}|A_3|^2 + 2\sum_{k \neq 3} f_{3k}|A_k|^2 \right) A_3 + 2f_{3412} A_1 A_2 A_4^* \exp(-i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_4}{dz} = \frac{in_2\omega_4}{c} \left[ \left( f_{44}|A_4|^2 + 2\sum_{k \neq 4} f_{4k}|A_k|^2 \right) A_4 + 2f_{4312} A_1 A_2 A_3^* \exp(-i\Delta kz) \right]$$

# Mieszanie czterech fal

Układ sprzężonych nieliniowych równań Schrödingera

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{in_2\omega_1}{c} \left[ \left( f_{11}|A_1|^2 + 2\sum_{k \neq 1} f_{1k}|A_k|^2 \right) A_1 + 2f_{1234} A_2^* A_3 A_4 \exp(+i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{in_2\omega_2}{c} \left[ \left( f_{22}|A_2|^2 + 2\sum_{k \neq 2} f_{2k}|A_k|^2 \right) A_2 + 2f_{2134} A_1^* A_3 A_4 \exp(+i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{in_2\omega_3}{c} \left[ \left( f_{33}|A_3|^2 + 2\sum_{k \neq 3} f_{3k}|A_k|^2 \right) A_3 + 2f_{3412} A_1 A_2 A_4^* \exp(-i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_4}{dz} = \frac{in_2\omega_4}{c} \left[ \left( f_{44}|A_4|^2 + 2\sum_{k \neq 4} f_{4k}|A_k|^2 \right) A_4 + 2f_{4312} A_1 A_2 A_3^* \exp(-i\Delta kz) \right]$$

$$f_{ijkl} = \frac{\langle F_i^* F_j^* F_k F_l \rangle}{\sqrt{\langle |F_i|^2 \rangle \langle |F_j|^2 \rangle \langle |F_k|^2 \rangle \langle |F_l|^2 \rangle}}$$



# Mieszanie czterech fal

## Układ sprzężonych nieliniowych równań Schrödingera

- Zakładając

$$f_{ijkl} \approx f_{ij} \approx \frac{1}{A_{\text{eff}}},$$

- oraz, że częstotści

$$\omega_j \approx \omega$$

- można wprowadzić

$$\gamma_j = \frac{n_2 \omega_j}{c A_{\text{eff}}} \approx \gamma$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{in_2\omega_1}{c} \left[ \left( f_{11}|A_1|^2 + 2 \sum_{k \neq 1} f_{1k}|A_k|^2 \right) A_1 + 2f_{1234} A_2^* A_3 A_4 \exp(+i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{in_2\omega_2}{c} \left[ \left( f_{22}|A_2|^2 + 2 \sum_{k \neq 2} f_{2k}|A_k|^2 \right) A_2 + 2f_{2134} A_1^* A_3 A_4 \exp(+i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{in_2\omega_3}{c} \left[ \left( f_{33}|A_3|^2 + 2 \sum_{k \neq 3} f_{3k}|A_k|^2 \right) A_3 + 2f_{3412} A_1 A_2 A_4^* \exp(-i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_4}{dz} = \frac{in_2\omega_4}{c} \left[ \left( f_{44}|A_4|^2 + 2 \sum_{k \neq 4} f_{4k}|A_k|^2 \right) A_4 + 2f_{4312} A_1 A_2 A_3^* \exp(-i\Delta kz) \right]$$

# Mieszanie czterech fal

## Układ sprzężonych nieliniowych równań Schrödingera

- Zakładając, że intensywność pomp (fal 1 i 2) jest znacząco większa od intensywności fal 3 oraz 4

$$A_1(z) = \sqrt{P_1} \exp[i\gamma(P_1 + 2P_2)z]$$

$$A_2(z) = \sqrt{P_2} \exp[i\gamma(P_2 + 2P_1)z]$$

$$\frac{dA_3}{dz} = +i\gamma \left[ 2(P_1 + P_2)A_3 + 2\sqrt{P_1P_2} \exp(-i\theta)A_4^* \right]$$

$$\frac{dA_4^*}{dz} = -i\gamma \left[ 2(P_1 + P_2)A_4^* + 2\sqrt{P_1P_2} \exp(+i\theta)A_3 \right]$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{in_2\omega_1}{c} \left[ \left( f_{11}|A_1|^2 + 2\sum_{k \neq 1} f_{1k}|A_k|^2 \right) A_1 + 2f_{1234}A_2^*A_3A_4 \exp(+i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{in_2\omega_2}{c} \left[ \left( f_{22}|A_2|^2 + 2\sum_{k \neq 2} f_{2k}|A_k|^2 \right) A_2 + 2f_{2134}A_1^*A_3A_4 \exp(+i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{in_2\omega_3}{c} \left[ \left( f_{33}|A_3|^2 + 2\sum_{k \neq 3} f_{3k}|A_k|^2 \right) A_3 + 2f_{3412}A_1A_2A_4^* \exp(-i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_4}{dz} = \frac{in_2\omega_4}{c} \left[ \left( f_{44}|A_4|^2 + 2\sum_{k \neq 4} f_{4k}|A_k|^2 \right) A_4 + 2f_{4312}A_1A_2A_3^* \exp(-i\Delta kz) \right]$$

$$P_j = |A_j(0)|^2$$

$$\theta = \left[ \Delta k - 3\gamma(P_1 + P_2) \right] z$$

# Mieszanie czterech fal

## Układ sprzężonych nieliniowych równań Schrödingera

- Wprowadzając pomocniczo

$$B_j(z) = A_j \exp[-i\gamma 2(P_1 + P_2)z], \quad j = 3, 4$$

$$\frac{dB_3}{dz} = +2i\gamma \sqrt{P_1 P_2} \exp(-i\kappa z) B_4^*$$

$$\frac{dB_4^*}{dz} = -2i\gamma \sqrt{P_1 P_2} \exp(+i\kappa z) B_3$$

$$\frac{d^2 B_3}{dz^2} + i\kappa \frac{dB_3}{dz} - (4\gamma^2 P_1 P_2) B_3 = 0$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{in_2\omega_1}{c} \left[ \left( f_{11}|A_1|^2 + 2\sum_{k \neq 1} f_{1k}|A_k|^2 \right) A_1 + 2f_{1234} A_2^* A_3 A_4 \exp(+i\Delta k z) \right]$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{in_2\omega_2}{c} \left[ \left( f_{22}|A_2|^2 + 2\sum_{k \neq 2} f_{2k}|A_k|^2 \right) A_2 + 2f_{2134} A_1^* A_3 A_4 \exp(+i\Delta k z) \right]$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{in_2\omega_3}{c} \left[ \left( f_{33}|A_3|^2 + 2\sum_{k \neq 3} f_{3k}|A_k|^2 \right) A_3 + 2f_{3412} A_1 A_2 A_4^* \exp(-i\Delta k z) \right]$$

$$\frac{dA_4}{dz} = \frac{in_2\omega_4}{c} \left[ \left( f_{44}|A_4|^2 + 2\sum_{k \neq 4} f_{4k}|A_k|^2 \right) A_4 + 2f_{4312} A_1 A_2 A_3^* \exp(-i\Delta k z) \right]$$

$$\kappa = \Delta k + \gamma(P_1 + P_2)$$



# Mieszanie czterech fal

## Wzmocnienie parametryczne

$$B_3(z) = [a_3 \exp(+gz) + b_3 \exp(-gz)] \exp(-i\kappa z/2)$$

$$B_4^*(z) = [a_4 \exp(+gz) + b_4 \exp(-gz)] \exp(+i\kappa z/2)$$

$$g = \sqrt{(\gamma P_0 r)^2 - (\kappa/2)^2}$$

$$r = 2\sqrt{P_1 P_2} / P_0$$

$$P_0 = P_1 + P_2$$

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{in_2\omega_1}{c} \left[ \left( f_{11}|A_1|^2 + 2\sum_{k \neq 1} f_{1k}|A_k|^2 \right) A_1 + 2f_{1234}A_2^*A_3A_4 \exp(+i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{in_2\omega_2}{c} \left[ \left( f_{22}|A_2|^2 + 2\sum_{k \neq 2} f_{2k}|A_k|^2 \right) A_2 + 2f_{2134}A_1^*A_3A_4 \exp(+i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{in_2\omega_3}{c} \left[ \left( f_{33}|A_3|^2 + 2\sum_{k \neq 3} f_{3k}|A_k|^2 \right) A_3 + 2f_{3412}A_1A_2A_4^* \exp(-i\Delta kz) \right]$$

$$\frac{dA_4}{dz} = \frac{in_2\omega_4}{c} \left[ \left( f_{44}|A_4|^2 + 2\sum_{k \neq 4} f_{4k}|A_k|^2 \right) A_4 + 2f_{4312}A_1A_2A_3^* \exp(-i\Delta kz) \right]$$

# Mieszanie czterech fal

## Możliwe konfiguracje

- Niestabilność modulacyjna jako FWM
- Wektorowa niestabilność modulacyjna jako FWM
- Międzymodowe mieszanie czterech fal

# Mieszanie czterech fal

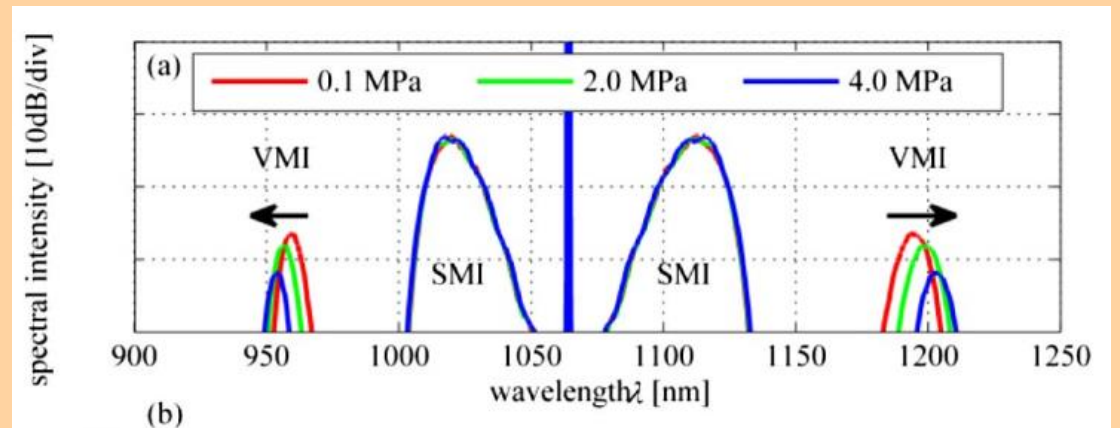
## Niestabilność modulacyjna

$$2(\beta_0 + \gamma P_0) = \beta_0 + \beta_1 \Omega_s + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega_s^2 + 2\gamma P_0$$

$$+ \beta_0 - \beta_1 \Omega_s + \frac{1}{2} \beta_2 \Omega_s^2 + 2\gamma P_0$$

$$-2\gamma P_0 = \beta_2 \Omega_s^2$$

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{2\gamma P_0}{|\beta_2|}}$$





# Mieszanie czterech fal

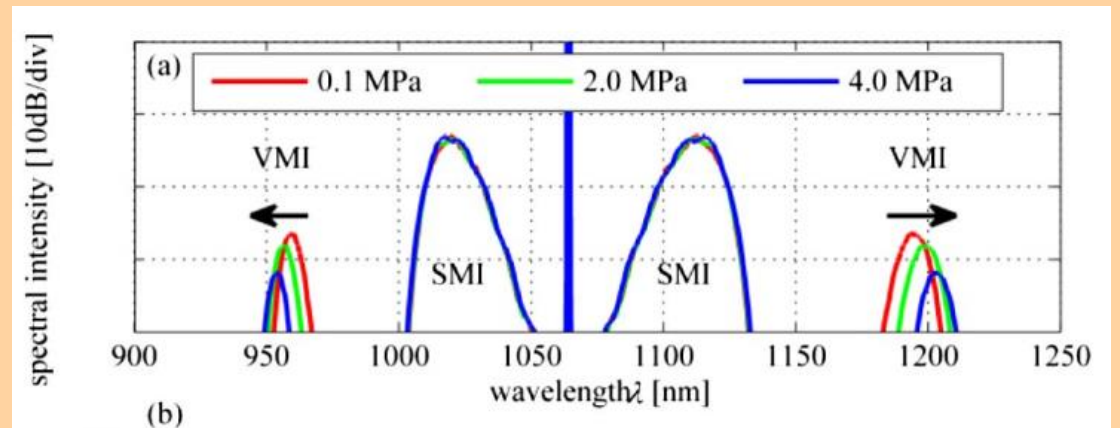
## Wektorowa niestabilność modulacyjna

$$\beta_{0x} + \beta_{0y} = \beta_{0x} + \beta_{1x}\Omega_s + \frac{1}{2}\beta_2\Omega_s^2$$

$$+ \beta_{0y} - \beta_{1y}\Omega_s + \frac{1}{2}\beta_2\Omega_s^2$$

$$0 = \Omega_s (\Delta\beta_1 + \beta_2\Omega_s)$$

$$\Omega_s = \pm \frac{G}{c\beta_2}$$



# Mieszanie czterech fal

## Międzymodowe mieszanie czterech fal

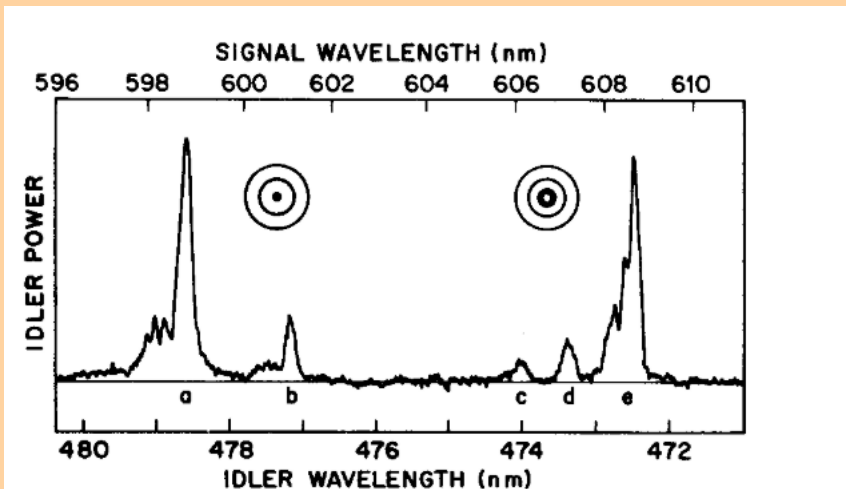
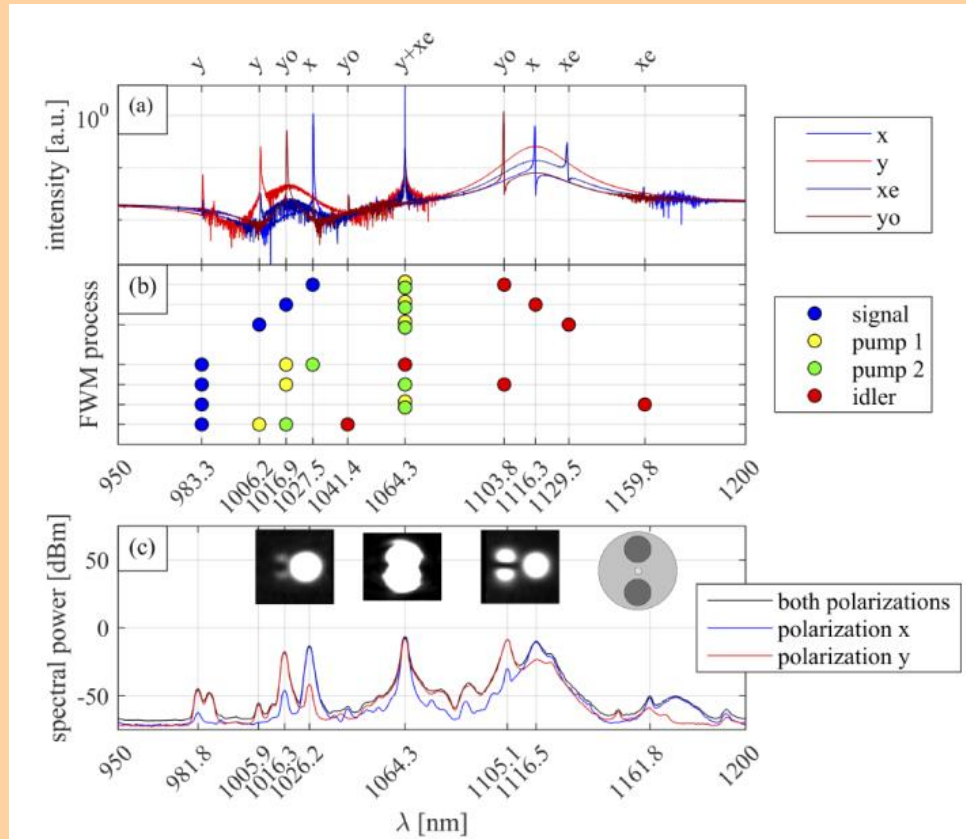


FIG. 3. Idler output power as a function of wavelength for a small part of the total scanning range. Also included is a scale indicating the dye laser wavelength. The visually observed far-field patterns are sketched for the two strongest peaks.

R. H. Stolen, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, "Phase-matched three-wave mixing in silica fiber optical waveguides," *Appl. Phys. Lett.* **24**(7), 308-310 (1974).

# Mieszanie czterech fal

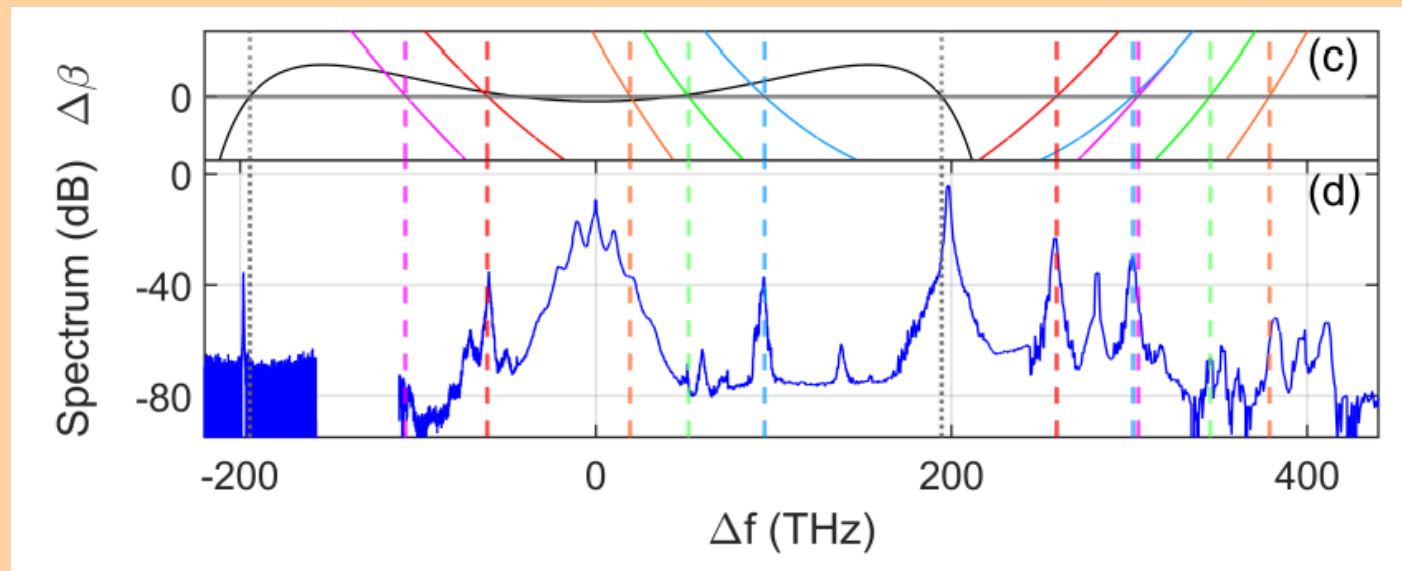
## Międzymodowe mieszanie czterech fal



S. Majchrowska, K. Żołnacz et al., Opt. Lett. 47, 2522-2525 (2022)

# Mieszanie czterech fal

Międzymodowe mieszanie czterech fal



K. Stefanska et al. Far-detuned frequency conversion beyond 3500 nm in a few-mode graded-index silica fiber (2023) LEOS Summer Topical Meeting, DOI: 10.1109/SUM57928.2023.10224428

# Podsumowanie

Oddziaływanie czterech fal

Opis teoretyczny

Warunek dopasowania fazowego

Przykłady