Metody numeryczne w fizyce (W11OPA-SM0060G)

Laboratorium 7

1. (2 pkt.)
   a. Rozwiąż numerycznie równanie zaniku promieniotwórczego:

   $$\frac{dN_U}{dt} = -\frac{N_U}{\tau},$$

   implementując algorytm Eulera. Obliczenia przeprowadź dla stałej zaniku τ = 1 s oraz różnych wartości początkowej liczby atomów $N_U(0)$ i wielkości kroku czasowego Δt. Porównaj rozwiązania numeryczne z rozwiązaniem analitycznym. Sporządź wykresy ilustrujące błąd bezwzględny i względny w funkcji czasu.

   b. Rozwiąż numerycznie równanie zaniku promieniotwórczego wykorzystując solwer **`ode23`**.

Ruch wahadła matematycznego opisywany jest (w przybliżeniu małych drgań) równaniem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta,$$

gdzie θ – wychylenie [rad], t – czas [s], g – przyspieszenie grawitacyjne [m/s^2], L – długość wahadła [m].

2. (2 pkt.) Rozwiąż numerycznie zagadnienie początkowe dla wybranych warunków początkowych. Wykreśl zależność wychylenia i prędkości kątowej od czasu. Odczytaj z wykresów okres drgań wahadła.
   Wskazówka: zapoznaj się z wywołaniem solwerów równań różniczkowych zwracającym strukturę (**`sol = ode23(fun, t, f0)`**) oraz funkcją **`deval`**, która pozwala na interpolowanie wartość rozwiązań dla dowolnych wartości zmiennej niezależnej.

Energia mechaniczna drgań wahadła (w przybliżeniu małych drgań)

$$E = \frac{1}{2}mL^2\omega^2 + mgl\frac{\theta^2}{2}$$

jest zachowana.

3. (1 pkt) Sprawdź, czy energia mechaniczna w eksperymencie numerycznym jest zachowana. Sprawdź, jaki wpływ mają parametry solwera na wyniki (w tym na zachowanie energii mechanicznej).
   Wskazówka: zapoznaj się z funkcją **`odeset`**.

Częstotliwość drgań wahadła Ω i okres T mogą być wyznaczone analitycznie (w przybliżeniu małych drgań):

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

4. (2 pkt.) Wyznacz okres T i częstotliwość Ω drgań wahadła i sprawdź, czy wartości wyznaczone w eksperymencie numerycznym zgadzają się z wartościami analitycznymi.
   Wskazówka: wykorzystaj opcję przekazania do solwera funkcji obsługującej zdarzenia (opcja `'Events'`). Wyznacz argumenty (czasy), dla których wychylenie ma charakterystyczne wartości (np. odpowiada położeniu równowagi), a na ich podstawie wyznacz okres.

Ruch wahadła matematycznego z uwzględnieniem tłumienia opisywany jest (w przybliżeniu małych drgań) równaniem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta - 2q\frac{d\theta}{dt},$$

gdzie q – współczynnik tłumienia [1/s]. W zależności od wartości parametru tłumienia można wyróżnić reżimy drgań tłumionych słabo ($q < \Omega$), krytycznie ($q = \Omega$) i silnie ($q > \Omega$).

5. (1 pkt.) Porównaj zależność wychylenia od czasu dla przykładowych wartości parametru q. Dla drgań słabo tłumionych wyznacz okres i częstotliwość drgań. Sprawdź, czy częstotliwość drgań w eksperymencie numerycznym odpowiada wartości analitycznej $\Omega_1 = \sqrt{\Omega^2 - q^2}$.

Ruch wahadła matematycznego z uwzględnieniem tłumienia i siły wymuszającej opisywany jest (w przybliżeniu małych drgań) równaniem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta - 2q\frac{d\theta}{dt} + \varepsilon_D \sin(\Omega_D t),$$

gdzie Ω_D – częstość wymuszająca [1/s], ε_D – przyspieszenie kątowe związane z wymuszeniem. Amplituda drgań wymuszonych wynosi:

$$\theta_0 = \frac{\varepsilon_D}{\sqrt{\left(\Omega^2 - \Omega_D^2\right)^2 + \left(2q\Omega_D\right)^2}}.$$

6. (2 pkt.) Sprawdź, dla różnych parametrów wymuszenia, czy amplituda i częstotliwość drgań wymuszonych odpowiadają wartościom analitycznym. Ze szczególną uwagą przeanalizuj zachowanie układu blisko rezonansu dla małych tłumień.

Ruch wahadła matematycznego opisywany jest równaniem:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin\theta.$$

7. (2 pkt.) Rozwiąż numerycznie podane zagadnienie początkowe dla wybranych warunków początkowych. Wykreśl zależność wychylenia i prędkości kątowej od czasu. Na podstawie przeprowadzonych eksperymentów numerycznych, wyznacz zależność okresu drgań od ich amplitudy – odnieś uzyskane wyniki do wyrażenia analitycznego (Laboratorium 6).

Karol Tarnowski
Wrocław, 2024