Metody numeryczne w fizyce

W11OPA-SM0060G

rok akademicki 2023/24

semestr letni

Wykład 9

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220

Plan wykładu

- Rozwiązywanie cząstkowych równań różniczkowych metodą elementów skończonych
- Możliwości Partial Differential Equation Toolbox (w tym **`pdeModeler`**)
- Przykłady

Rozwiązywanie cząstkowych równań różniczkowych

- Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych z wykorzystaniem metody elementów skończonych
  - tworzenie geometrii
  - siatkowanie
  - warunki brzegowe
  - solwery równań różniczkowych
  - wizualizacja

Politechnika Wrocławska

Partial Differential Equation Toolbox

- MathWorks, Help Center, Partial Differential Equation Toolbox https://www.mathworks.com/help/pde/

Partial Differential Equation Toolbox

1. Określenie geometrii 2D.
2. Określenie warunków brzegowych.
3. Określenie współczynników równania.
4. Tworzenie siatki trójkątnej.
5. Rozwiązanie równania różniczkowego.
6. Wykreślenie rozwiązania.

Politechnika Wrocławska

Zagadnienia

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = \lambda du$$

$$-\nabla \cdot (c(u)\nabla u) + a(u)u = f(u)$$

Układy równań

$$-\nabla\cdot\left(c_{11}\nabla u_1\right)-\nabla\cdot\left(c_{12}\nabla u_2\right)+a_{11}u_1+a_{12}u_2=f_1$$
$$-\nabla\cdot\left(c_{21}\nabla u_1\right)-\nabla\cdot\left(c_{22}\nabla u_2\right)+a_{21}u_1+a_{22}u_2=f_2$$

Warunki brzegowe

- Dirichlet $hu = r$
- Neumann $\vec{n} \cdot (c\nabla u) + qu = g$

Przykład 1 - Równanie Poissona

$$-\nabla^2 u = 1 \text{ na } \Omega$$

$$u = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

Ω dysk jednostkowy

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{4}$$

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$c = 1$$

$$a = 0$$

$$f = 1$$

$$hu = r$$

$$h = 1$$

$$r = 0$$

www.mathworks.com/help/pde/ug/solve-poissons-equation-on-a-unit-disk.html

Przykład 2 - Rozpraszanie fali

- równanie falowe

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 U = 0$$

- fale płaskie

$$U(x,y,t) = u(x,y)\exp(-i\omega t)$$

$$-\omega^2 u - c^2 \nabla^2 u = 0$$

- równanie Helmholtza

$$-\nabla^2 u - k^2 u = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

https://www.mathworks.com/help/pde/ug/scattering-problem-pdemodeler-app.html

Politechnika Wrocławska

Politechnika Wrocławska

Przykład 2 - Rozpraszanie fali

- warunek brzegowy - fala padająca

$$V(x,y,t)=\exp\left(i\left(k\vec{a}\cdot\vec{x}-\omega t\right)\right)=v(x,y)\exp(-i\omega t)$$

$$v(x,y)=\exp\left(ik\vec{a}\cdot\vec{x}\right)$$

$$u=v+r$$

- na granicy obiektu $\quad u=0 \qquad r=-v$
- na granicy obszaru obliczeniowego

$$\frac{\partial r}{\partial t}+c\vec{\xi}\cdot\nabla r=0 \qquad \vec{\xi}\cdot\nabla r-ikr=0$$

Przykład 2 - Rozpraszanie fali

$$-\nabla^2 u - k^2 u = 0$$

$$k = 60 \qquad \lambda = \frac{2\pi}{60} \approx 0{,}1$$

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$c = 1$$

$$a = -k^2$$

$$f = 0$$

$$\vec{n} \cdot (c\nabla u) + qu = g$$

$$c = 1$$

$$q = -60i$$

$$g = 0$$

$$\boxed{\vec{\xi} \cdot \nabla r - ikr = 0}$$

$$hu = r$$

$$h = 1$$

$$\boxed{r = -v = -\exp(ik\vec{a} \cdot \vec{x})}$$

$$r = -v = -\exp(-60ix)$$

Podsumowanie

- Rozwiązywanie cząstkowych równań różniczkowych metodą elementów skończonych
- Możliwości Partial Differential Equation Toolbox (w tym `pdeModeler`)
- Przykłady