Politechnika Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

W11OPA-SM0060G

rok akademicki 2023/24

semestr letni

Wykład 5

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220

Politechnika Wrocławska

Plan wykładu

- Wielomian interpolujący
- Wzór interpolacyjny Newtona
- Wzór interpolacyjny Lagrange'a
- Ilorazy różnicowe
- Interpolacja Hermite'a
- Interpolacja funkcjami sklejanymi

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*

Politechnika Wrocławska

Wielomian interpolujący

Zadanie. Znaleźć wielomian p możliwie najniższego stopnia taki, że dla danych $n + 1$ punktów (x_i, y_i) jest $p(x_i) = y_i$ $(0 \le i \le n)$.

Twierdzenie. Jeśli liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są parami różne to istnieje dokładnie jeden wielomian $p \in \Pi_n$ taki, że $p(x_i) = y_i$ $(0 \le i \le n)$.

Politechnika Wrocławska

Wielomian interpolujący

Dowód - jednoznaczność

Załóżmy, że istnieją dwa wielomiany klasy Π_n interpolujące wartości y_i w węzłach x_i: $p_n(x)$ oraz $q_n(x)$.

Rozważmy wielomian $p_n(x) - q_n(x)$, który także należy do klasy Π_n.

Wielomiany należące do Π_n mogą znikać w co najwyżej n punktach, o ile nie znikają tożsamościowo.

Wielomian $p_n(x) - q_n(x)$ znika w $n+1$ punktach x_i dla $(0 \le i \le n)$, zatem $p_n(x) \equiv q_n(x)$.

Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

Istnienie – dla $n = 0$ wielomian stały $p_0(x) = y_0$ spełnia jedyny warunek interpolacyjny $p_0(x_0) = y_0$.

Załóżmy, że dla pewnego k istnieje wielomian p_{k-1} klasy Π_{k-1} taki, że $p_{k-1}(x_i) = y_i$ dla $(0 \leq i \leq k-1)$.

Wielomian $p_k(x)$ możemy zapisać jako

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}).$$

Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

Wielomian $p_k(x)$ możemy zapisać jako

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}).$$

Stopień tego wielomianu nie przewyższa k.

Wielomian ten spełnia warunki interpolacyjne $(0 \le i \le k-1)$.
Pozostaje wyznaczyć c_k tak, żeby $p_k(x_k) = y_k$.

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1}) = y_k.$$

Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

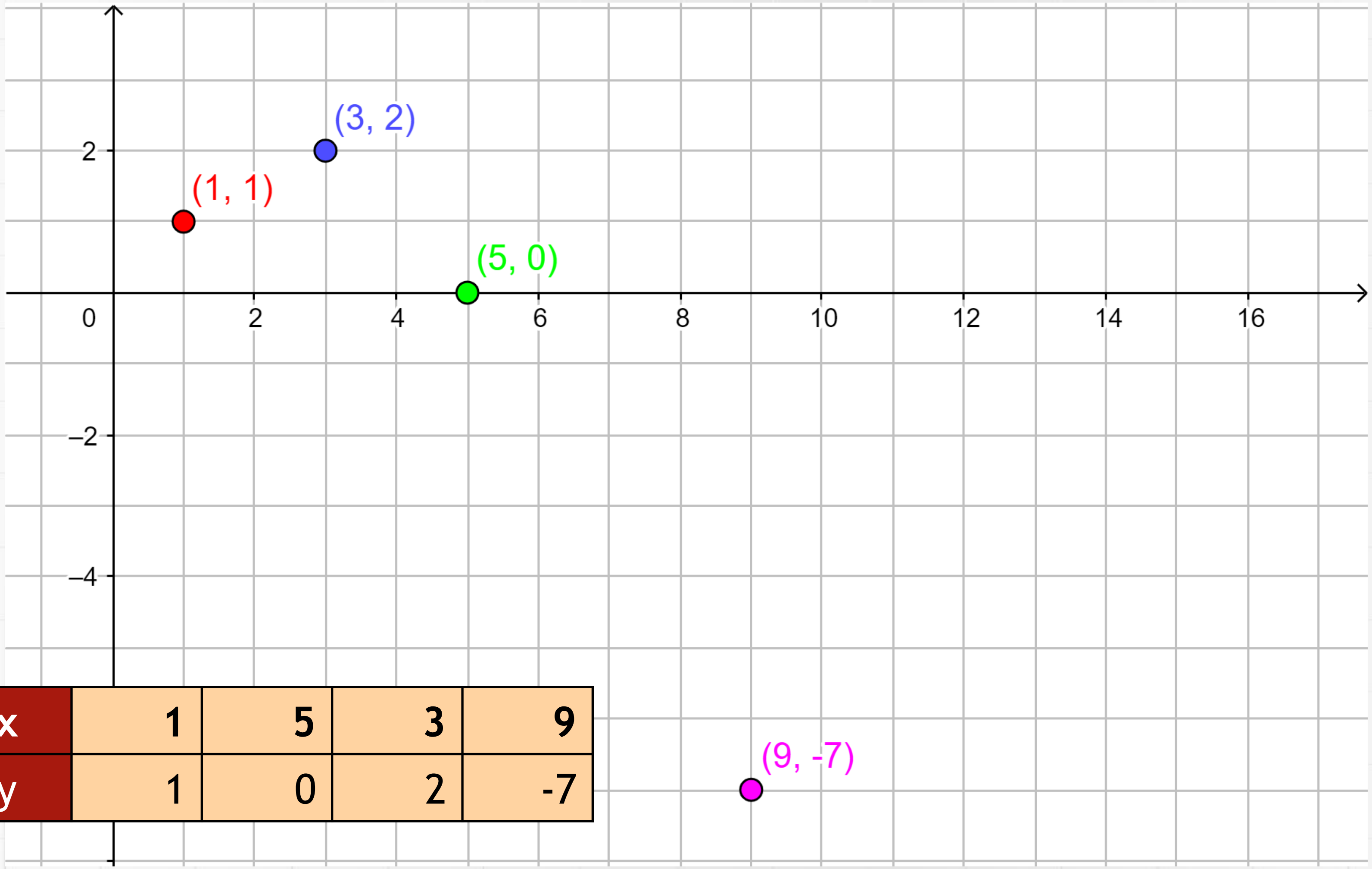
$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}) = y_k.$$

$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1})}$$

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k}\left(c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)\right)$$

Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład

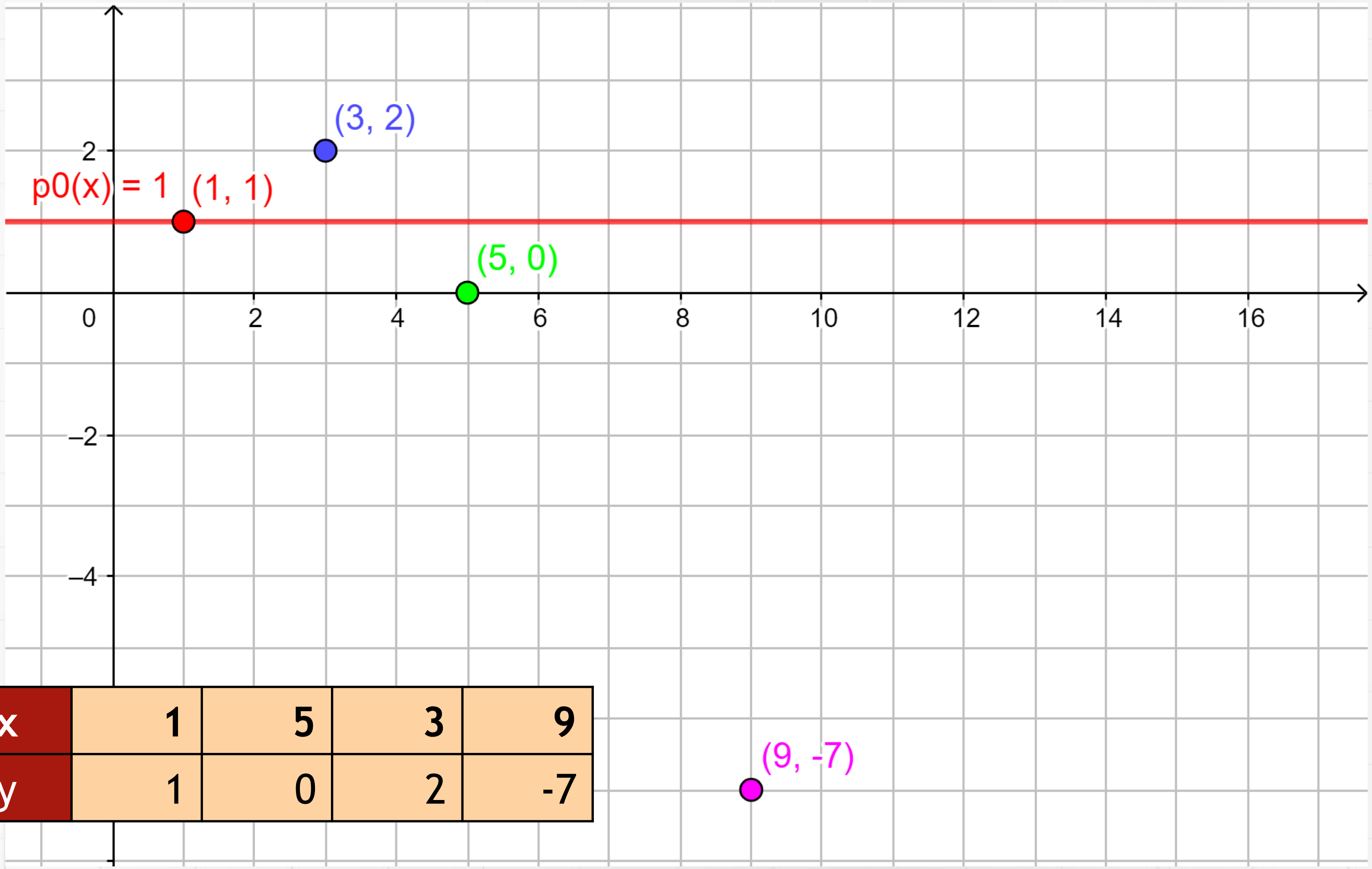


x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Politechnika Wrocławska

Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład

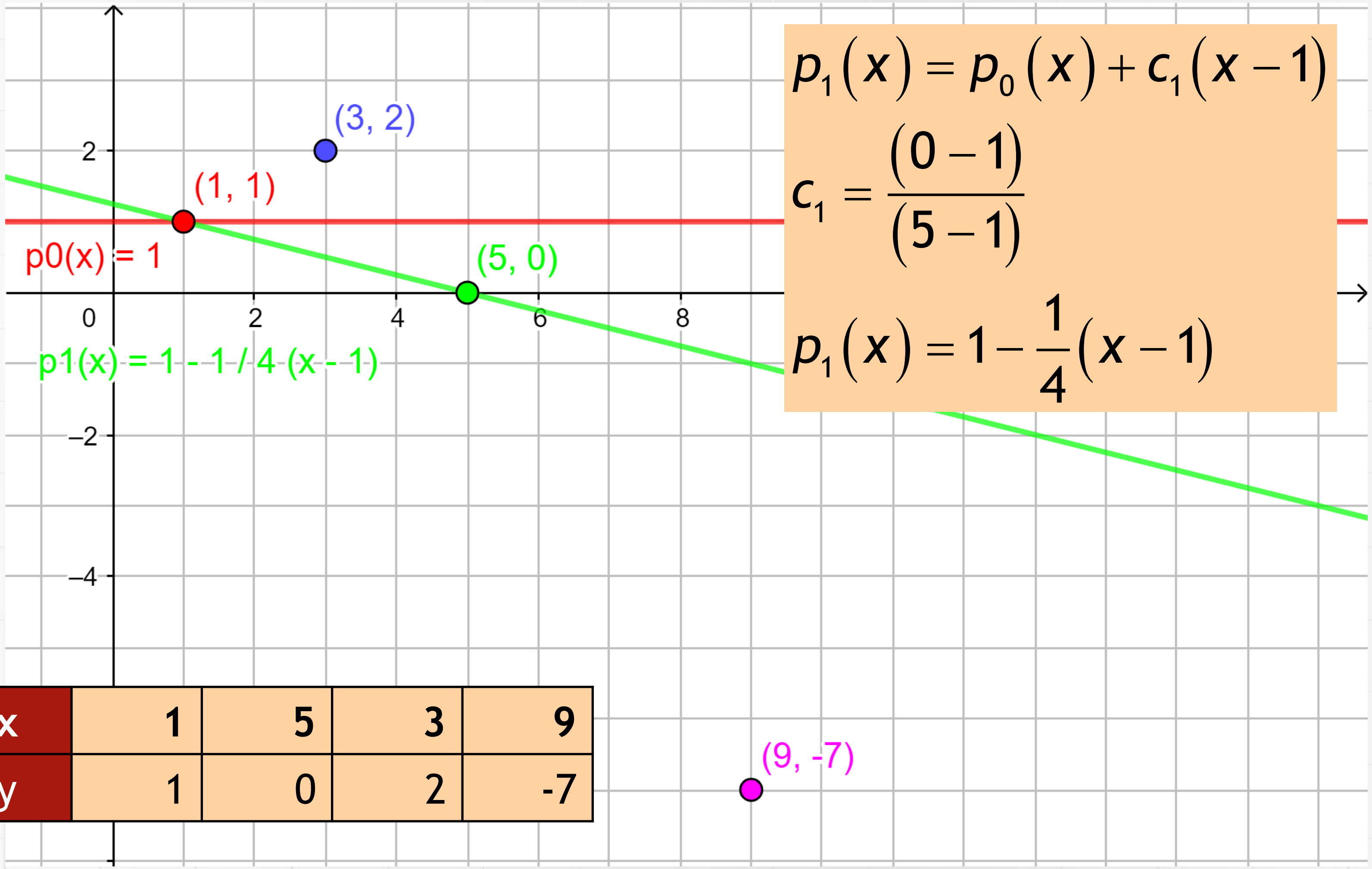


x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Politechnika Wrocławska

Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



$$p_1(x) = p_0(x) + c_1(x-1)$$

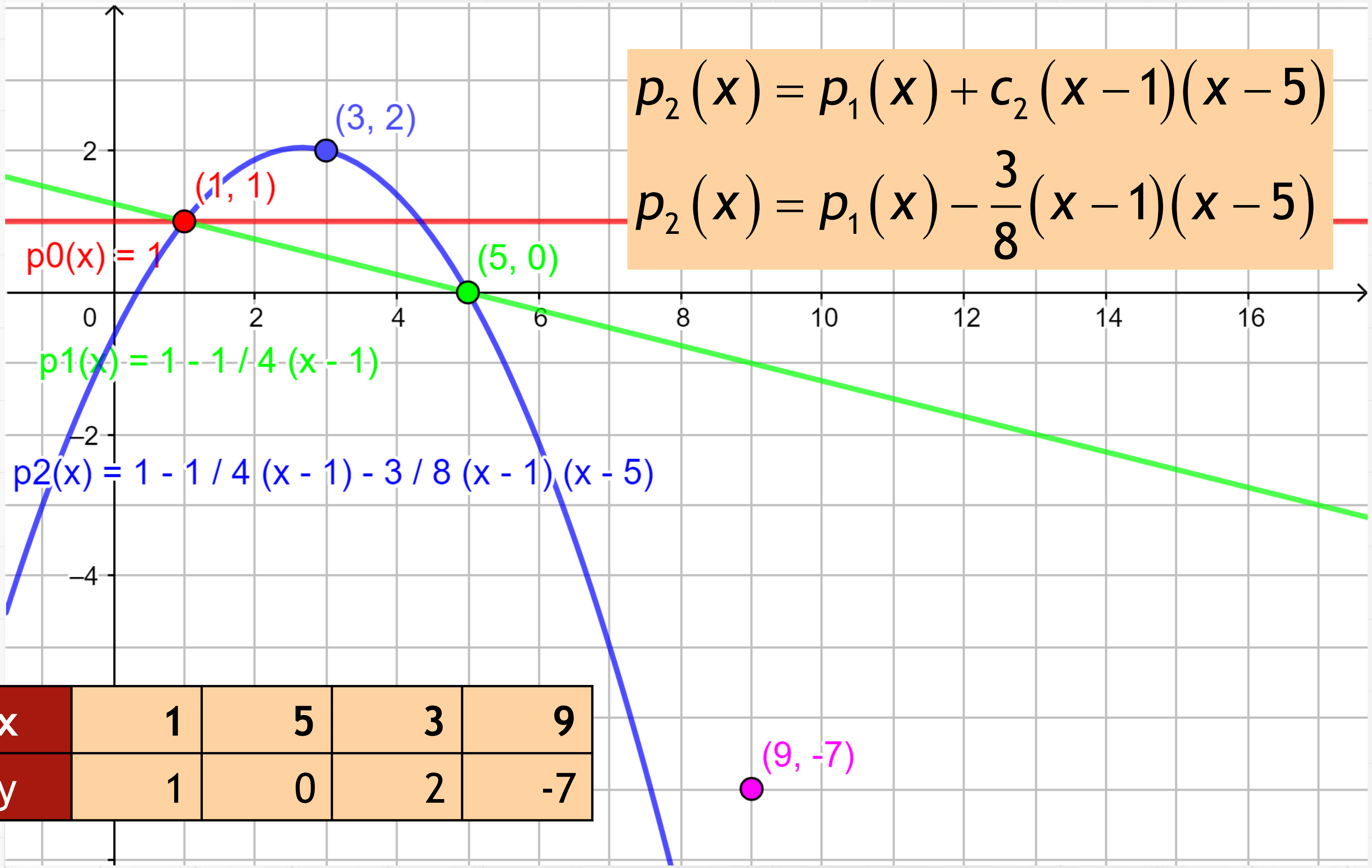
$$c_1 = \frac{(0-1)}{(5-1)}$$

$$p_1(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-1)$$

x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



$$p_2(x) = p_1(x) + c_2(x-1)(x-5)$$

$$p_2(x) = p_1(x) - \frac{3}{8}(x-1)(x-5)$$

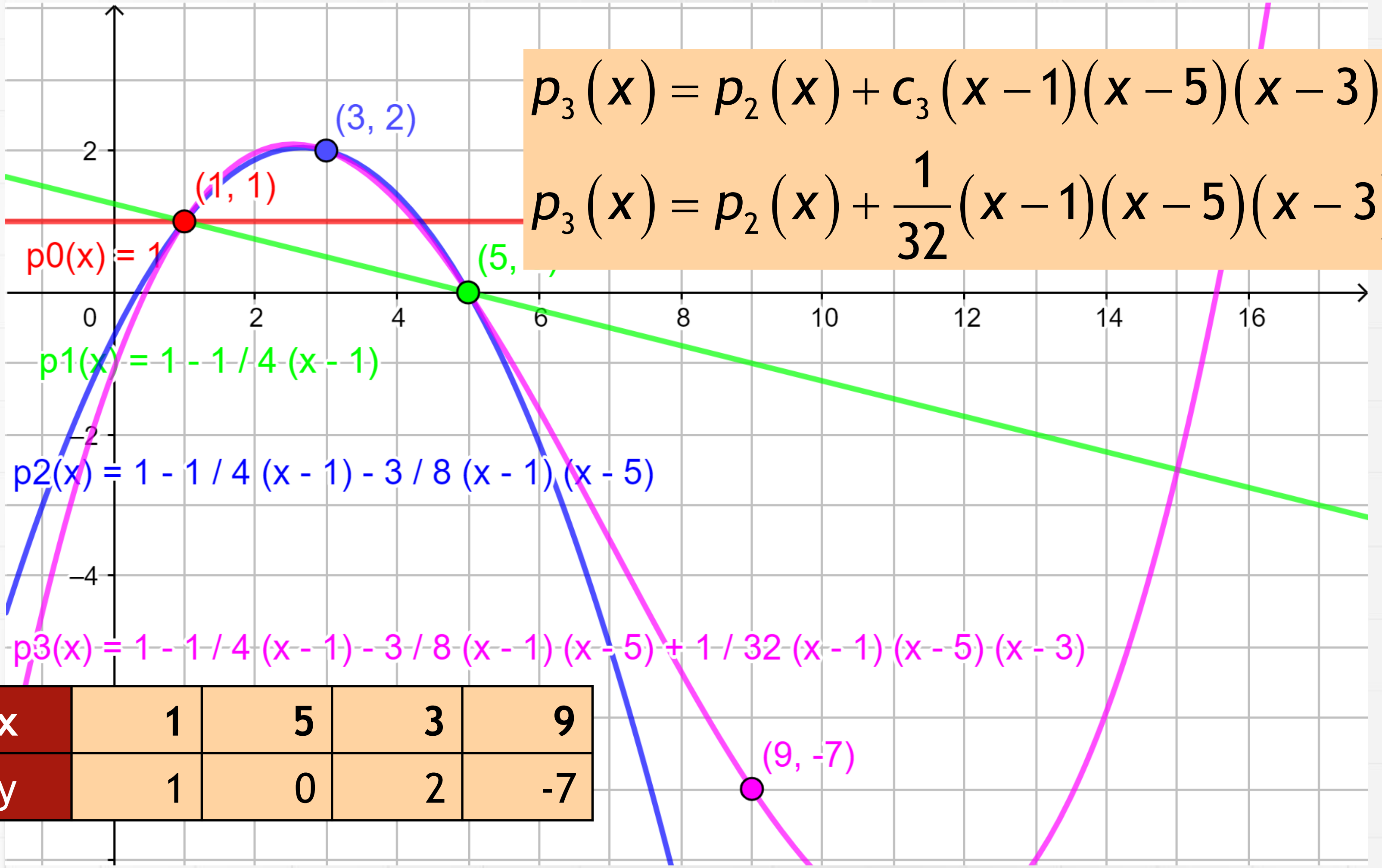
x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład

$$p_3(x) = p_2(x) + c_3(x-1)(x-5)(x-3)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{1}{32}(x-1)(x-5)(x-3)$$

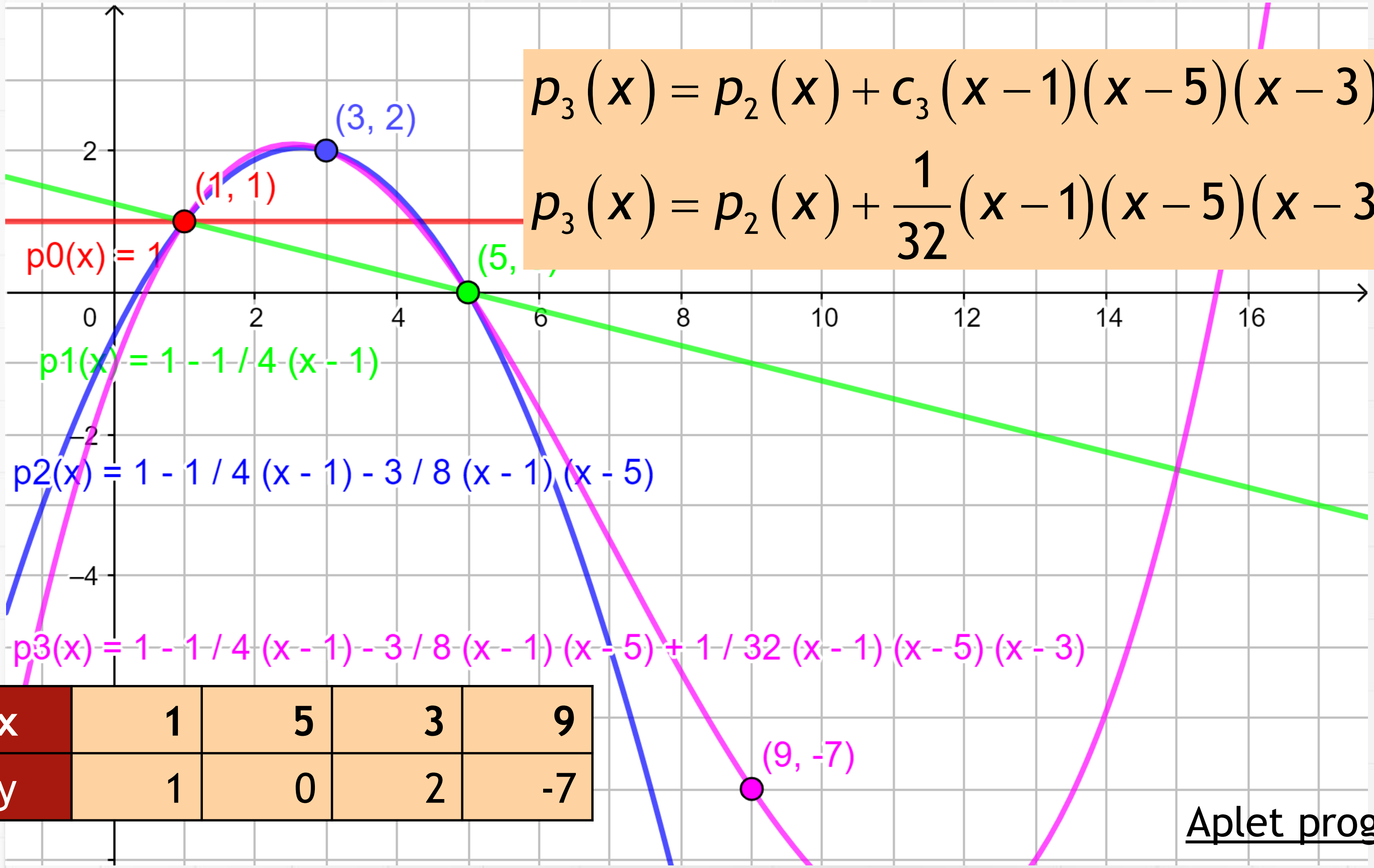


x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Politechnika Wrocławska

Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



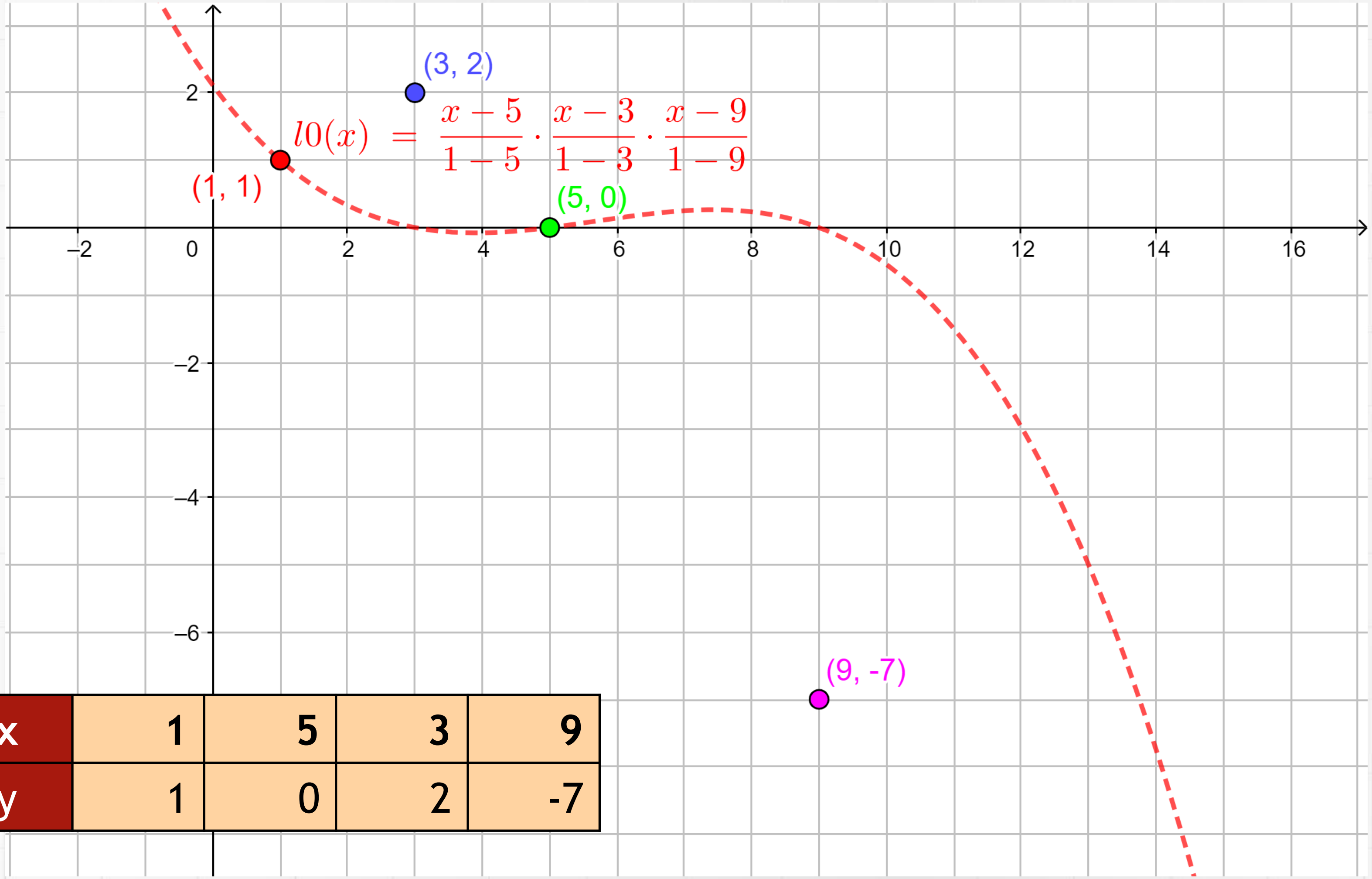
$$p_3(x) = p_2(x) + c_3(x-1)(x-5)(x-3)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{1}{32}(x-1)(x-5)(x-3)$$

x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

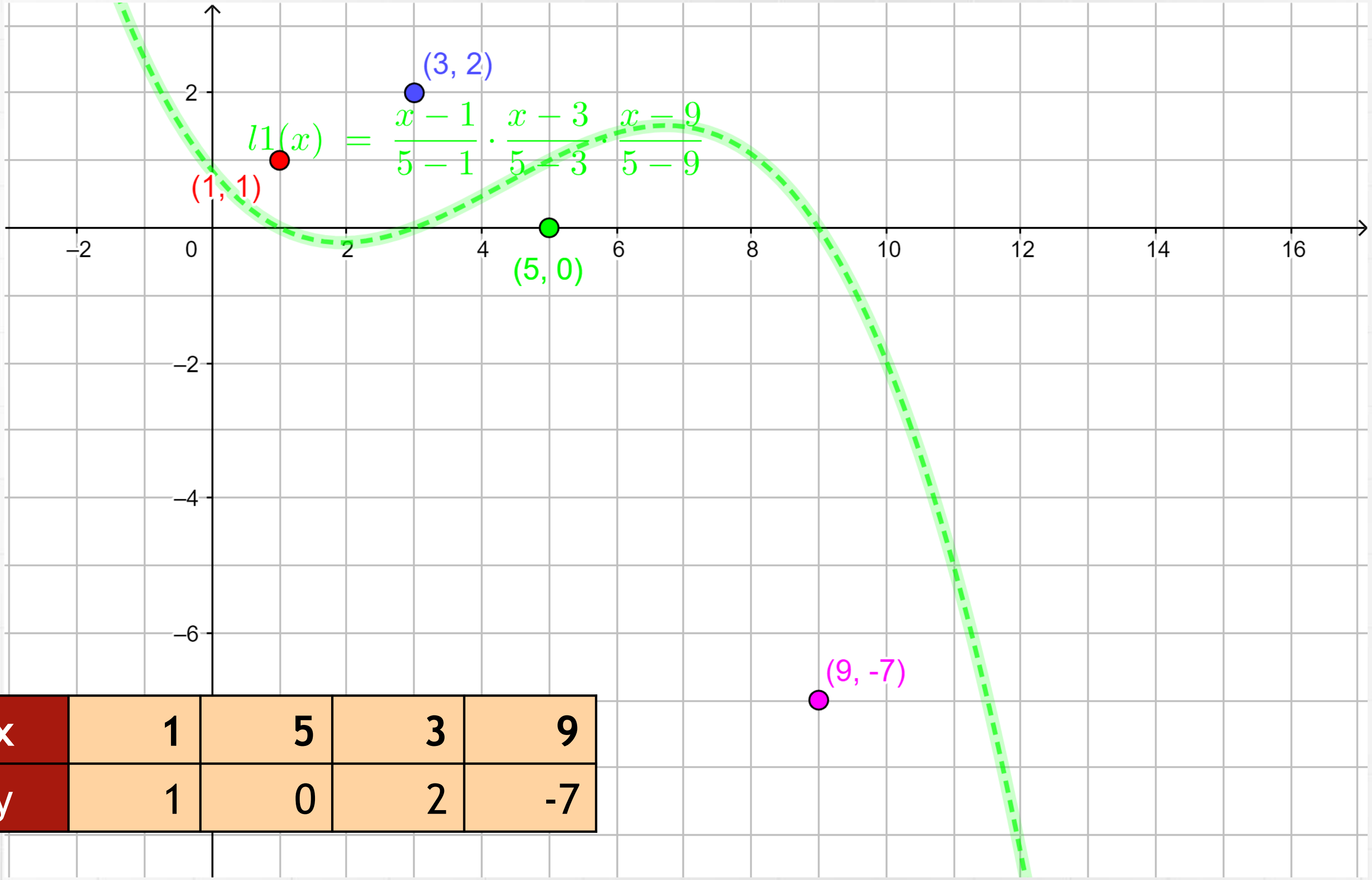
Aplet programu geogebra

Wzór interpolacyjny Lagrange’a



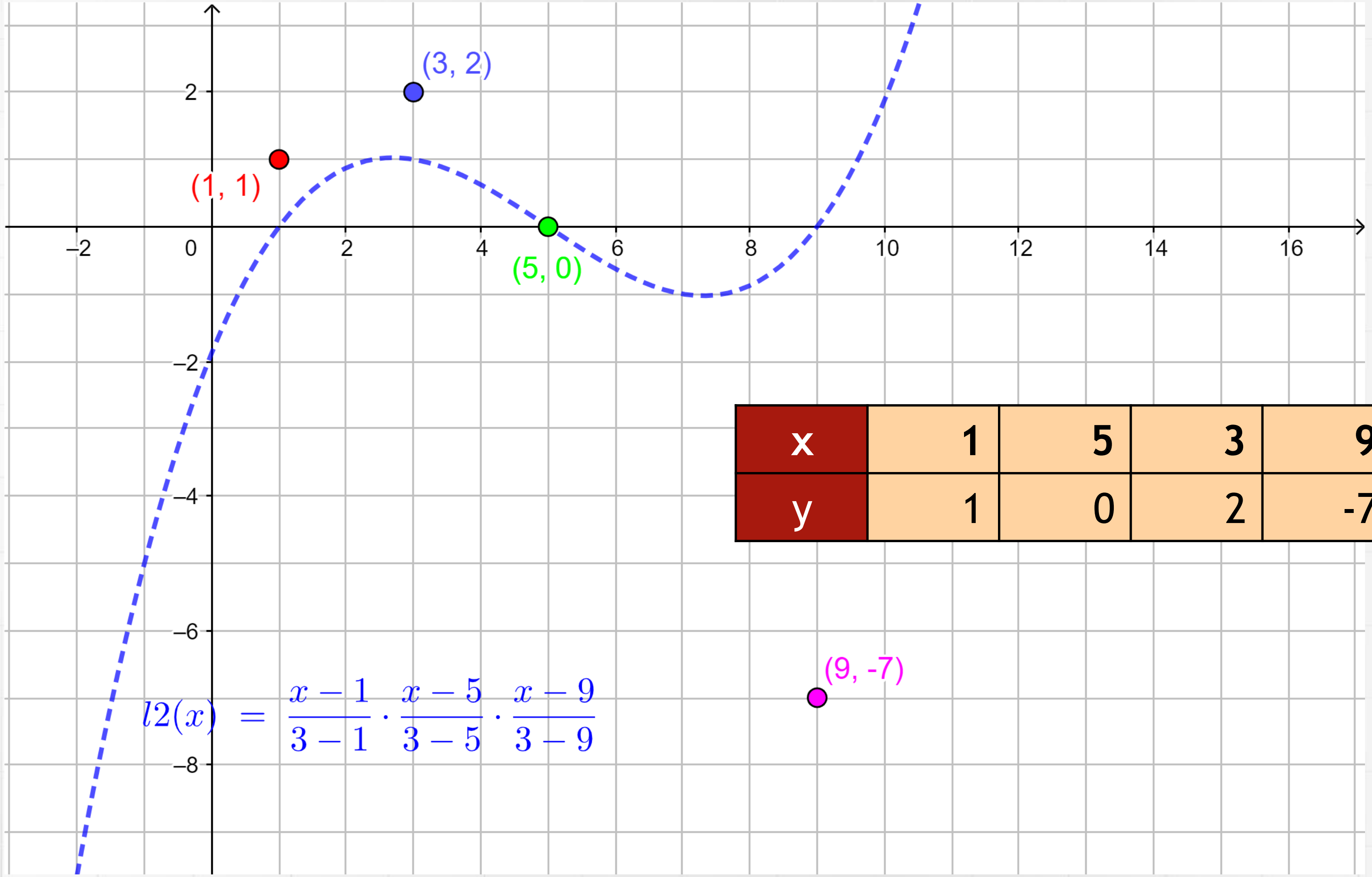
x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Lagrange'a



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

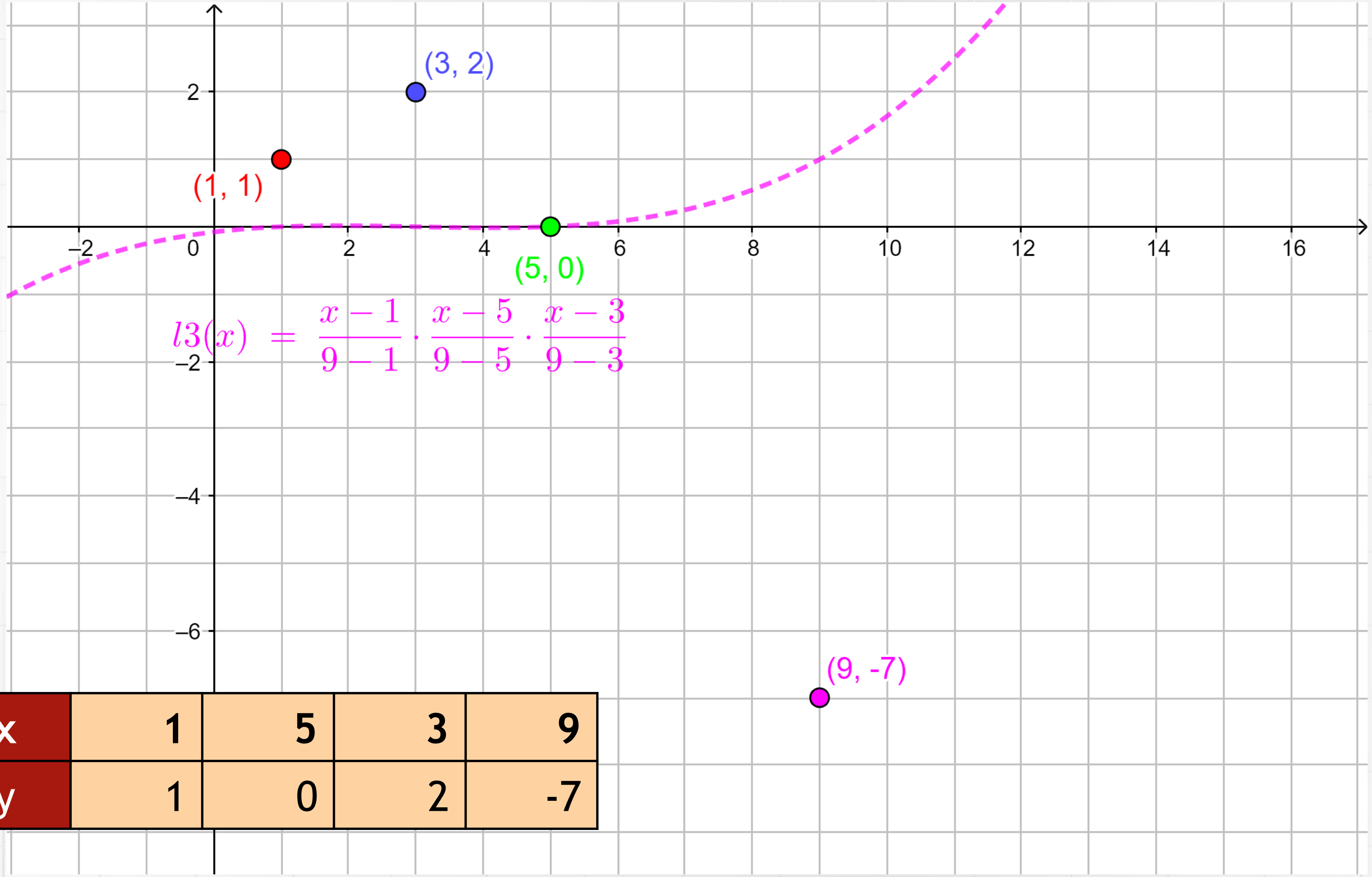
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

$$l2(x) = \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-5}{3-5} \cdot \frac{x-9}{3-9}$$

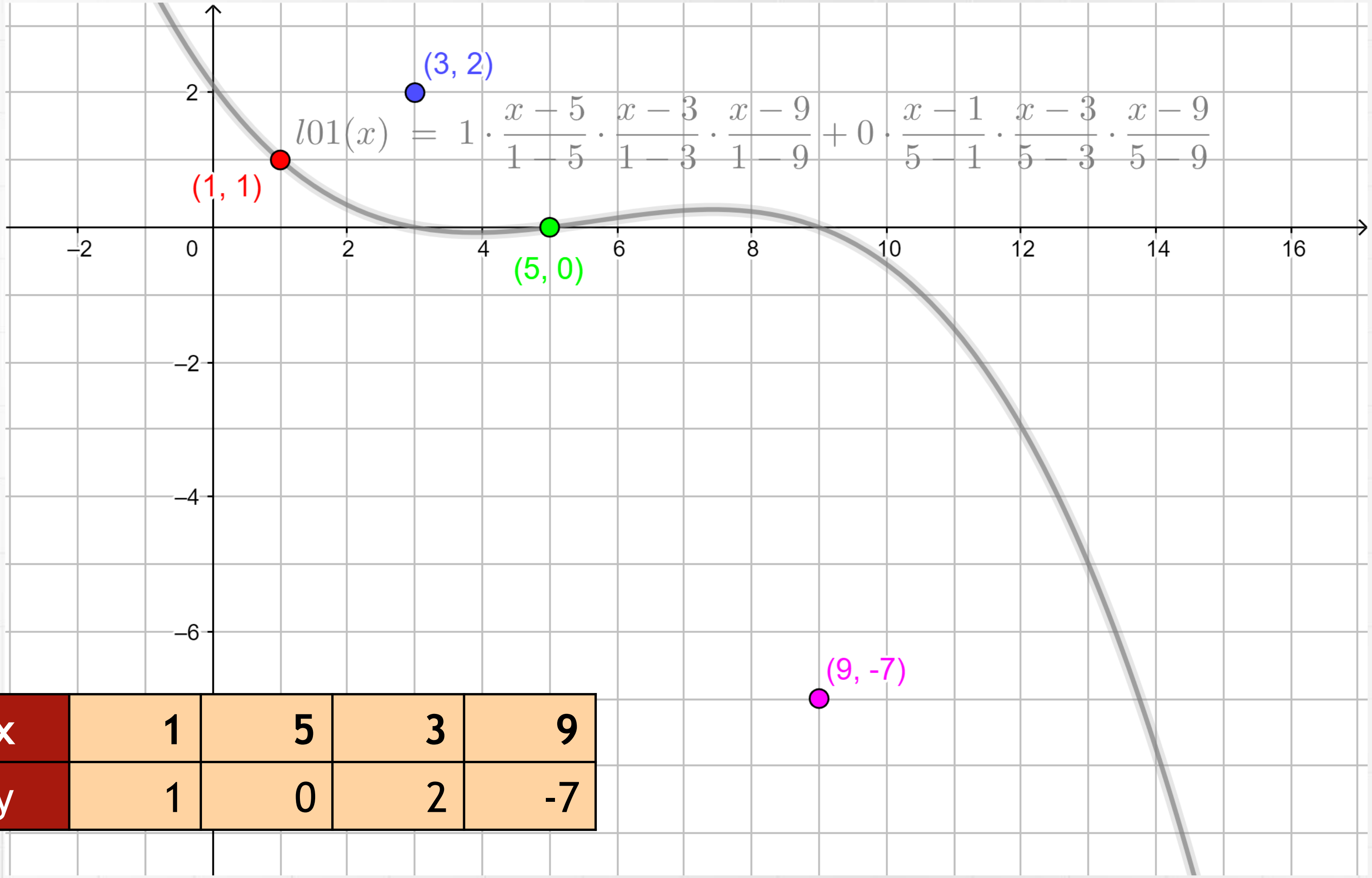
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Politechnika Wrocławska

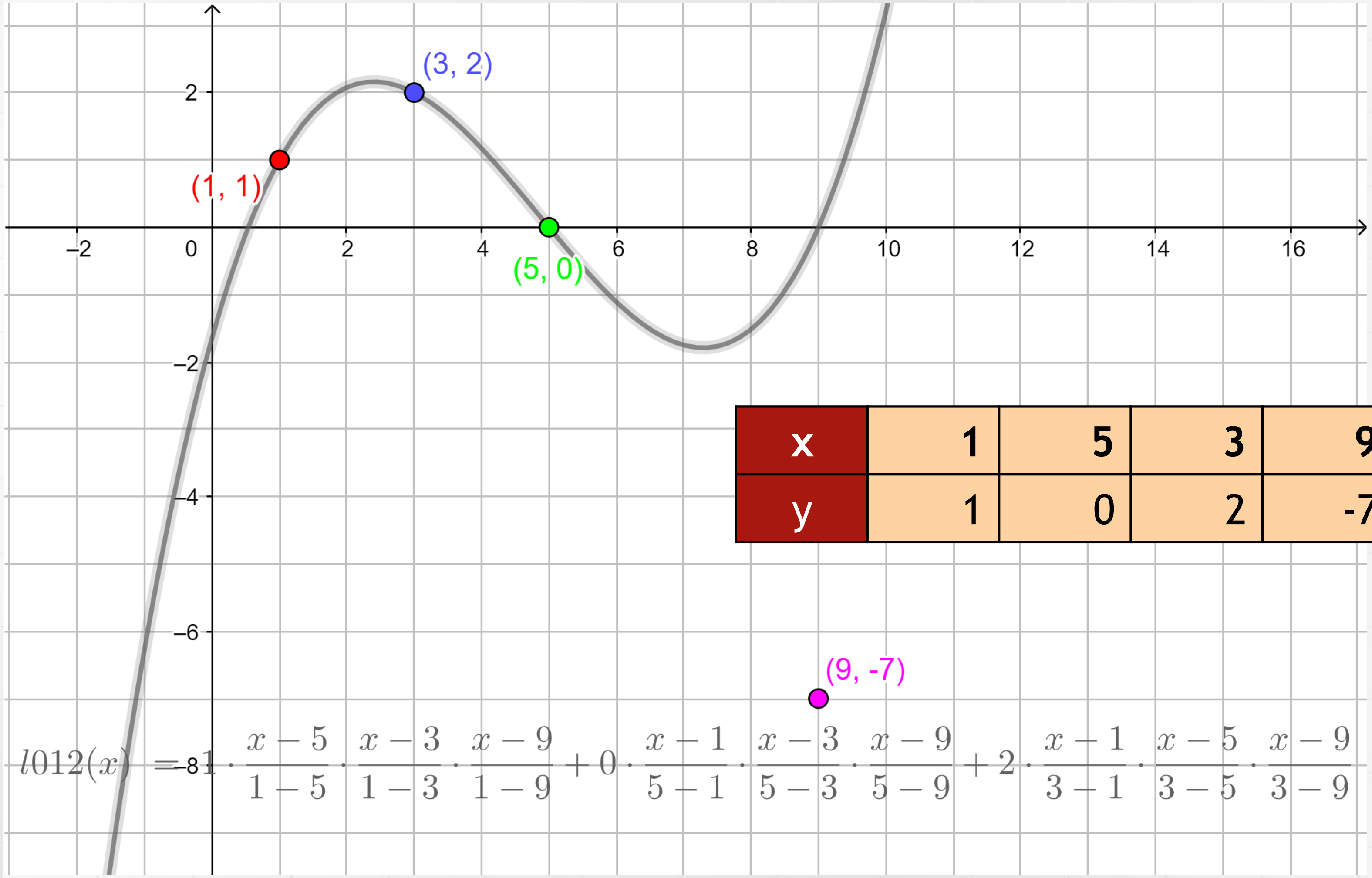
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

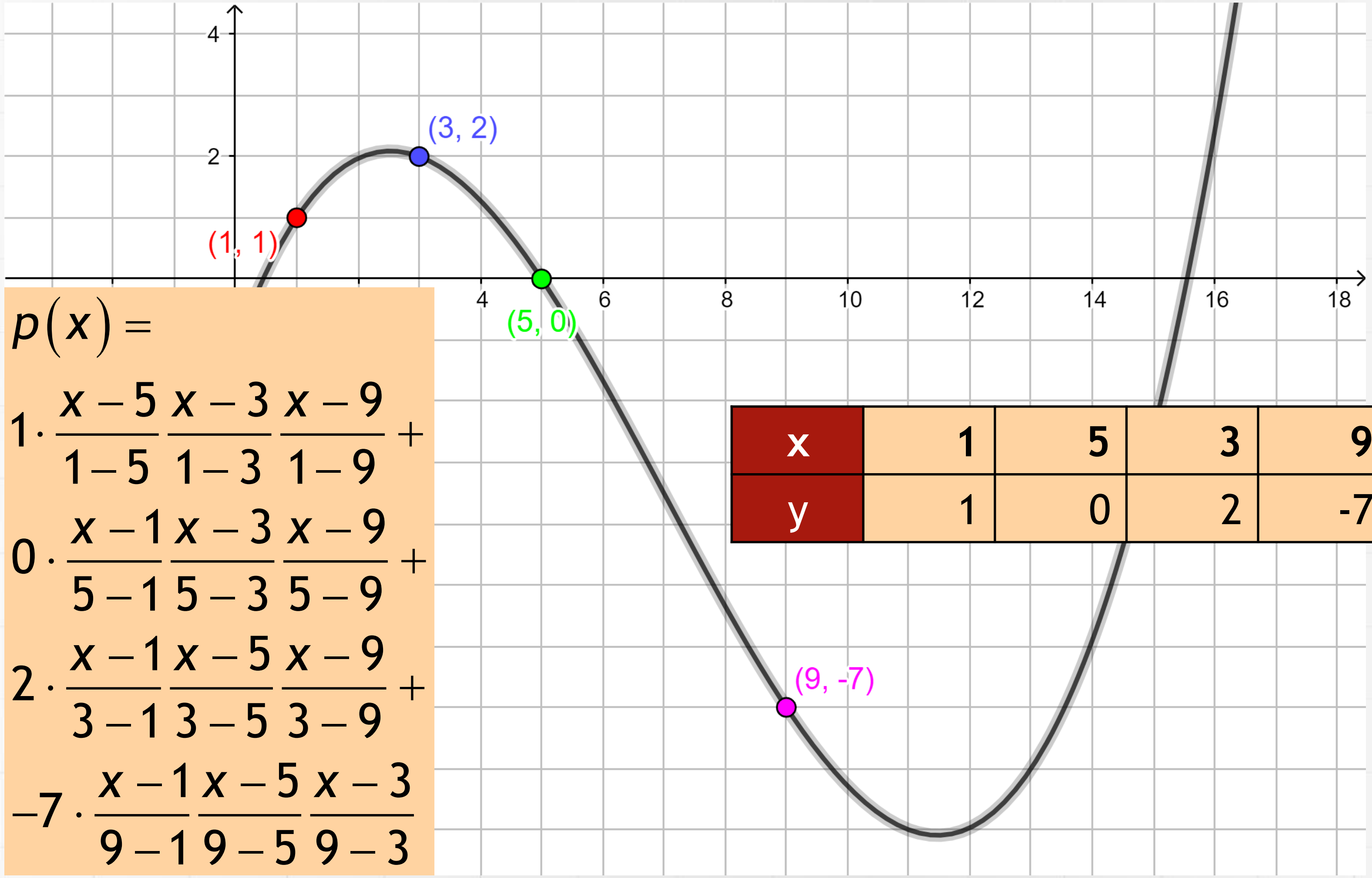
Politechnika Wrocławska

Wzór interpolacyjny Lagrange’a



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Lagrange'a



$$p(x) =$$

$$1\cdot\frac{x-5}{1-5}\frac{x-3}{1-3}\frac{x-9}{1-9}+$$

$$0\cdot\frac{x-1}{5-1}\frac{x-3}{5-3}\frac{x-9}{5-9}+$$

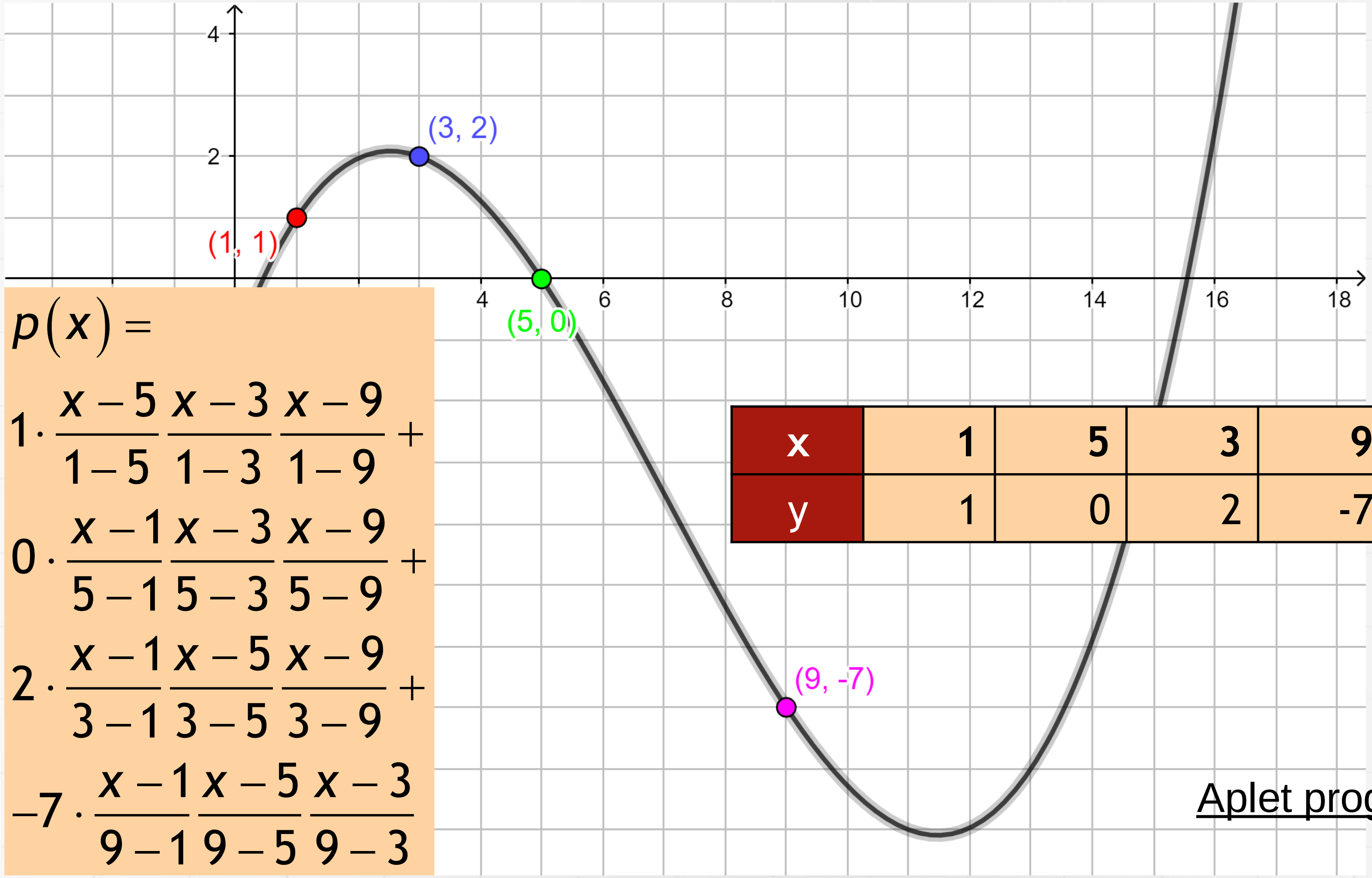
$$2\cdot\frac{x-1}{3-1}\frac{x-5}{3-5}\frac{x-9}{3-9}+$$

$$-7\cdot\frac{x-1}{9-1}\frac{x-5}{9-5}\frac{x-3}{9-3}$$

x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Politechnika Wrocławska

Wzór interpolacyjny Lagrange’a



$$p(x)=$$
$$1\cdot\frac{x-5}{1-5}\,\frac{x-3}{1-3}\,\frac{x-9}{1-9}+$$
$$0\cdot\frac{x-1}{5-1}\,\frac{x-3}{5-3}\,\frac{x-9}{5-9}+$$
$$2\cdot\frac{x-1}{3-1}\,\frac{x-5}{3-5}\,\frac{x-9}{3-9}+$$
$$-7\cdot\frac{x-1}{9-1}\,\frac{x-5}{9-5}\,\frac{x-3}{9-3}$$

x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Aplet programu geogebra

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$l_i(x) = c(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)$$

$$l_i(x) = 1$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad (0 \leq i \leq n)$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

Politechnika Wrocławska

Iloraz różnicowy

Wielomian $p(x)$ klasy Π_n spełniający dla danej funkcji f warunki interpolacyjne

$$p(x_i) = f(x_i)$$

można wyrazić za pomocą wzoru Newtona:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Współczynniki c_k zależą tylko od węzłów x_0, x_1, ..., x_k i wartości funkcji w tych węzłach.

$$c_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

Jest to iloraz różnicowy rzędu k.

Iloraz różnicowy

- iloraz różnicowy rzędu zerowego

$$f\left[x_0\right] = f\left(x_0\right)$$

- iloraz różnicowy rzędu pierwszego

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}$$

Politechnika Wrocławska

Iloraz różnicowy

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$
x_3	$f[x_3]$	

Iloraz różnicowy

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$	
x_3	$f[x_3]$		

Iloraz różnicowy

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Politechnika Wrocławska

Iloraz różnicowy

- ilorazy różnicowe spełniają zależność

$$f\left[x_0,x_1,\ldots,x_k\right]=\frac{f\left[x_1,x_2,\ldots,x_k\right]-f\left[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}\right]}{x_k-x_0}$$

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Politechnika Wrocławska

Wzór interpolacyjny Newtona

Iloraz różnicowy

1	1	-1/4	-3/8	1/32
5	0	-1	-1/8	
3	2	-3/2		
9	-7			

$$p_3(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)(x-5) + \frac{1}{32}(x-1)(x-5)(x-3)$$

Interpolacja Hermite’a

Uogólnienie interpolacji Newtona

Interpolacja Hermite’a, czyli interpolacja z węzłami wielokrotnymi. Szukamy wielomianu, który w węzłach ma dane nie tylko wartości, ale i pochodne.

Interpolacja Hermite'a

Przykład

Szukamy wielomianu p klasy Π_2 takiego, że

- $p(x_0) = c_{00}$, $p'(x_0) = c_{01}$, $p(x_1) = c_{10}$.
- Tablica ilorazów różnicowych ma wtedy postać:

x_0	c_{00}	c_{01}	c_{02}
x_0	c_{00}	c_{11}	
x_1	c_{10}		

$$\lim_{x \to x_0} f\left[x_0, x\right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$p(x) = f(x_0) + f\left[x_0, x_0\right](x - x_0) + f\left[x_0, x_0, x_1\right](x - x_0)^2$$

Politechnika Wrocławska

Interpolacja Hermite'a

Przykład 2

$$p(1)=2,\ p'(1)=3,\ p(2)=6,\ p'(2)=7,\ p''(2)=8$$

$$f[x_0,x_0,\ldots,x_0]=\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$$

1	2	3	1	2	-1
1	2	4	3	1	
2	6	7	4		
2	6	7			
2	6				

$$p(x)=2+3(x-1)+(x-1)^2+2(x-1)^2(x-2)-1(x-1)^2(x-2)^2$$

Politechnika Wrocławska

Interpolacja wielomianowa

Ważne zagadnienia

- Dokładność interpolacji
- Wybór węzłów interpolacji
- Zbieżność wielomianów interpolacyjnych

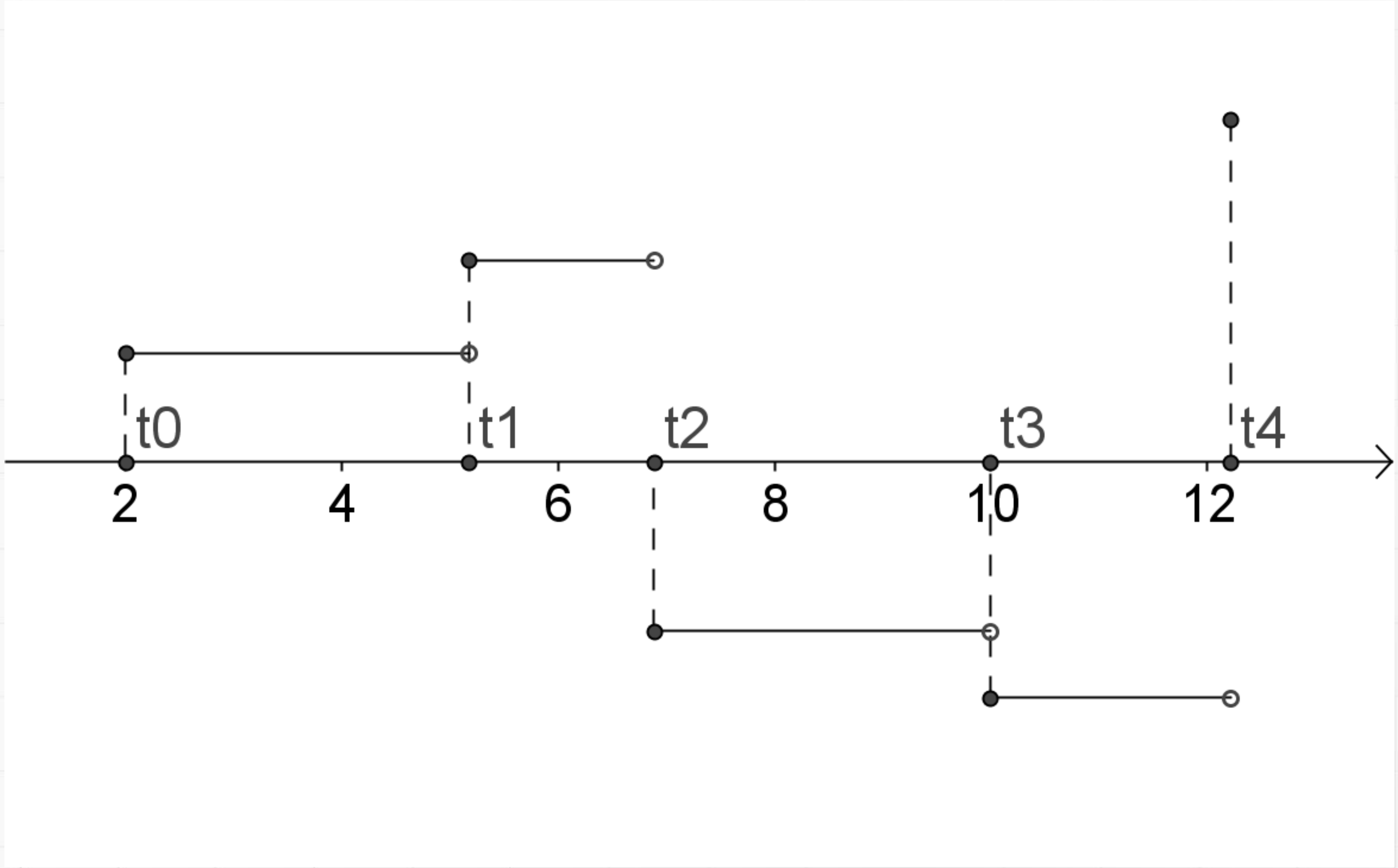
Interpolujące funkcje sklejane

Zadanie. Mamy n+1 węzłów t_0, t_1, …, t_n takich, że $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Ponadto, znamy wartości w tych węzłach. Szukamy funkcji S, która:

- W każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1})$ $(0 \leq i \leq n - 1)$ jest wielomianem klasy Π_k.
- Ma ciągłą $(k-1)$-szą pochodną w przedziale $[t_0, t_n]$.
- Funkcję S nazywamy funkcją sklejaną stopnia k.

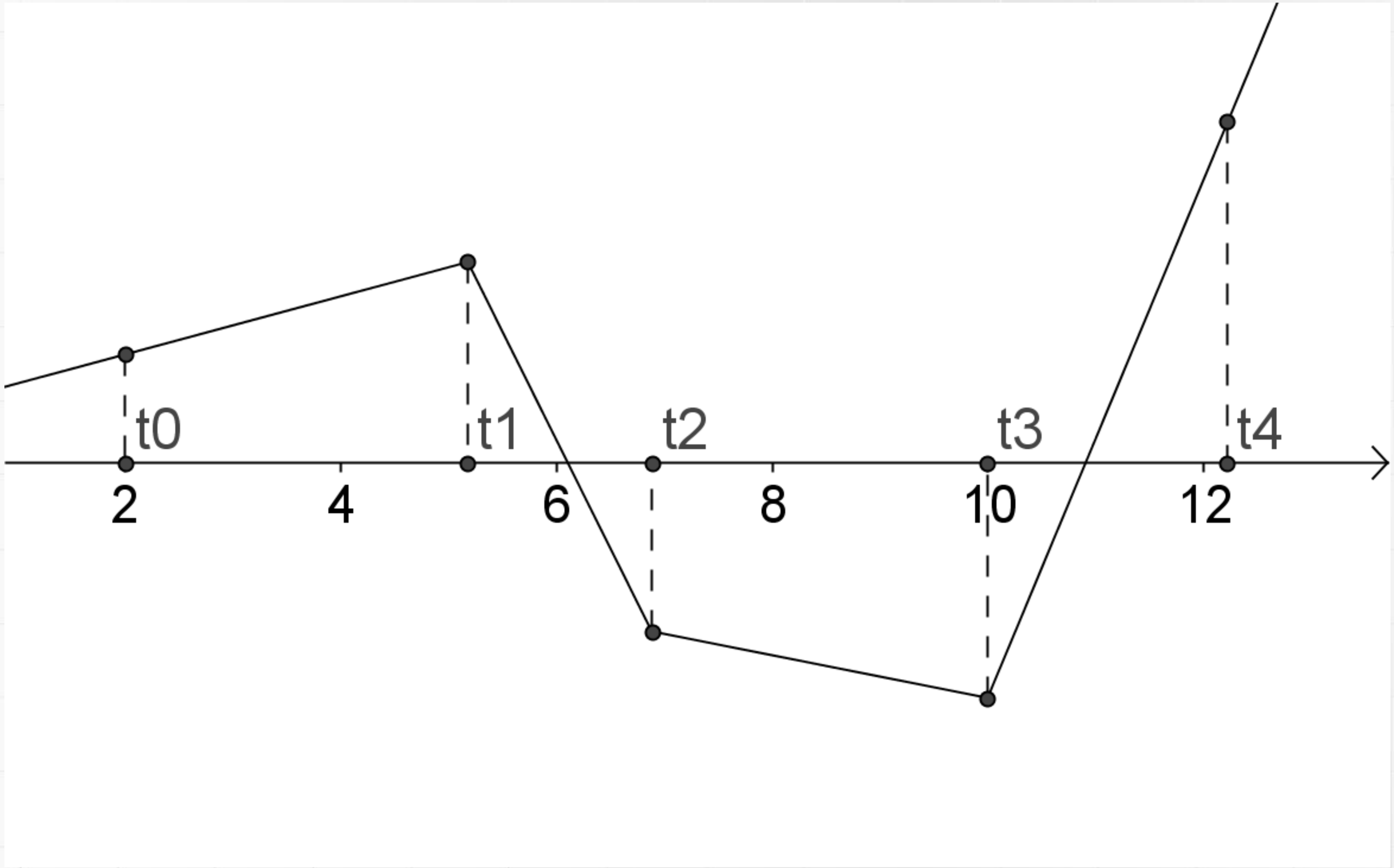
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 0



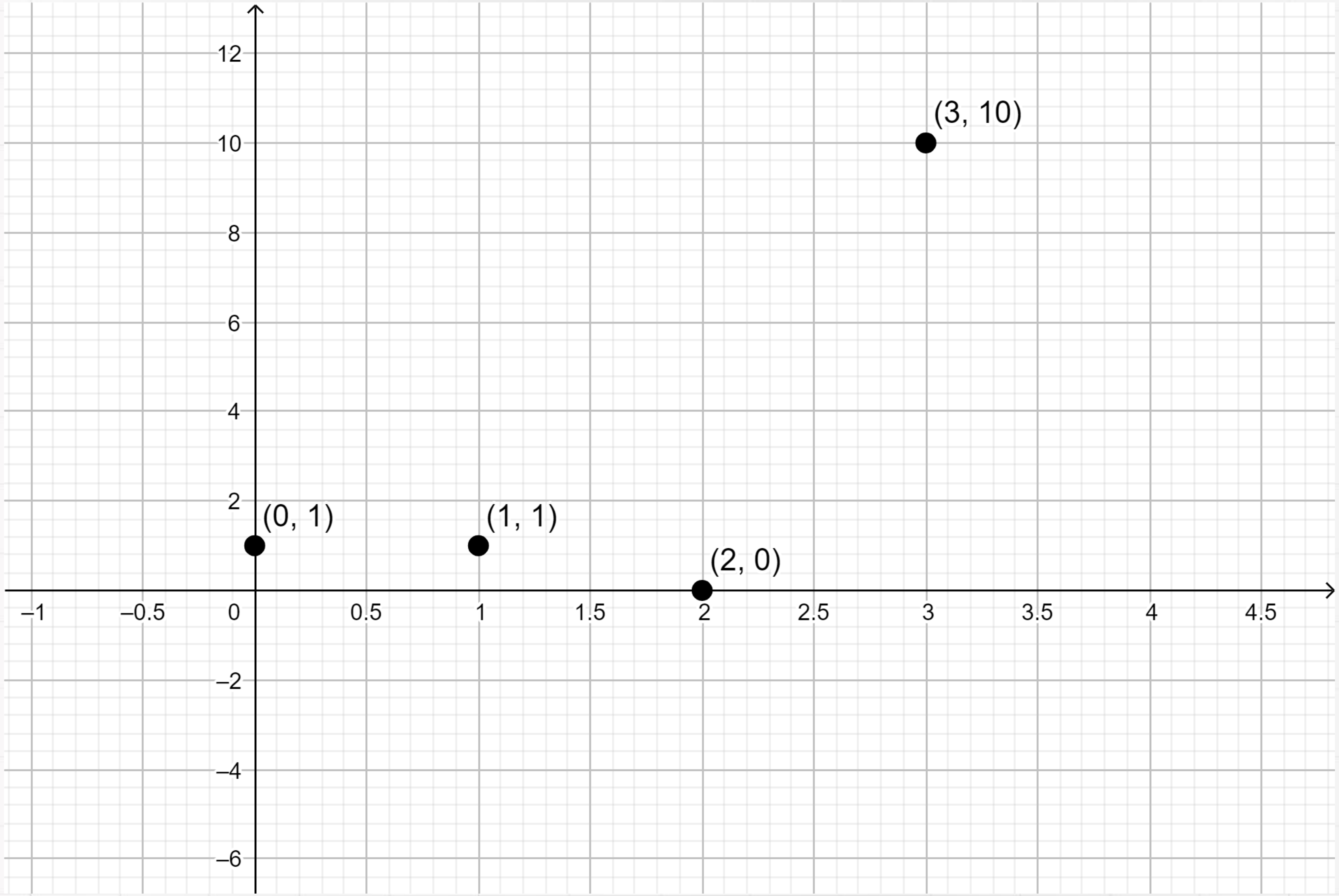
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 1



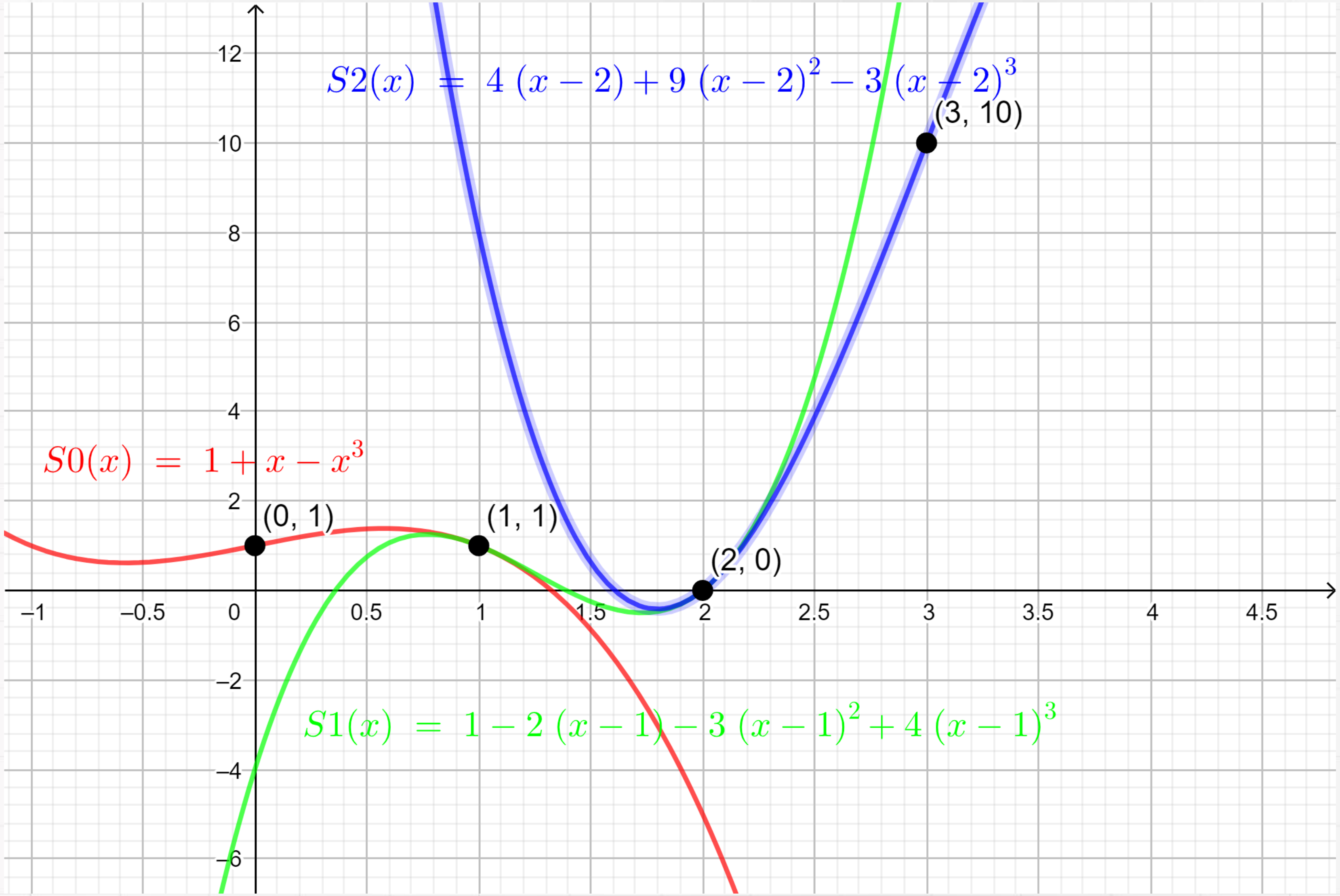
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3



Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3



Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

Szukamy takiej funkcji S, która:

- w danych węzłach t_i (dla $i = 0, 1, \ldots, n$)
- ma dane wartości y_i,
- w każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1})$ jest wielomianem S_i (dla $i = 0, 1, \ldots, n - 1$) klasy Π_3.

Wszystkie wielomiany mają łącznie $4n$ współczynników

$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

Wszystkie wielomiany mają łącznie 4n współczynników.

Warunki na współczynniki wynikają z:

- n warunków $S_i(t_i) = y_i$ (i = 0, …, n−1)
- n warunków $S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$ (i = 0, …, n−1)
- ciągłość pochodnej S' daje jeden warunek $S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$ (i = 1, …, n−1) w każdym węźle wewnętrznym (łącznie n−1)
- ciągłość drugiej pochodnej S'' daje n−1 warunków.

W sumie mamy 4n−2 równań.

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

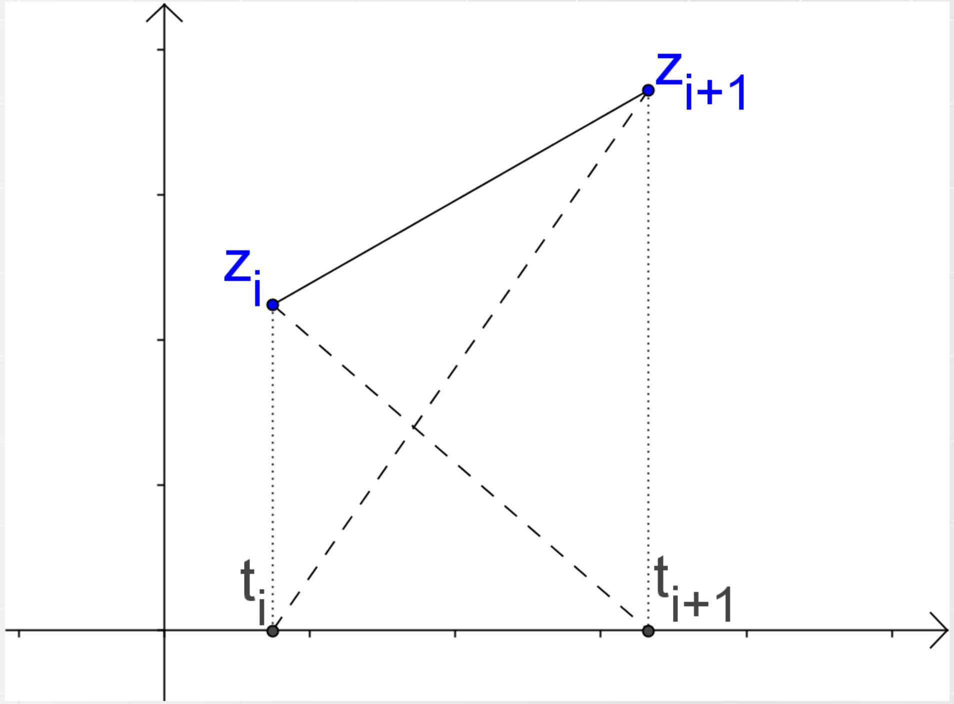
- $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
- $S'_i(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$
- $S''_i(x) = 6a_i x + 2b_i$
- $S'''_i(x) = 6a_i$

- funkcja $S_i''(x)$ jest liniowa
- wykorzystując pomocnicze wielkości $z_i = S''_i(t_i)$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S''_i(x) = \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - t_i) + \frac{z_i}{h_i}(t_{i+1} - x)$$



$$h_i = t_{i+1} - t_i$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + C(x - t_i) + D(t_{i+1} - x)$$

Stałe całkowania C i D można wyznaczyć z warunków

$$S_i(t_i) = y_i \qquad S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \\ + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x)$$

Politechnika Wrocławska

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

Aby wyznaczyć wielkości z_i korzystamy z warunków

$S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$ ($i = 1, \ldots, n-1$)

$$S_i'(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 + \frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \\ + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S_i'(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 - \frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + $$
$$+ \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)$$

$$S_i'(t_i) = -\frac{h_i}{3} z_i - \frac{h_i}{6} z_{i+1} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

$$S_i'(t_{i+1}) = \frac{h_i}{3} z_{i+1} + \frac{h_i}{6} z_i - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

$$S_{i-1}'(t_i) = \frac{h_{i-1}}{3} z_i + \frac{h_{i-1}}{6} z_{i-1} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}}$$

Politechnika Wrocławska

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$1 \le i \le n-1$$

$$z_0 = 0, \quad z_n = 0$$

$$u_i = 2(h_{i-1} + h_i), \quad b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i), \quad v_i = b_i - b_{i-1}$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i)\Big(C_i + (x - t_i)\big(B_i + (x - t_i)A_i\big)\Big)$$

$$A_i = \frac{1}{6h_i}(z_{i+1} - z_i)$$

$$B_i = \frac{z_i}{2}$$

$$C_i = -\frac{h_i}{6}(z_{i+1} + 2z_i) + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

Politechnika Wrocławska

Podsumowanie (1)

- Wielomian interpolujący
  - jednoznaczność
  - istnienie
- Wzór interpolacyjny Newtona
  - przykład konstrukcji
- Wzór interpolacyjny Lagrange’a
  - przykład konstrukcji
  - wzór ogólny

Politechnika Wrocławska

Podsumowanie (2)

- Ilorazy różnicowe
  - wzór ogólny interpolacji Newtona
- Interpolacja Hermite’a
  - uogólnienie interpolacji Newtona
- Interpolacja funkcjami sklejanymi
  - wyznaczanie współczynników wielomianów