



Politechnika
Wrocławska

Zjawiska nieliniowe w światłowodach

FTP003030W

rok akademicki 2022/23

semestr zimowy

Wykład 4

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220



Plan wykładu (1)

- Nieliniowe równanie Schrödingera
- Przypadek wektorowy
 - tensor podatności trzeciego rzędu
 - układ sprzężonych nieliniowych równań Schrödingera
- Propagacja nieliniowa w światłowodach dwójłomnych
 - o niskiej dwójłomności
 - o wysokiej dwójłomności
 - o liniowo/eliptycznie/kołowo spolaryzowanych modach własnych



Plan wykładu (2)

- Wektorowa niestabilność modulacyjna w światłowodach dwójłomnych
 - o niskiej dwójłomności
 - o wysokiej dwójłomności
 - o liniowo/eliptycznie/kołowo spolaryzowanych modach własnych



Przypadek skalarny

Równanie falowe

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left[E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \right]$$

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left[P_L(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \right]$$

$$\mathbf{P}_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{x}} \left[P_{NL}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \right]$$



Przypadek skalarny

Nieliniowa zmiana współczynnika
załamania

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{x} \left[P_{NL}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.} \right]$$

$$P_{NL}(\mathbf{r}, t) = \frac{3}{4} \varepsilon_0 \chi_{xxxx}^{(3)} |E(\mathbf{r}, t)|^2 E(\mathbf{r}, t)$$

$$\bar{n}_2 = \frac{3}{8n} \text{Re} \left(\chi_{xxxx}^{(3)} \right) \quad \Delta n = \bar{n}_2 |E|^2$$



Przypadek wektorowy

Polaryzacja nieliniowa

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\hat{x} E_x(\mathbf{r}, t) + \hat{y} E_y(\mathbf{r}, t) \right] \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}$$

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_0 \chi^{(3)} : \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

- w ośrodku izotropowym

$$\chi_{ijkl}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \chi_{xyxy}^{(3)} \delta_{ik} \delta_{jl} + \chi_{xyyx}^{(3)} \delta_{il} \delta_{jk}$$



Przypadek wektorowy

Tensor podatności trzeciego rzędu

- w ośrodku izotropowym

$$\chi_{ijkl}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} \delta_{ij} \delta_{kl} + \chi_{xyxy}^{(3)} \delta_{ik} \delta_{jl} + \chi_{xyyx}^{(3)} \delta_{il} \delta_{jk}$$

$$\chi_{xxxx}^{(3)} = \chi_{xxyy}^{(3)} + \chi_{xyxy}^{(3)} + \chi_{xyyx}^{(3)}$$

- w przypadku szkła krzemionkowego

$$\chi_{xxyy}^{(3)} = \chi_{xyxy}^{(3)} = \chi_{xyyx}^{(3)} = \frac{1}{3} \chi_{xxxx}^{(3)}$$



Przypadek wektorowy

Polaryzacja nieliniowa

$$\mathbf{P}_{\text{NL}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\hat{x} P_x(\mathbf{r}, t) + \hat{y} P_y(\mathbf{r}, t) \right] \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}$$

$$P_i = \frac{3\varepsilon_0}{4} \sum_j \left(\chi_{\text{xxyy}}^{(3)} E_i E_j E_j^* + \chi_{\text{xyxy}}^{(3)} E_j E_i E_j^* + \chi_{\text{xyyx}}^{(3)} E_j E_j E_i^* \right)$$



Przypadek wektorowy

Polaryzacja nieliniowa

$$P_i = \frac{3\varepsilon_0}{4} \sum_j \left(\chi_{xxyy}^{(3)} E_i E_j E_j^* + \chi_{xyxy}^{(3)} E_j E_i E_j^* + \chi_{xyyx}^{(3)} E_j E_j E_i^* \right)$$

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \sum_j \left(\chi_{xxyy}^{(3)} E_x E_j E_j^* + \chi_{xyxy}^{(3)} E_j E_x E_j^* + \chi_{xyyx}^{(3)} E_j E_j E_x^* \right)$$

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \left(\chi_{xxxx}^{(3)} E_x E_x E_x^* + \chi_{xxyy}^{(3)} E_x E_y E_y^* + \chi_{xyxy}^{(3)} E_y E_x E_y^* + \chi_{xyyx}^{(3)} E_y E_y E_x^* \right)$$

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left(E_x E_x E_x^* + \frac{1}{3} E_x E_y E_y^* + \frac{1}{3} E_y E_x E_y^* + \frac{1}{3} E_y E_y E_x^* \right)$$



Przypadek wektorowy

Polaryzacja nieliniowa

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left(E_x E_x E_x^* + \frac{1}{3} E_x E_y E_y^* + \frac{1}{3} E_y E_x E_y^* + \frac{1}{3} E_y E_y E_x^* \right)$$

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left(|E_x|^2 E_x + \frac{1}{3} |E_y|^2 E_x + \frac{1}{3} |E_y|^2 E_x + \frac{1}{3} E_y E_y E_x^* \right)$$

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right) E_x + \frac{1}{3} E_y^2 E_x^* \right]$$

$$P_y = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_y|^2 + \frac{2}{3} |E_x|^2 \right) E_y + \frac{1}{3} E_x^2 E_y^* \right]$$



Przypadek wektorowy

Nieliniowa zmiana współczynników
załamania

$$P_x = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right) E_x + \frac{1}{3} E_y^2 E_x^* \right]$$

$$P_y = \frac{3\varepsilon_0}{4} \chi_{xxxx}^{(3)} \left[\left(|E_y|^2 + \frac{2}{3} |E_x|^2 \right) E_y + \frac{1}{3} E_x^2 E_y^* \right]$$

$$\Delta n_x = \bar{n}_2 \left(|E_x|^2 + \frac{2}{3} |E_y|^2 \right)$$

$$\Delta n_y = \bar{n}_2 \left(|E_y|^2 + \frac{2}{3} |E_x|^2 \right)$$



Nieliniowe równanie Schrödingera - skalarnie

Rozdzielenie zmiennych

$$E(\mathbf{r}, t) = F(x, y) A(z, t) \exp(i\beta_0 z)$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma |A|^2 A$$



Nieliniowe równanie Schrödingera - wektorowo

Rozdzielenie zmiennych

$$E_j(\mathbf{r}, t) = F(x, y) A_j(z, t) \exp(i\beta_{0j}z) \quad j = x, y$$

Układ nieliniowych sprzężonych równań
Schrödingera

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right) A_x + \frac{i\gamma}{3} A_x^* A_y^2 \exp(-2i\Delta\beta z)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right) A_y + \frac{i\gamma}{3} A_y^* A_x^2 \exp(+2i\Delta\beta z)$$



Nieliniowe równanie Schrödingera - wektorowo

Układ nieliniowych sprzężonych
równań Schrödingera

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right) A_x + \frac{i\gamma}{3} A_x^* A_y^2 \exp(-2i\Delta\beta z)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right) A_y + \frac{i\gamma}{3} A_y^* A_x^2 \exp(+2i\Delta\beta z)$$

$$\Delta\beta = \beta_{0x} - \beta_{0y} = \frac{2\pi}{\lambda} B_m = \frac{2\pi}{L_B}$$

$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma$$

$$\beta_{1x} - \beta_{1y} = \frac{1}{c} (N_x - N_y) = \frac{G}{c}$$

$$\beta_{2x} = \beta_{2y} = \beta_2$$

Światłowodowy o wysokiej dwójłomności

Układ nieliniowych równań Schrödingera

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_x|^2 + \frac{2}{3} |A_y|^2 \right) A_x + \frac{i\gamma}{3} A_x^* A_y^2 \exp(-2i\Delta\beta z)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_y|^2 + \frac{2}{3} |A_x|^2 \right) A_y + \frac{i\gamma}{3} A_y^* A_x^2 \exp(+2i\Delta\beta z)$$

Światłowodowy o niskiej dwójłomności

CNLSE w bazie polaryzacji
kołowych

$$\begin{aligned}\bar{A}_x &= A_x \exp(+i\Delta\beta z/2) & A_+ &= (\bar{A}_x + i\bar{A}_y)/\sqrt{2} \\ \bar{A}_y &= A_y \exp(-i\Delta\beta z/2) & A_- &= (\bar{A}_x - i\bar{A}_y)/\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\beta_1 = \beta_{1x} \approx \beta_{1y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_+}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A_+}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_+}{\partial t^2} &= \frac{i\Delta\beta}{2} A_- + \frac{2i\gamma}{3} \left(|A_+|^2 + 2|A_-|^2 \right) A_+ \\ \frac{\partial A_-}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A_-}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_-}{\partial t^2} &= \frac{i\Delta\beta}{2} A_+ + \frac{2i\gamma}{3} \left(|A_-|^2 + 2|A_+|^2 \right) A_-\end{aligned}$$



Światłowody o eliptycznie spolaryzowanych stanach własnych

CNLSE - eliptyczne stany własne

- Pole elektryczne w bazie polaryzacji eliptycznych

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\hat{\mathbf{e}}_x E_x(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{e}}_y E_y(\mathbf{r}, t) \right] \exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \frac{\hat{x} + ir\hat{y}}{\sqrt{1+r^2}}, \quad \hat{\mathbf{e}}_y = \frac{r\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{1+r^2}}, \quad r = \tan \frac{\theta}{2}$$

- Przeprowadzając analogiczne wyprowadzenie można otrzymać układ nieliniowych równań Schrodingera dla eliptycznie spolaryzowanych modów własnych



Światłowody o eliptycznie spolaryzowanych stanach własnych

Światłowód o dużej dwójłomności eliptycznej

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_x|^2 + B|A_y|^2 \right) A_x$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_y|^2 + B|A_x|^2 \right) A_y$$

Światłowody o eliptycznie spolaryzowanych stanach własnych

Światłowód o dużej dwójłomności eliptycznej

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} + \beta_{1x} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_x|^2 + B|A_y|^2 \right) A_x$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} + \beta_{1y} \frac{\partial A_y}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = i\gamma \left(|A_y|^2 + B|A_x|^2 \right) A_y$$

- dwójłomność liniowa $\theta = 0, B = \frac{2}{3}$
- dwójłomność kołowa $\theta = \frac{\pi}{2}, B = 0$
- ciekawy przypadek $B = 1, \theta \approx 35^\circ$



Wektorowa niestabilność modulacyjna

Światłowód o niskiej dwójłomności

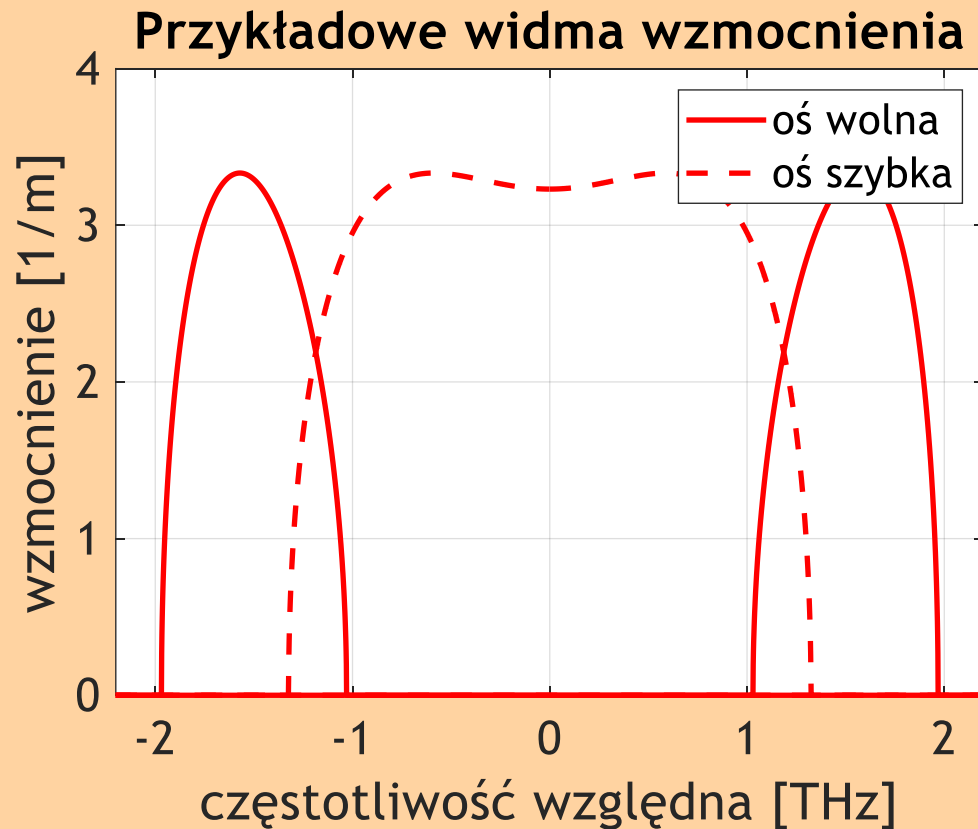
- Światło spolaryzowane liniowo wzdłuż osi szybkiej/wolnej - pasma niestabilności modulacyjnej w ortogonalnej polaryzacji

Światłowód o wysokiej dwójłomności

- Światło spolaryzowane liniowo, kąt azymutu $\pi/4$ - pasma niestabilności modulacyjnej w obu polaryzacjach

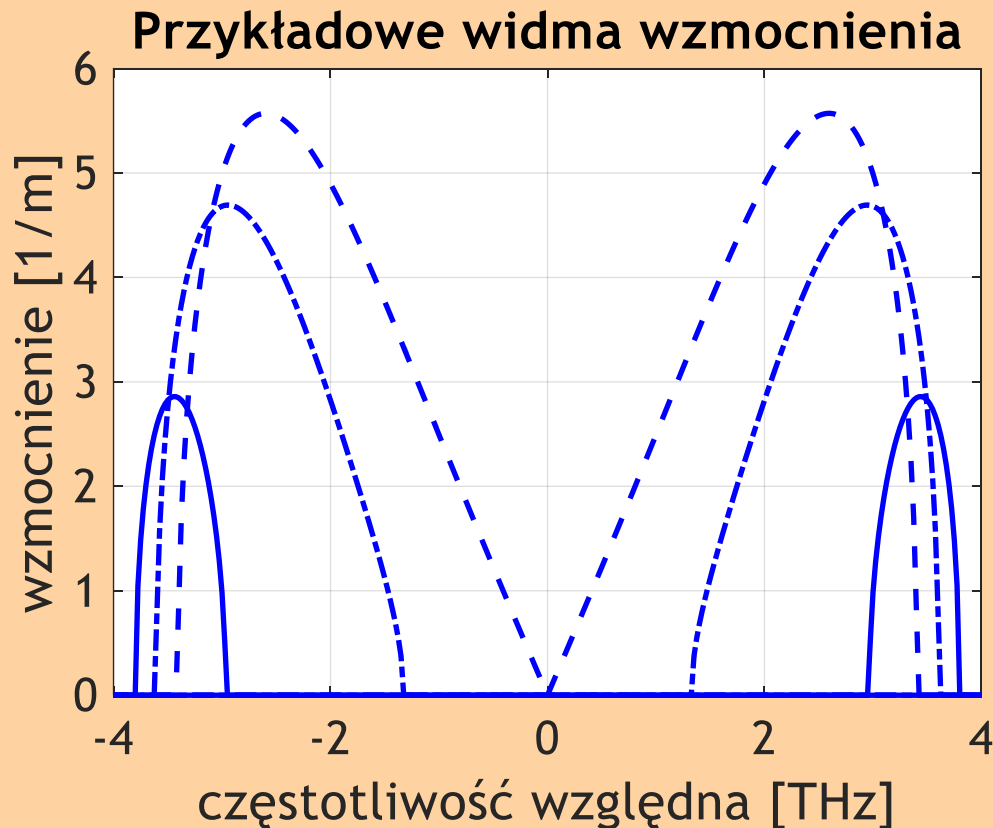
Wektorowa niestabilność modulacyjna

Światłowód o niskiej dwójłomności



Wektorowa niestabilność modulacyjna

Światłowod o wysokiej dwójłomności

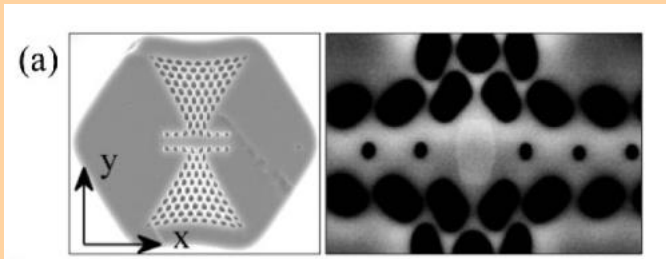


$$\Omega_{\max} = \frac{|\beta_{1x} - \beta_{1y}|}{\beta_2}$$

$$f_{\max} = \frac{G}{c\beta_2}$$

Wektorowa niestabilność modulacyjna

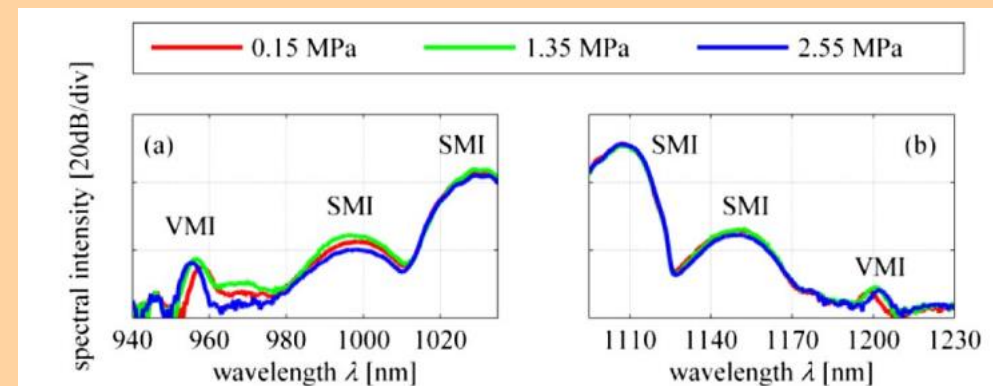
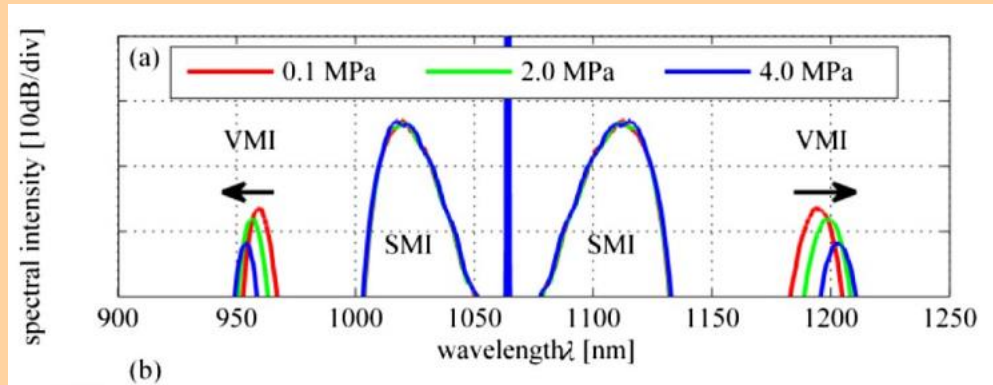
Światłowod o wysokiej dwójtomności grupowej



$$\Omega_s = \pm \sqrt{\frac{2\gamma P_0}{|\beta_2|}}$$

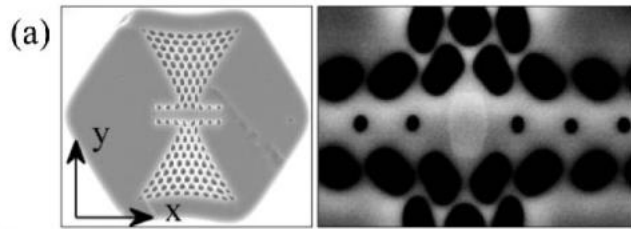
$$\Omega_v = \pm \frac{G}{c\beta_2}$$

K. Tarnowski, A. Anuszkiewicz et al.
Opt. Lett. 38, 5260-5263 (2013).

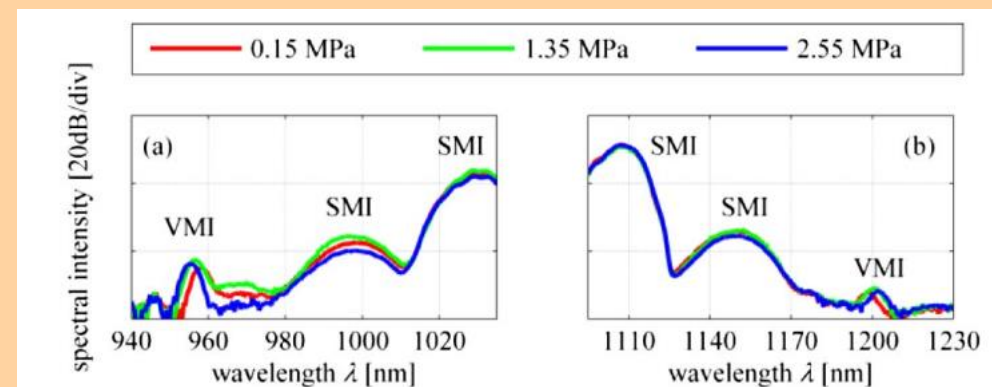
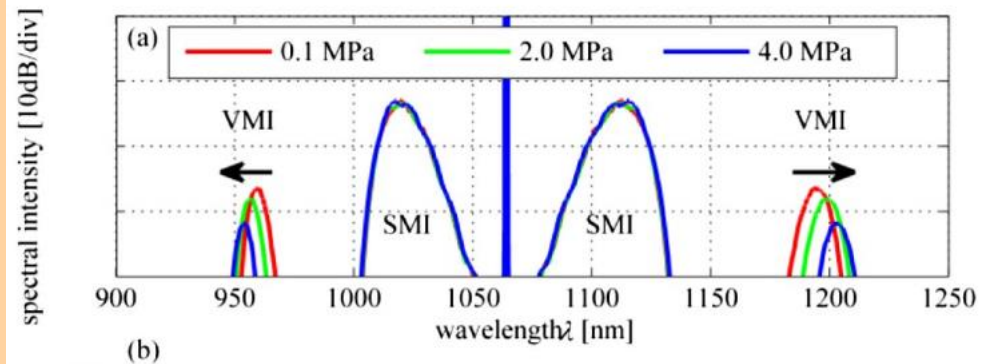


Wektorowa niestabilność modulacyjna

Światłowod o wysokiej dwójłomności grupowej

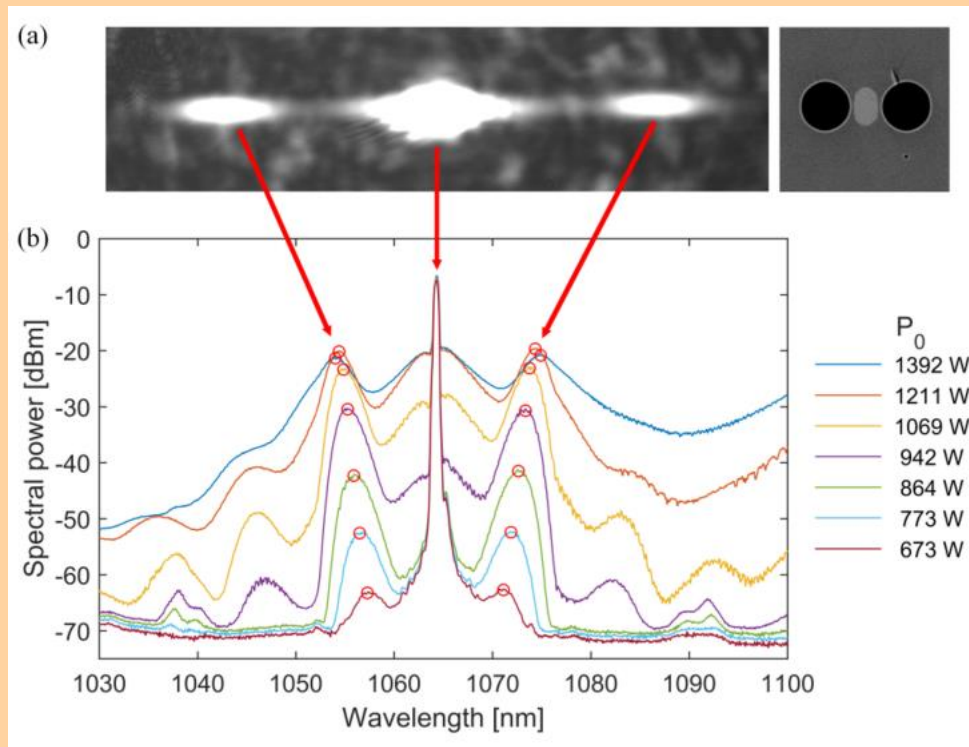


λ_p	1064 nm
G	$-1,42 \times 10^{-4}$
β_2	$-2,82 \text{ ps}^2/\text{km}$
P_0	1,2 kW
γ	15 1/W/km



Wektorowa niestabilność modulacyjna

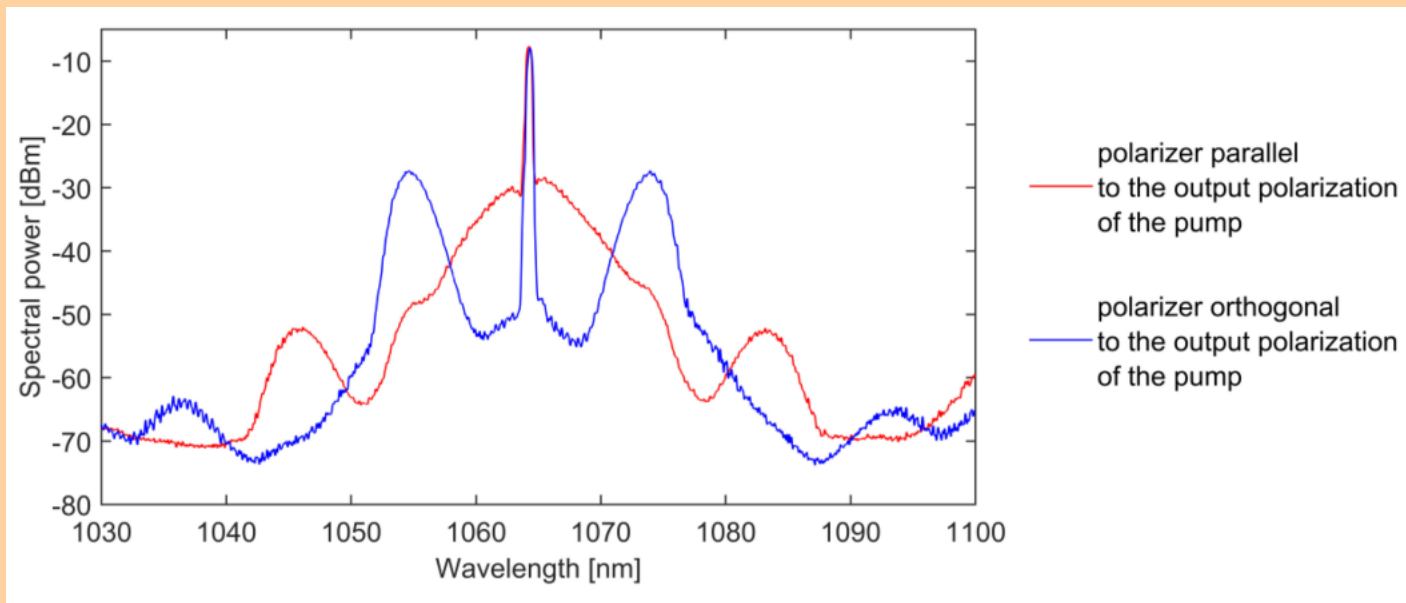
Światłowod o eliptycznie
spolaryzowanych modach własnych



K. Żołnacz, K. Tarnowski et al.
IEEE Photonics Journal 13(1):
7100616 (2021).

Wektorowa niestabilność modulacyjna

Światłowód o eliptycznie
spolaryzowanych modach własnych



K. Żołnacz, K. Tarnowski et al.
IEEE Photonics Journal 13(1):
7100616 (2021).



Podsumowanie

- Nieliniowe równanie Schrödingera
- Układ sprzężonych nieliniowych równań Schrödingera
- Propagacja nieliniowa w światłowodach dwójłomnych
- Wektorowa niestabilność modulacyjna w światłowodach dwójłomnych