Metody numeryczne w fizyce

W11OPA-SM0060G

rok akademicki 2023/24

semestr letni

Politechnika Wrocławska

Wykład 8

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220

unite! University Network for Innovation, Technology and Engineering

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Evaluated by IEP INSTITUTIONAL EVALUATION PROGRAMME www.iep-qaa.org

Plan wykładu

- Zagadnienie początkowe
- Obniżenie rzędu równania

- Zagadnienie brzegowe
- Zagadnienie własne

- Metoda strzałów
- Metoda kolokacji
- Metoda różnic skończonych

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie początkowe

Typowe zagadnienie początkowe opisane jest równaniem

$$\frac{df}{dt} = g(t, f), \quad f(t_0) = f_0.$$

W zagadnieniu początkowym może występować więcej zmiennych

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{f}), \quad \mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}_0.$$

Politechnika Wrocławska

Obniżenie rzędu równania

Zagadnienie początkowe rzędu drugiego

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = g\left(t, f, f'\right), \quad f\left(t_0\right) = f^{(0)}, \quad f'\left(t_0\right) = f'^{(0)}$$

można zapisać jako zagadnienie początkowe rzędu pierwszego dla dwóch zmiennych

$$f_1 \equiv f, \quad f_2 \equiv f' \qquad \begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= f_2, & f_1\left(t_0\right) &= f_1^{(0)}, \\ \frac{df_2}{dt} &= g\left(t, f_1, f_2\right), & f_2\left(t_0\right) &= f_2^{(0)}. \end{aligned}$$

Obniżenie rzędu równania

Zagadnienie początkowe rzędu pierwszego dla dwóch zmiennych

$$\frac{df_1}{dt} = f_2, \qquad\qquad f_1(t_0) = f_1^{(0)},$$
$$\frac{df_2}{dt} = g(t, f_1, f_2), \quad f_2(t_0) = f_2^{(0)}.$$

można zapisać w postaci wektorowej

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ g(t, f_1, f_2) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} f_1(t_0) \\ f_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(0)} \\ f_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Politechnika Wrocławska

Obniżenie rzędu równania

Zagadnienie początkowe w postaci wektorowej

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ g\left(t, f_1, f_2\right) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} f_1\left(t_0\right) \\ f_2\left(t_0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(0)} \\ f_2^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{g}\left(t, \mathbf{f}\right), \qquad \mathbf{f}\left(t_0\right) = \mathbf{f}^{(0)}.$$

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu początkowym rzędu drugiego znamy wartości funkcji i jej pochodnej w punkcie początkowym

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = g\left(t, f, f'\right), \quad f\left(t_0\right) = f^{(0)}, \quad f'\left(t_0\right) = f'^{(0)}.$$

Innym typem problemów są zagadnienia brzegowe, przykładowo

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f\left(x, u, u'\right), \quad u\left(x_0\right) = u^{(0)}, \quad u\left(x_1\right) = u^{(1)}.$$

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu brzegowym

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, u, u')$$

$$u'' = f(x, u, u')$$

możemy dobrać tak układ współrzędnych, aby

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu brzegowym

$$u'' = f\left(x, u, u'\right)$$

możemy znać różne zestawy warunków brzegowych

$$u(0) = u^{(0)},\ u(1) = u^{(1)}; \qquad u(0) = u^{(0)},\ u'(1) = v^{(1)};$$

$$u'(0) = v^{(0)},\ u(1) = u^{(1)}; \qquad u'(0) = v^{(0)},\ u'(1) = v^{(1)}.$$

Zagadnienie własne

W niektórych przypadkach w problemie pojawia się jeszcze parametr – wartość własna

$$u'' = f\left(x, u, u', \lambda\right).$$

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie własne

$$u'' = f(x, u, u', k)$$

Przykład: drgania podłużne sprężystego pręta.

$$u'' = -k^2 u$$

- pręt obustronnie umocowany $\quad u(0) = 0 \qquad u(1) = 0$
- pręt umocowany jednostronnie $\quad u(0) = 0 \qquad u'(1) = 0$

Politechnika Wrocławska

Zagadnienie własne

Rozwiązania analityczne dla pręta obustronnie umocowanego

$$u_n(x) = \sqrt{2}\sin(k_n x)$$

$$k_n^2 = (n\pi)^2$$

Metoda strzałów

Zagadnienie brzegowe

$$u'' = f\left(x, u, u'\right)$$

Stosując podstawienia $\quad y_1 = u \qquad y_2 = u'$

otrzymujemy

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f\left(x, y_1, y_2\right).$$

Załóżmy, że warunki brzegowe są postaci:

$$u(0) = u^{(0)}, \quad u(1) = u^{(1)}.$$

Metoda strzałów

Zagadnienie brzegowe

Wprowadźmy dodatkowy parametr δ i założmy, że

$$u'(0) = \delta.$$

Dla ustalonego δ jesteśmy w stanie rozwiązać zagadnienie początkowe znanymi metodami.

Rozwiązanie równania różniczkowego daje nam wartość funkcji na drugim brzegu przedziału

$$u_\delta(1).$$

$$F(\delta) = u_\delta(1) - u^{(1)}$$

Metoda strzałów

Zagadnienie brzegowe

Miejsca zerowego funkcji

$$F(\delta) = u_\delta(1) - u^{(1)}$$

poszukiwać możemy np. metodami:

- bisekcji,
- siecznych.

Metoda strzałów

Zagadnienie własne

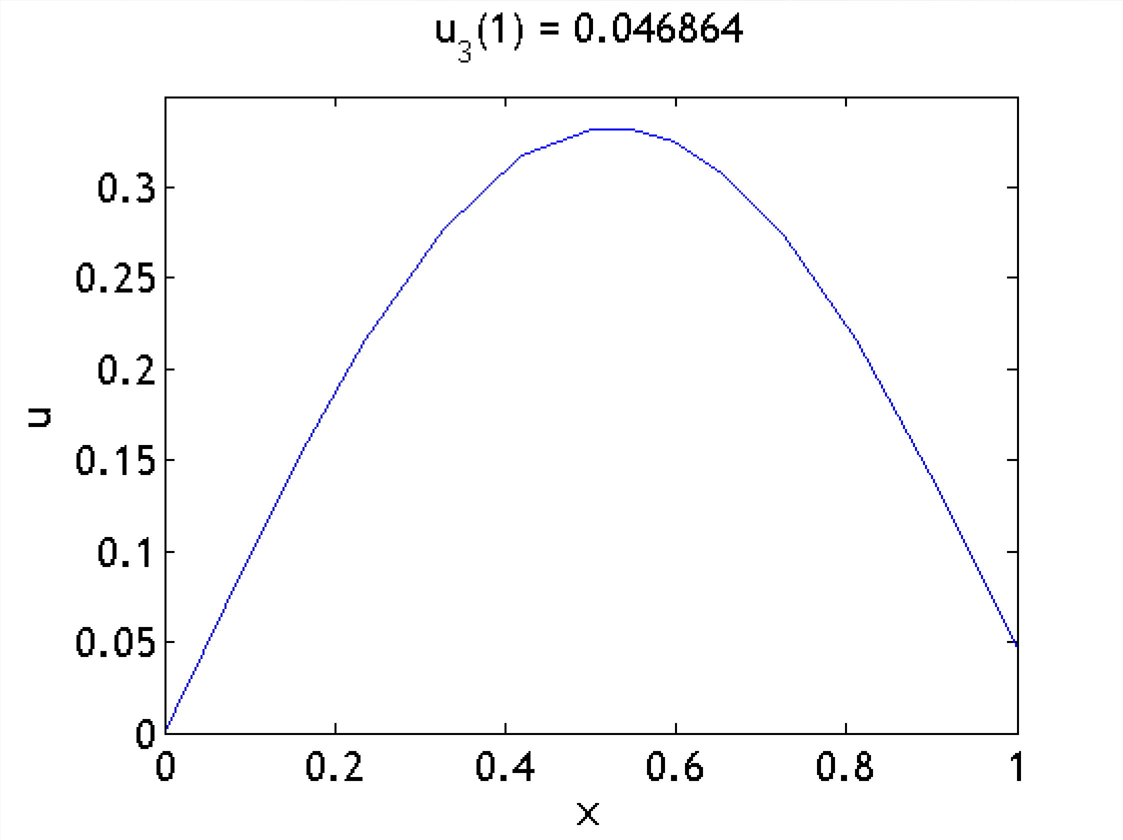
$$F(k) = u_k(1) - u^{(1)}$$

Metodę strzałów można także wykorzystać do rozwiązania zagadnienia własnego.

W tym przypadku dopasowujemy wartość własną zagadnienia.

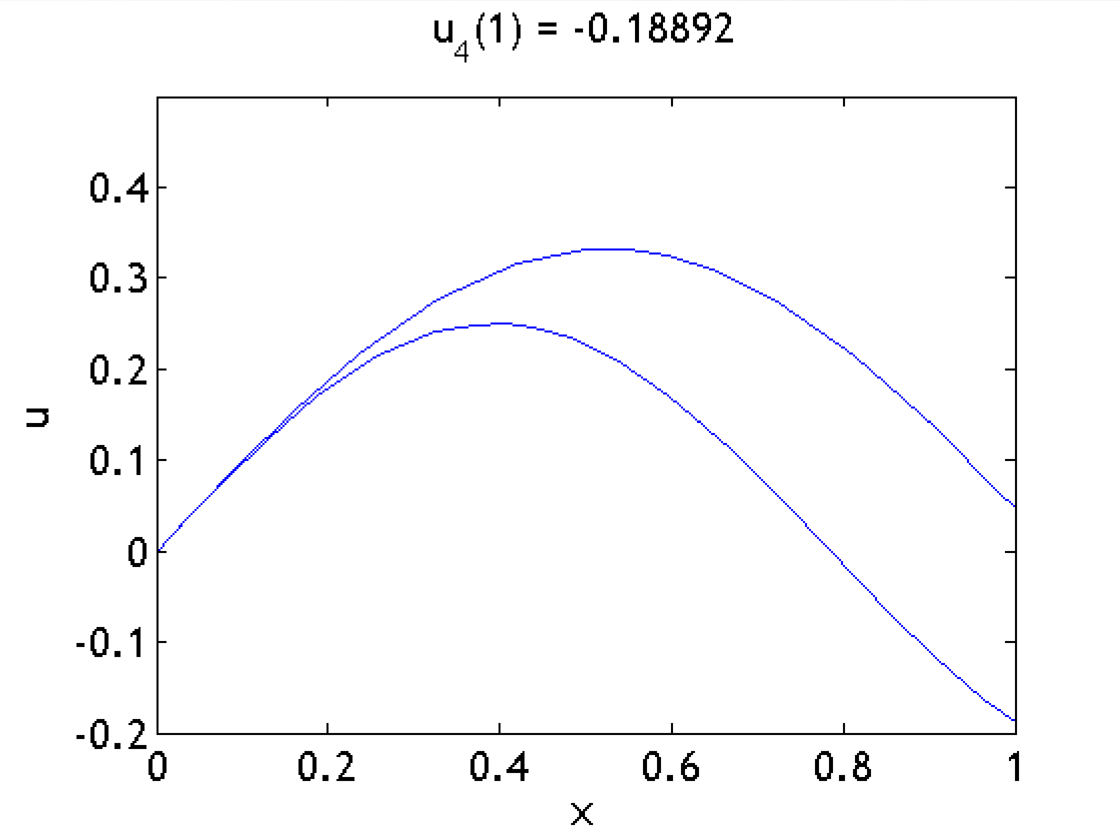
Metoda strzałów

Zagadnienie własne



Metoda strzałów

Zagadnienie własne



Zagadnienie brzegowe

Funkcje Matlaba

Do rozwiazywania zagadnienia brzegowego w środowisku Matlab można wykorzystać funkcje **`bvp4c()`**, **`bvp5c()`**, które wykorzystują metodę kolokacji.

https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/bvp4c.html

https://www.mathworks.com/help/matlab/math/solve-bvp-with-unknown-parameter.html

Zagadnienie brzegowe

Metoda różnic skończonych

$$u'' = -k^2 u$$

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = b,\ x_i = a + is,\ s = \frac{b-a}{n+1}.$$

$$u_i = u(x_i)$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{s^2} = -k^2 u_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -s^2 k^2 u_i,$$

Politechnika Wrocławska

Podsumowanie (1)

- Zagadnienie początkowe
- Obniżenie rzędu równania
- Zagadnienie brzegowe

$$u'' = f(x,u,u')$$

$$u(0) = u^{(0)},\ u(1) = u^{(1)} \text{ itp.}$$

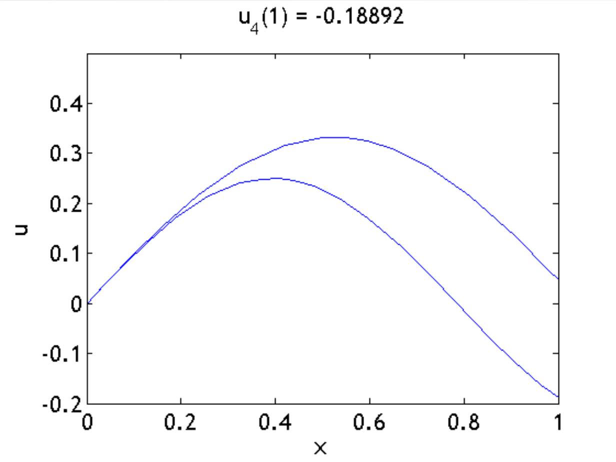
- Zagadnienie własne

$$u'' = f(x,u,u',\lambda)$$

Politechnika Wrocławska

Podsumowanie (2)

- Metoda strzałów



- **`bvp4c()`**

```
sol = bvp4c(odefun,bcfun,solinit)
```

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{s^2} = -k^2 u_i$$

$$\mathbf{B}u = \lambda u.$$

- Metoda różnic skończonych