Politechnika Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

W11OPA-SM0060G

rok akademicki 2023/24

semestr letni

Wykład 1

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220

unite! University Network for Innovation, Technology and Engineering

HR EXCELLENCE IN RESEARCH

Evaluated by IEP INSTITUTIONAL EVALUATION PROGRAMME www.iep-qaa.org

Plan wykładu

- Zapis liczb w różnych układach
- Typy danych numerycznych
- Reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb
- Dokładność operacji na liczbach zmiennoprzecinkowych

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*

Arytmetyka komputerowa
Zapis liczb w różnych układach

$814{,}72 =$

$= 8\times10^{2} + 1\times10^{1} + 4\times10^{0} + 7\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$

$(1110{,}10100)_2 =$

$= 1\times2^{3} + 1\times2^{2} + 1\times2^{1} + 0\times2^{0} + 1\times2^{-1} +$

$0\times2^{-2} + 1\times2^{-3} + 0\times2^{-4} + 0\times2^{-5} =$

$= 8 + 4 + 2 + 0{,}5 + 0{,}125 = (14{,}625)_{10}$

$\phi = 1{,}618033988\ 7\ldots$

Arytmetyka komputerowa

Zapis liczb w różnych układach

$$\frac{1}{2} = (0{,}5)_{10} = (0{,}1)_2$$

$$\frac{1}{10} = (0{,}1)_{10} = (0{,}00011001100\ldots)_2$$

$$\frac{1}{3} = (0{,}33333\ldots)_{10} = (0{,}01010101\ldots)_2$$

Politechnika Wrocławska

Typy danych

- całkowite
- zmiennoprzecinkowe

Politechnika Wrocławska

Typy danych

`double`	podwójna precyzja (64 bity)
`single`	pojedyncza precyzja (32 bity)
`int8`	8-bitowa liczba całkowita ze znakiem (signed integer)
`int16`	16-bitowa liczba całkowita ze znakiem
`int32`	32-bitowa liczba całkowita ze znakiem
`int64`	64-bitowa liczba całkowita ze znakiem
`uint8`	8-bitowa liczba całkowita bez znaku (unsigned integer)
`uint16`	16-bitowa liczba całkowita bez znaku
`uint32`	32-bitowa liczba całkowita bez znaku
`uint64`	64-bitowa liczba całkowita bez znaku

Typy danych

Liczby zmiennoprzecinkowe

$$x = \pm r \times 10^n, \quad r \in [1,10), \quad n \in C$$

$$x = \pm q \times 2^n, \quad q \in [1,2), \quad n \in C$$

znak	cecha	mantysa

$$x = (-1)^s \cdot (1,q_1q_2q_3\ldots) \times 2^{n-b}$$

bias
przesunięcie

Typy danych

Liczby zmiennoprzecinkowe

- rozmiar i zachowanie zależy od implementacji
- standard IEEE 754 określa arytmetyki:
  - pojedynczej precyzji (32 bity)
  - podwójnej precyzji (64 bity)

Arytmetyka komputerowa
Reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb

- Liczby pojedynczej precyzji (przesunięcie 127)

z	c	c	c	c	c	c	c	c	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2

- Liczby podwójnej precyzji (przesunięcie 1023)

z	c	m
1	2-12	13-64

- 8-bitowa liczba zmiennopozycyjna (przesunięcie 3)

z	c	c	c	m	m	m	m
1	2	3	4	5	6	7	8

Politechnika Wrocławska

Arytmetyka komputerowa

Reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb

0	0	1	1	0	0	0	0	+1.	0	0	0	0	$\times 2^{3-3}$	= 1,	
0	0	1	1	1	0	0	0	+1.	1	0	0	0	$\times 2^{3-3}$	= 1,5	
0	0	1	1	0	0	0	1	+1.	0	0	0	1	$\times 2^{3-3}$	= 1,0625	$=1+2^{-4}$
0	0	1	0	0	0	0	0	+1.	0	0	0	0	$\times 2^{2-3}$	= 0,5	
0	0	0	1	0	0	0	0	+1.	0	0	0	0	$\times 2^{1-3}$	= 0,25	$= 2^{-2}$
0	1	1	0	0	0	0	0	+1.	0	0	0	0	$\times 2^{6-3}$	= 8,0	
0	1	1	0	1	1	1	1	+1.	1	1	1	1	$\times 2^{6-3}$	= 15,5	$= 2^3(2-2^{-4})$
1	1	0	1	0	0	1	0	-1.	0	0	1	0	$\times 2^{5-3}$	= -4,5	

Politechnika Wrocławska

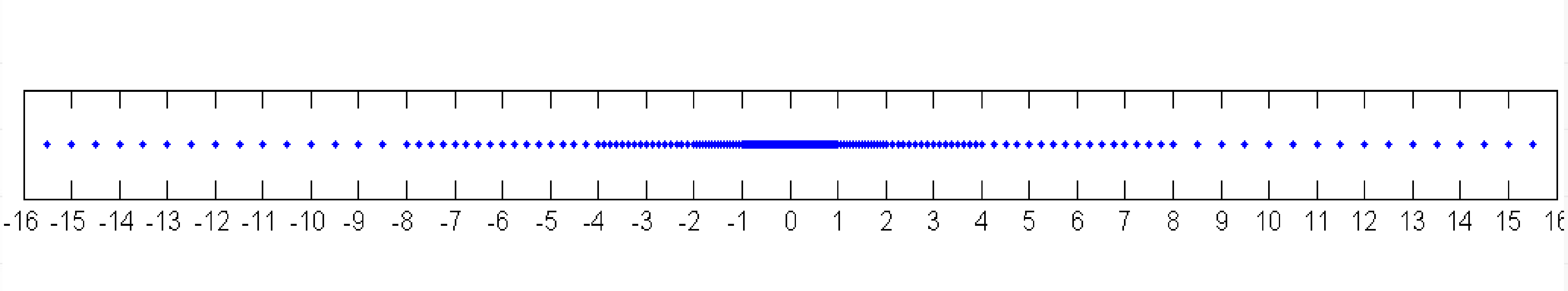
Arytmetyka komputerowa

Reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb

0	0	0	0	0	0	0	0		= +0,
1	0	0	0	0	0	0	0		= -0,
0	1	1	1	0	0	0	0		= +Inf (infinity)
1	1	1	1	0	0	0	0		= -Inf (infinity)
0	0	0	0	1	0	0	0	+0. 1 0 0 0 $\times 2^{1-3}$	= 0,125
0	0	0	0	0	0	0	1	+0. 0 0 0 1 $\times 2^{1-3}$	= 0,015625 $=2^{-2}\times 2^{-4}$
0	1	1	1	1	0	0	0		= NaN (not a number)

Arytmetyka komputerowa
Reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb

Rozmieszczenie liczb zmiennopozycyjnych



- precyzja arytmetyki (epsilon maszynowy ε) $0{,}0625 = 2^{-4}$
- największa liczba zmiennopozycyjna $15{,}5 = (2-2^{-4})2^{3}$
- najmniejsza liczba zmiennopozycyjna
  - znormalizowana $0{,}25 = 2^{-2}$
  - zdenormalizowana $0{,}015625 = 2^{-6}$

Arytmetyka komputerowa
Reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb

Jak wygląda reprezentacja liczby $^4/_9$ w rozważanej arytmetyce?

$^4/_9 = (0{,}0111000(111000)\ldots)_2$

po normalizacji

$^4/_9 = (1{,}\underline{1100}\underline{\underline{0}}111000\ldots)_2\times 2^{-2} = (1{,}\underline{1100}\underline{\underline{0}}111000\ldots)_2\times 2^{1-3}$

0	0	0	1	1	1	0	0

$fl(^4/_9) = 1{,}1100\times 2^{-2} = (1+0{,}5+0{,}25)\times 0{,}25 = 0{,}4375$

błąd względny $|\delta| \le \dfrac{\varepsilon}{2}$

Arytmetyka komputerowa
Reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb

Wynikiem operacji matematycznych na liczbach maszynowych zwykle nie jest liczba maszynowa. Przyjmujemy, że po wykonaniu działania mantysa jest normalizowana, a cecha odpowiednio korygowana.

W celu ilustracji rozpatrzymy arytmetykę liczb dziesiętnych z mantysą pięciocyfrową.

Niech $x = 9{,}7541 \times 10^{2}$, $y = 2{,}7849 \times 10^{4}$, wtedy

$x + y = 2{,}882441000 \times 10^{4}$, $fl(x + y) = 2{,}8824 \times 10^{4}$, $\delta = 1{,}43 \times 10^{-5}$

$x - y = -2{,}687359000 \times 10^{4}$, $fl(x - y) = -2{,}6874 \times 10^{4}$, $\delta = 1{,}53 \times 10^{-5}$

$x \times y = 2{,}716419309 \times 10^{7}$, $fl(x \times y) = 2{,}7164 \times 10^{7}$, $\delta = 7{,}1 \times 10^{-6}$

$x / y = 3{,}502495601 \times 10^{-2}$, $fl(x / y) = 3{,}5025 \times 10^{-2}$, $\delta = 1{,}3 \times 10^{-6}$

Arytmetyka komputerowa
Działania na liczbach zmiennoprzecinkowych

Przykładem sytuacji, w której mogą pojawić się duże błędy względne jest odejmowanie bliskich sobie liczb

$$
\begin{aligned}
x &= 8{,}147869223178015,\\
fl(x) &= 8{,}14787,\\
y &= 8{,}147235863931790,\\
fl(y) &= 8{,}14724,\\
x - y &= 0{,}000633359246225,\\
fl(x) - fl(y) &= 0{,}00063,\\
fl(fl(x) - fl(y)) &= 6{,}3000\times 10^{-4}
\end{aligned}
$$

$$\left|\frac{(x-y)-\mathrm{fl}\left[\mathrm{fl}(x)-\mathrm{fl}(y)\right]}{x-y}\right| = \left|\frac{0{,}000633359246225-0{,}00063}{0{,}000633359246225}\right| \approx 0{,}0053$$

Arytmetyka komputerowa
Działania na liczbach zmiennoprzecinkowych

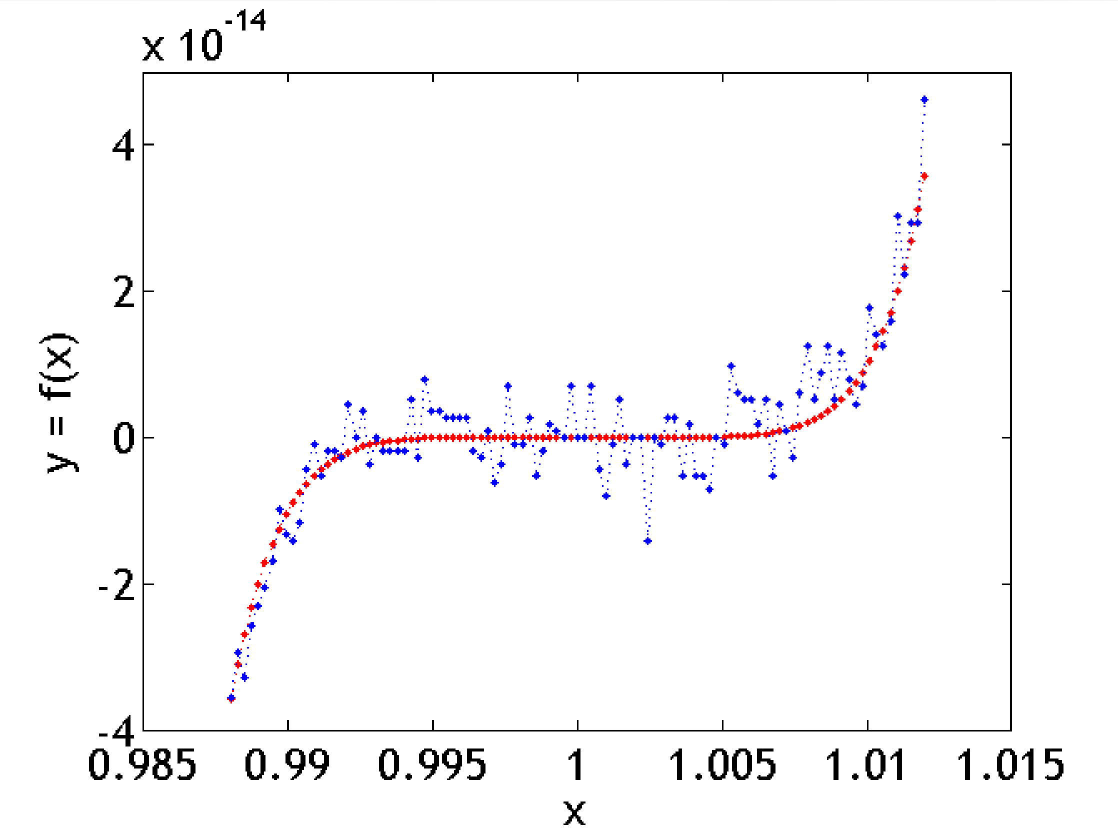
$$y \leftarrow \sqrt{x^2+1}-1$$

$$\sqrt{x^2+1}-1=\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$y \leftarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Arytmetyka komputerowa

Działania na liczbach zmiennoprzecinkowych



$$f(x) = (x-1)^7 = x^7-7x^6+21x^5-35x^4+35x^3-21x^2+7x-1$$

Politechnika Wrocławska

Podsumowanie

- Zapis liczb w różnych układach
- Typy danych numerycznych
- Reprezentacja zmiennoprzecinkowa liczb
- Dokładność operacji na liczbach zmiennoprzecinkowych