



Politechnika
Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

W110PA-SM0060G

FZP002934wcl

rok akademicki 2022/23

semestr letni

Wykład 6

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220



Plan wykładu

- Rozwiązywanie cząstkowych równań różniczkowych metodą elementów skończonych
- Możliwości Partial Differential Equation Toolbox (w tym `pdeModeler`)
- Przykłady



Rozwiązywanie cząstkowych równań różniczkowych

- Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych z wykorzystaniem metody elementów skończonych
 - tworzenie geometrii
 - siatkowanie
 - warunki brzegowe
 - solwery równań różniczkowych
 - wizualizacja



Partial Differential Equation Toolbox

- MathWorks, Help Center, Partial Differential Equation Toolbox

<https://www.mathworks.com/help/pde/>

Partial Differential Equation Toolbox

1. Określenie geometrii 2D.
2. Określenie warunków brzegowych.
3. Określenie współczynników równania.
4. Tworzenie siatki trójkątnej.
5. Rozwiązanie równania różniczkowego.
6. Wykreślenie rozwiązania.



Zagadnienia

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

$$d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

$$d \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = \lambda du$$

$$-\nabla \cdot (c(u) \nabla u) + a(u)u = f(u)$$



Układy równań

$$-\nabla \cdot (c_{11} \nabla u_1) - \nabla \cdot (c_{12} \nabla u_2) + a_{11} u_1 + a_{12} u_2 = f_1$$

$$-\nabla \cdot (c_{21} \nabla u_1) - \nabla \cdot (c_{22} \nabla u_2) + a_{21} u_1 + a_{22} u_2 = f_2$$



Warunki brzegowe

- Dirichlet $hu = r$
- Neumann $\vec{n} \cdot (c\nabla u) + qu = g$

Przykład 1

Równanie Poissona

$$-\nabla^2 u = 1 \text{ na } \Omega$$

$$u = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

Ω dysk jednostkowy

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{4}$$

$$-\nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

$$c = 1$$

$$a = 0$$

$$f = 1$$

$$hu = r$$

$$h = 1$$

$$r = 0$$

www.mathworks.com/help/pde/ug/solve-poissons-equation-on-a-unit-disk.html

Przykład 2

Rozpraszanie

- równanie falowe

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 U = 0$$

- fale płaskie

$$U(x, y, t) = u(x, y) \exp(-i\omega t)$$

$$-\omega^2 u - c^2 \nabla^2 u = 0$$

- równanie Helmholtza

$$-\nabla^2 u - k^2 u = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

<https://www.mathworks.com/help/pde/ug/scattering-problem-pdemodeler-app.html>

Przykład 2

Rozpraszanie

- warunek brzegowy - fala padająca

$$V(x, y, t) = \exp(i(k\vec{a} \cdot \vec{x} - \omega t)) = v(x, y) \exp(-i\omega t)$$

$$v(x, y) = \exp(ik\vec{a} \cdot \vec{x})$$

$$u = v + r$$

- na granicy obiektu $u = 0$ $r = -v$
- na granicy obszaru obliczeniowego

$$\frac{\partial r}{\partial t} + c\vec{\xi} \cdot \nabla r = 0 \quad \vec{\xi} \cdot \nabla r - ikr = 0$$

Przykład 2

Rozpraszanie

$$-\nabla^2 u - k^2 u = 0$$

$$k = 60 \quad \lambda = \frac{2\pi}{60} \approx 0,1$$

$$hu = r$$

$$h = 1 \quad r = -v = -\exp(ik\vec{a} \cdot \vec{x})$$

$$r = -v = -\exp(-60ix)$$

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$c = 1$$

$$a = -k^2$$

$$f = 0$$

$$\vec{n} \cdot (c\nabla u) + qu = g$$

$$c = 1$$

$$q = -60i$$

$$g = 0$$

$$\vec{\xi} \cdot \nabla r - ikr = 0$$



Podsumowanie

- Rozwiązywanie cząstkowych równań różniczkowych metodą elementów skończonych
- Możliwości Partial Differential Equation Toolbox (w tym `pdeModeler`)
- Przykłady