Politechnika Wrocławska

Zjawiska nieliniowe w światłowodach

FTP003030W

rok akademicki 2022/23
semestr zimowy

Wykład 2

Karol Tarnowski
karol.tarnowski@pwr.edu.pl
L-1 p. 220

Plan wykładu

- Równania Maxwella
- Równania materiałowe
- Równanie falowe
  - Przypadek liniowy
  - Przypadek nieliniowy
- Nieliniowe równanie Schrödingera

Równania Maxwella

Równania Maxwella …	… w światłowodach
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \mathbf{H} = \cancel{\mathbf{J}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \cancel{\rho_f}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$

Równania materiałowe

Równania materiałowe …

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$$

… w światłowodach

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \cancel{\mathbf{M}}$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

Równanie falowe

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}$$

Polaryzacja elektryczna

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{EE} + \chi^{(3)} \vdots \mathbf{EEE} + \ldots \right)$$

Politechnika Wrocławska

Polaryzacja elektryczna

Polaryzacja elektryczna

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}_{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t)$$

Polaryzacja elektryczna – wyraz liniowy

$$\mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \chi^{(1)}(t-t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t')\,dt'$$

Polaryzacja elektryczna – wyraz nieliniowy

$$\mathbf{P}_{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t} dt_2 \int_{-\infty}^{t} dt_3 \times \chi^{(3)}(t-t_1, t-t_2, t-t_3) \vdots \mathbf{E}(\mathbf{r},t_1)\mathbf{E}(\mathbf{r},t_2)\mathbf{E}(\mathbf{r},t_3)$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

Przypadek liniowy

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_\mathrm{L}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\mathbf{P}_\mathrm{NL}\left(\mathbf{r}, t\right) = 0}$$

$$\mathbf{E}\left(\mathbf{r}, \omega\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\left(\mathbf{r}, t\right) \exp\left(i\omega t\right) dt$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{c^2}\omega^2 \mathbf{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \tilde{\chi}^{(1)}\left(\omega\right)\omega^2 \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \underbrace{\left(1 + \tilde{\chi}^{(1)}\left(\omega\right)\right)}_{\varepsilon(\omega)}\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}$$

Równanie falowe

Przypadek liniowy

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \tilde{\chi}^{(1)}(\omega)$$

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)\right]$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{nc}\mathrm{Im}\left[\tilde{\chi}^{(1)}(\omega)\right]$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

Przypadek liniowy

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \varepsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E} = -\nabla^2\mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\nabla^2\mathbf{E} + n^2(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = 0$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

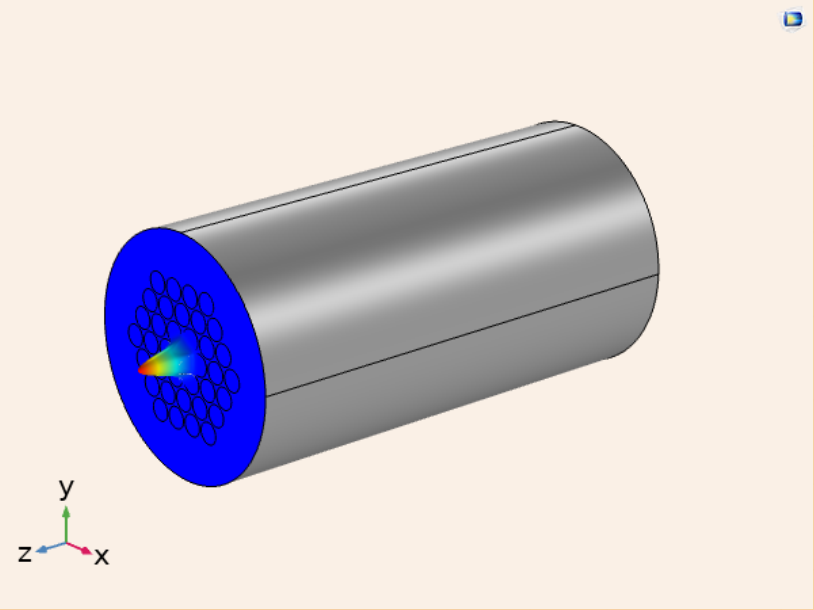
Przypadek liniowy

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \varepsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} \equiv \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2\mathbf{E}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \varepsilon \nabla \cdot$$

$$\nabla^2\mathbf{E} + n^2(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E} = 0$$



Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_L}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

- rozważamy światło liniowo polaryzowane oraz przyjmujemy, że zachowuje swój stan polaryzacji
- zakładamy, że światło jest kwazi-monochromatyczne

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\hat{x}\left[E(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t) + E^*(\mathbf{r},t)\exp(+i\omega_0 t)\right]$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\hat{x}\left[E(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}\right]$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\hat{x}\left[P_{\mathrm{L}}(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}\right]$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2}\hat{x}\left[P_{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t) + \text{c.c.}\right]$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{t} \chi^{(1)}(t-t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t')\,dt'$$

$$P_L(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{xx}^{(1)}(t-t') E(\mathbf{r},t') \exp\left[i\omega_0 (t-t')\right] dt'$$

$$P_L(\mathbf{r},t) = \frac{\varepsilon_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega) \tilde{E}(\mathbf{r},\omega-\omega_0) \exp\left[-i(\omega-\omega_0)t\right] d\omega$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Zakładając natychmiastową odpowiedź ośrodka

$$\mathbf{P}_{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\chi^{(3)}\vdots\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}\hat{x}\left[E(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+E^*(\mathbf{r},t)\exp(+i\omega_0 t)\right]$$

$$\mathbf{E}^3(\mathbf{r},t)=\frac{1}{8}\hat{x}\begin{bmatrix}E^3(\mathbf{r},t)\exp(-i3\omega_0 t)+3E^2(\mathbf{r},t)E^*(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+\\+3E(\mathbf{r},t)E^{*2}(\mathbf{r},t)\exp(+i\omega_0 t)+E^{*3}(\mathbf{r},t)\exp(+i3\omega_0 t)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}^3(\mathbf{r},t)\approx\frac{1}{8}\hat{x}\left[3E^2(\mathbf{r},t)E^*(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+3E(\mathbf{r},t)E^{*2}(\mathbf{r},t)\exp(+i\omega_0 t)\right]$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Zakładając natychmiastową odpowiedź ośrodka

$$\mathbf{P}_{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\chi^{(3)}\vdots\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

$$\mathbf{E}^3(\mathbf{r},t)=\frac{3}{8}\hat{x}\left[E^2(\mathbf{r},t)E^*(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+E(\mathbf{r},t)E^{*2}(\mathbf{r},t)\exp(+i\omega_0 t)\right]$$

$$\mathbf{P}_{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}\hat{x}\left[P_{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t)\exp(-i\omega_0 t)+\mathrm{c.c.}\right]$$

$$P_{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\frac{3}{4}\chi^{(3)}_{xxxx}E^2(\mathbf{r},t)E^*(\mathbf{r},t)=\frac{3}{4}\varepsilon_0\chi^{(3)}_{xxxx}\left|E(\mathbf{r},t)\right|^2E(\mathbf{r},t)$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$P_{\mathrm{NL}}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0 \underbrace{\frac{3}{4}\chi^{(3)}_{xxxx}\left|E(\mathbf{r},t)\right|^2}_{\varepsilon_{\mathrm{NL}}} E(\mathbf{r},t)$$

$$\varepsilon_{\mathrm{NL}}=\frac{3}{4}\chi^{(3)}_{xxxx}\left|E(\mathbf{r},t)\right|^2$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Przejście do dziedziny częstotliwości jest możliwe w przybliżeniu wolno zmiennej amplitudy oraz przy założeniu perturbacyjnego charakteru P_{NL}

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\omega-\omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\exp\left[i(\omega-\omega_0)t\right]dt$$

$$\nabla^2\mathbf{E}+\left(1+\tilde{\chi}_{xx}^{(1)}(\omega)+\varepsilon_{\mathrm{NL}}\right)k_0^2\mathbf{E}=0 \qquad \varepsilon_{\mathrm{NL}}=\frac{3}{4}\chi_{xxxx}^{(3)}\left|E(\mathbf{r},t)\right|^2$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Współczynnik załamania oraz stała tłumienia stają się zależne od intensywności

$$\tilde{n} = n + n_2 \left| E \right|^2 \qquad \tilde{\alpha} = \alpha + \alpha_2 \left| E \right|^2$$

$$n_2 = \frac{3}{8n} \mathrm{Re}\left(\chi_{xxxx}^{(3)} \right) \qquad \alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc} \mathrm{Im}\left(\chi_{xxxx}^{(3)} \right)$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Równanie falowe

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \varepsilon(\omega) k_0^2 \mathbf{E} = 0$$

rozwiązujemy metodą rozdzielenia zmiennych postulując rozwiązanie

$$\tilde{E}(\mathbf{r}, \omega - \omega_0) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(i\beta_0 z)$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Otrzymujemy dwa równania

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[\varepsilon(\omega) k_0^2 - \tilde{\beta}^2\right] F = 0$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \left(\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2\right)\tilde{A} = 0$$

- Pominięto wyraz proporcjonalny do $\frac{\partial^2 \tilde{A}}{\partial z^2}$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Równanie

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[\varepsilon(\omega) k_0^2 - \tilde{\beta}^2\right] F = 0$$

  jest rozwiązywane perturbacyjnie

- Rozkład modu nie zależy od intensywności światła

- Wartość własna

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta(\omega)$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Wartość własna

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta(\omega)$$

$$\Delta\beta(\omega) = \frac{\omega^2 n(\omega)}{c^2 \beta(\omega)} \frac{\iint_S \Delta n(\omega) \left|F(x,y)\right|^2 dxdy}{\iint_S \left|F(x,y)\right|^2 dxdy}$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

- Pole elektryczne może być zapisane jako

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{2}\hat{x}\left\{F(x,y)A(z,t)\exp\left[i\left(\beta_0 z-\omega_0 t\right)\right]+\text{c.c.}\right\}$$

gdzie $A(z,t)$ jest wolnozmienną amplitudą

$$\tilde{A}(z,\omega-\omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty}A(z,t)\exp\left[i(\omega-\omega_0)t\right]dt$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \left(\tilde{\beta}^2 - \beta_0^2\right)\tilde{A} = 0$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + \left(\tilde{\beta} + \beta_0\right)\left(\tilde{\beta} - \beta_0\right)\tilde{A} = 0$$

$$2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + 2\beta_0\left(\tilde{\beta} - \beta_0\right)\tilde{A} = 0$$

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i\left(\beta(\omega) + \Delta\beta(\omega) - \beta_0\right)\tilde{A}$$

Politechnika Wrocławska

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i\left(\beta\left(\omega\right) + \Delta\beta\left(\omega\right) - \beta_0\right)\tilde{A}$$

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i\left(\beta_0 + \beta_1\left(\omega - \omega_0\right) + \beta_2 \frac{1}{2}\left(\omega - \omega_0\right)^2 + \ldots + \Delta\beta\left(\omega\right) - \beta_0\right)\tilde{A}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\Delta\beta A$$

Równanie falowe

Przypadek nieliniowy

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\Delta\beta A$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = i\gamma \left|A\right|^2 A \qquad \gamma = \frac{n_2\omega_0}{cA_{\mathrm{eff}}}$$

$$A_{\mathrm{eff}} = \frac{\left(\iint_S \left|F(x,y)\right|^2 dxdy\right)^2}{\iint_S \left|F(x,y)\right|^4 dxdy}$$

Nieliniowe równanie Schrödingera

Nieliniowe równanie Schrödingera

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \left(-\frac{i\beta_2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + i\gamma |A|^2 \right) A$$

Zależne od czasu równanie Schrödingera

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V \right)\Psi$$

Politechnika Wrocławska

Podsumowanie

- Równania Maxwella
- Równania materiałowe
- Równanie falowe
  - Przypadek liniowy
  - Przypadek nieliniowy
- Nieliniowe równanie Schrödingera