

Ćwiczenia – lista 4

Różniczkowanie numeryczne

1. Znajdź rząd błędów wzorów przybliżonych:

a. $f'(x) \approx \frac{1}{2h}[-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)],$

b. $f''(x) \approx \frac{1}{h^2}[f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)].$

2. Udowodnij, że

a. $f'''(x) \approx \frac{1}{h^3}[f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)],$

b. $f'''(x) \approx \frac{1}{2h^3}[f(x+2h) - 2f(x+h) + 2f(x-h) - f(x-2h)].$

Znajdź rzędy błędów tych przybliżeń. Które z nich jest dokładniejsze?

Tabela współczynników dla wzorów pozwalających obliczać pochodne różnych rzędów z określeniem rzędu przybliżenia: https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_coefficient.

Całkowanie numeryczne

3. Wyprowadź wzór Newtona-Cotesa dla $n = 2$:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{6}(b-a) \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

4. Podaj wzory złożone całkowania numerycznego, oparte na następujących prostych wzorach:

a. $\int_0^1 f(x) dx \approx f(1),$

b. $\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0).$

Porównaj: D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, rozdział 7.1, 7.2.