



Politechnika
Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

W110PA-SM0060G

rok akademicki 2023/24

semestr letni

Wykład 2

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220



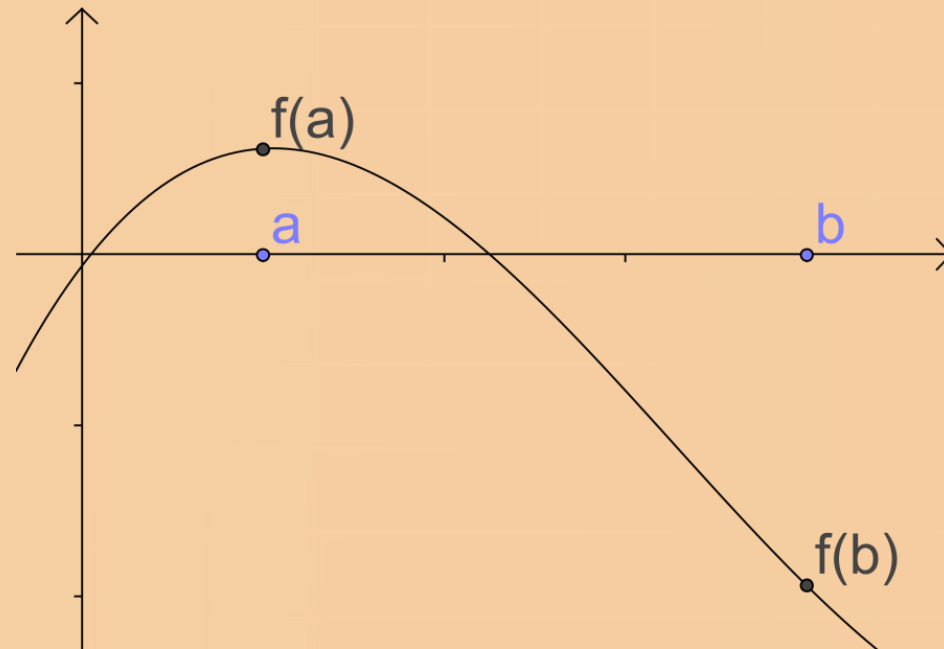
Plan prezentacji

- Metody wyznaczania miejsc zerowych
 - Metoda bisekcji
 - Metoda Newtona i metoda siecznych
- Zbieżność
- Notacja O i o

Metoda bisekcji

Twierdzenie Darboux

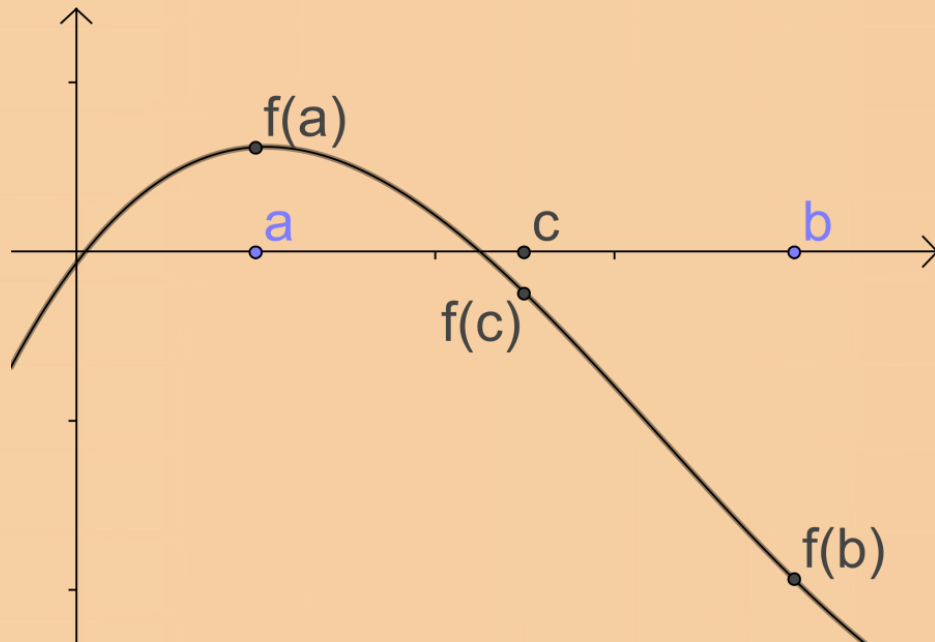
- Jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$ i jeśli $f(a)f(b) < 0$, to funkcja ta musi mieć zero w (a,b) .



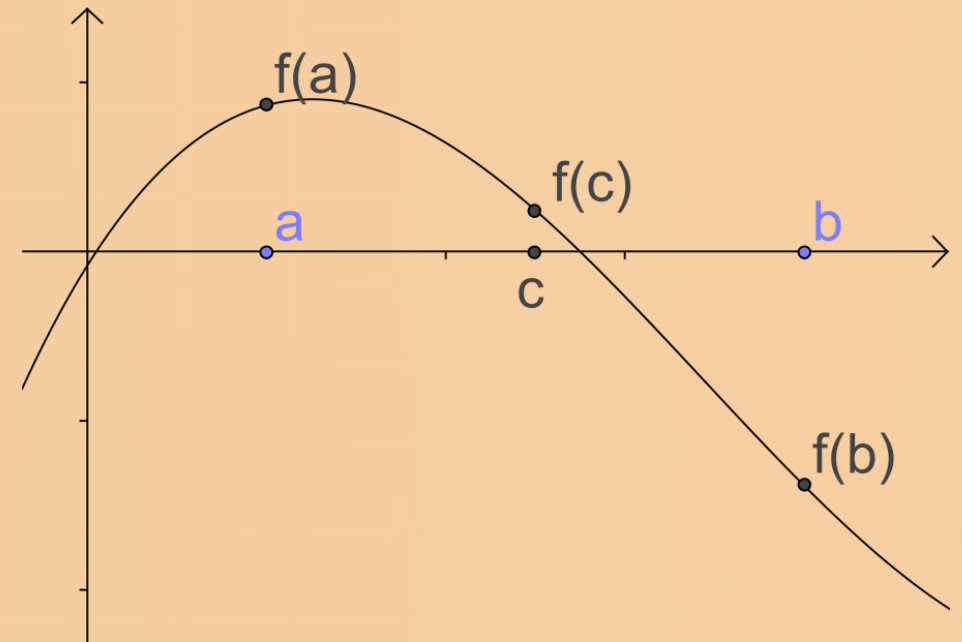
Metoda bisekcji

- Wyznaczamy punkt $c = \frac{1}{2}(a+b)$ oraz wartość funkcji $f(c)$

jeśli $f(a)f(c) < 0$ to $b = c$

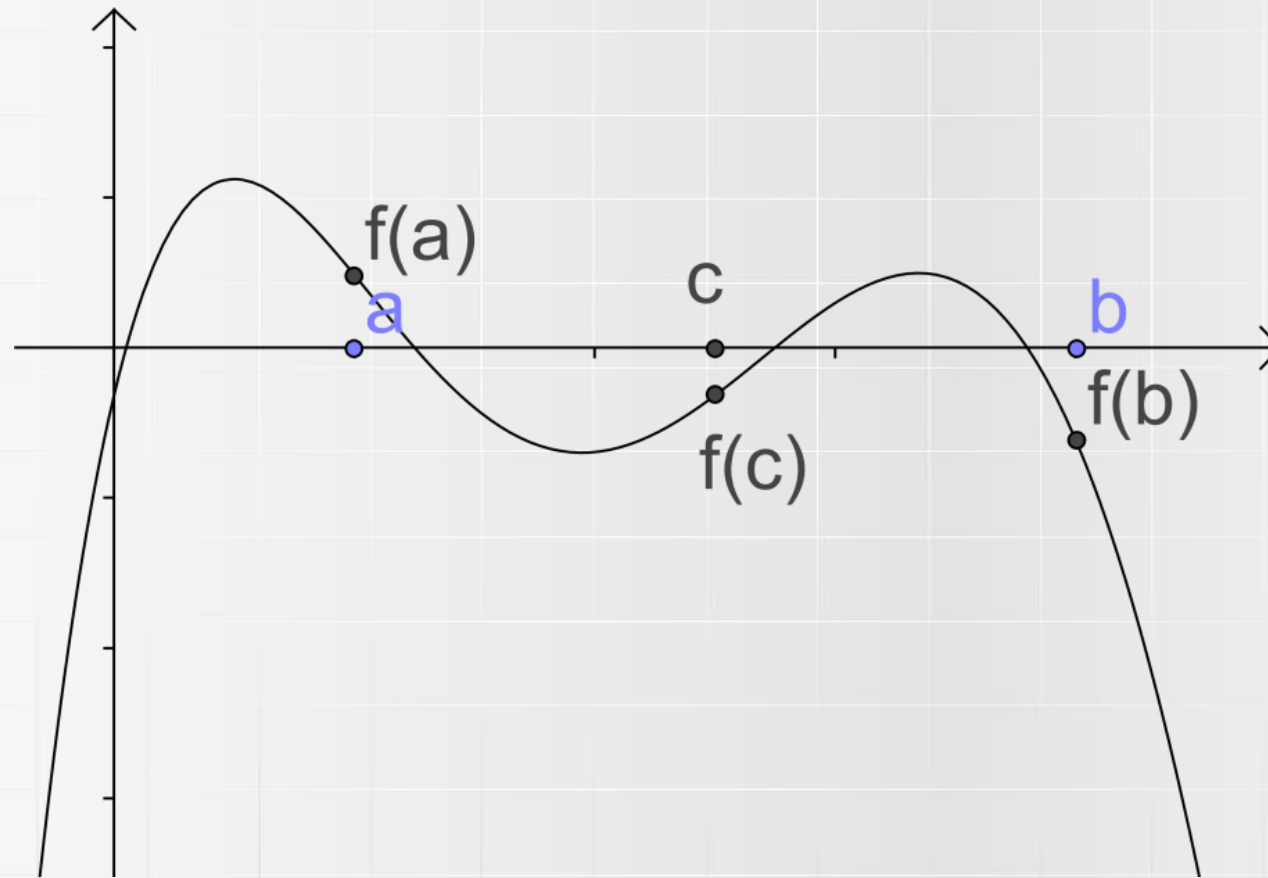


jeśli $f(b)f(c) < 0$ to $a = c$



Metoda bisekcji

jeśli $f(a)f(c) < 0$ to $b = c$



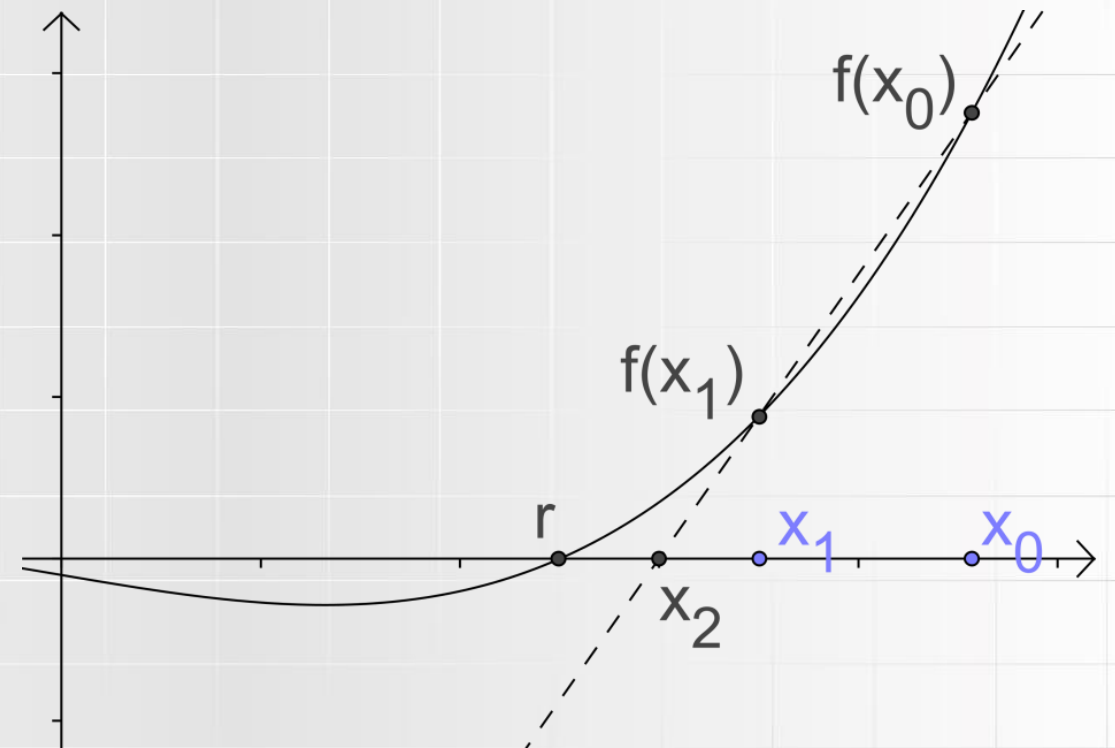
Metoda bisekcji

Kryteria zakończenia:

- przekroczenie maksymalnej liczby kroków,
- zadowalająco mały błąd,
- zadowalająco mała wartość funkcji.

Metoda siecznych

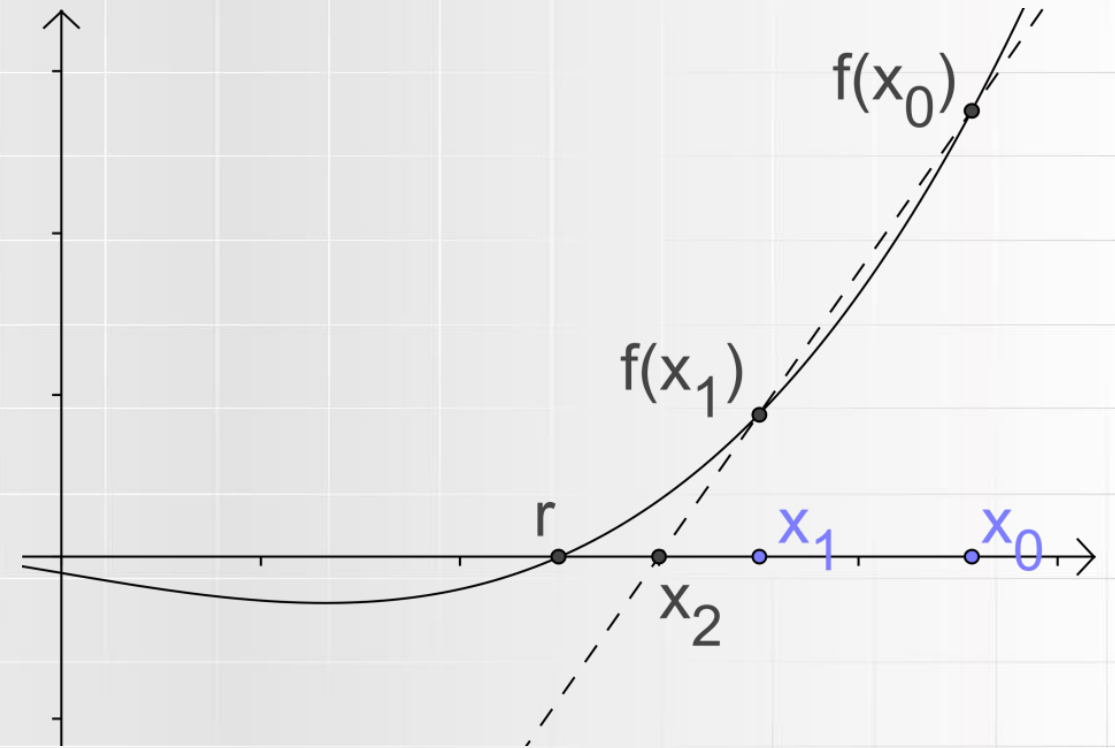
$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



Metoda Newtona

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Zbieżność

W wielu przypadkach program komputerowy generuje ciąg przybliżeń rozwiązania. Zbieżność określa jak szybko uzyskamy dostatecznie dobre przybliżenie.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e \approx 2,718281828$$

$$x_1 = 2,00000\ 0$$

$$x_2 = 2,25000\ 0$$

$$x_5 = 2,48832\ 0$$

$$x_{10} = 2,59374\ 2$$

$$x_{100} = 2,70481\ 4$$

$$x_{1000} = 2,71692\ 4$$

Zbieżność

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_n + 1}{x_{n-1} + x_n}, x_0 = 0, x_1 = 2$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 0,5$$

$$x_3 = 0,8$$

$$x_4 = 1,076923077$$

$$x_5 = 0,991803278$$

$$x_6 = 0,999695214873514$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}, x_1 = 2$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1,5$$

$$x_3 = 1,416667$$

$$x_4 = 1,414216$$

$$\sqrt{2} = 1,414213$$

Rząd zbieżności

Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do x^* .

Zbieżność jest co najmniej *liniowa*, jeśli istnieją stała $c < 1$ i liczba całkowita N takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*| \quad (n \geq N)$$

Zbieżność jest co najmniej *nadliniowa*, jeśli istnieje ciąg zbieżny do 0 $\{\varepsilon_n\}$ i liczba całkowita N takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \varepsilon_n|x_n - x^*| \quad (n \geq N)$$

Rząd zbieżności

Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do x^* .

Zbieżność jest co najmniej *kwadratowa*, jeśli istnieją stała dodatnia C i liczba całkowita N takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2 \quad (n \geq N)$$

Zbieżność jest co najmniej *rzędu α* , jeśli istnieją stała dodatnia C , stała $\alpha > 1$ i liczba całkowita N takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^\alpha \quad (n \geq N)$$

Notacja O i o

Niech $\{x_n\}$ i $\{\alpha_n\}$ będą dwoma różnymi ciągami.

$$x_n = O(\alpha_n)$$

jeśli istnieją takie stałe C i n_0 , że $|x_n| \leq C|\alpha_n|$ dla każdego $n \geq n_0$.

$$x_n = o(\alpha_n)$$

jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{\alpha_n} \right) = 0$. Istnieje ciąg liczb nieujemnych zbieżny do 0 taki, że $|x_n| \leq \varepsilon_n |\alpha_n|$.

Notacja O i o

Jeśli $x_n \rightarrow 0, \alpha_n \rightarrow 0$ oraz $x_n = O(\alpha_n)$ to ciąg $\{x_n\}$ dąży do 0 *co najmniej tak szybko jak* $\{\alpha_n\}$.

Jeśli $x_n \rightarrow 0, \alpha_n \rightarrow 0$ oraz $x_n = o(\alpha_n)$ to ciąg $\{x_n\}$ dąży do 0 *szybciej niż* $\{\alpha_n\}$.

$$\frac{n+1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{5}{n} + e^{-n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n \ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

$$e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Notacja O i o

Notacji tej używa się nie tylko dla ciągów.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

Istnieją otoczenie punktu 0 i stała C takie, że w tym otoczeniu

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq C|x^5|.$$

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Istnieją takie stałe r i C , że $|f(x)| \leq C|g(x)|$ dla każdego $x \geq r$.

$$\sqrt{x^2 + 1} = O(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$

Notacja O i o

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow x^*)$$

jeśli istnieją takie stałe C i otoczenie punktu x^* takie, że w tym otoczeniu

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Podobnie

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow x^*)$$

jeśli $\lim_{x \rightarrow x^*} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0$

Podsumowanie

- Metody wyznaczania miejsc zerowych
 - Metoda bisekcji
 - Metoda Newtona i metoda siecznych
- Zbieżność
- Notacja O i o