



Politechnika
Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

W110PA-SM0060G

FZP002934wcl

rok akademicki 2022/23

semestr letni

Wykład 5

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220



Plan wykładu (1)

- Zagadnienie początkowe
- Obniżenie rzędu równania
- Metody rozwiązywania zagadnienia początkowego
- Kontrola wielkość błędu



Plan wykładu (2)

- Zagadnienie brzegowe
- Zagadnienie własne

- Metoda strzałów
- Metoda kolokacji
- Metoda różnic skończonych



Zagadnienie początkowe

Typowe zagadnienie początkowe opisane jest równaniem

$$\frac{df}{dt} = g(t, f), \quad f(t_0) = f_0.$$

W zagadnieniu początkowym może występować więcej zmiennych

$$\frac{df}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{f}), \quad \mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}_0.$$



Obniżenie rzędu równania

Zagadnienie początkowe rzędu drugiego

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = g(t, f, f'), \quad f(t_0) = f^{(0)}, \quad f'(t_0) = f'^{(0)}$$

można zapisać jako zagadnienie początkowe rzędu pierwszego dla dwóch zmiennych

$$f_1 \equiv f, \quad f_2 \equiv f' \quad \begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= f_2, & f_1(t_0) &= f_1^{(0)}, \\ \frac{df_2}{dt} &= g(t, f_1, f_2), & f_2(t_0) &= f_2^{(0)}. \end{aligned}$$



Obniżenie rzędu równania

Zagadnienie początkowe rzędu pierwszego dla dwóch zmiennych

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= f_2, & f_1(t_0) &= f_1^{(0)}, \\ \frac{df_2}{dt} &= g(t, f_1, f_2), & f_2(t_0) &= f_2^{(0)}. \end{aligned}$$

można zapisać w postaci wektorowej

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ g(t, f_1, f_2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_1(t_0) \\ f_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(0)} \\ f_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$



Obniżenie rzędu równania

Zagadnienie początkowe w postaci wektorowej

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ g(t, f_1, f_2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} f_1(t_0) \\ f_2(t_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1^{(0)} \\ f_2^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\frac{df}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{f}),$$

$$\mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}^{(0)}.$$



Metoda Eulera

$$\frac{df}{dt} = g(t, f), \quad f(t_0) = f_0.$$

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{t_{n+1} - t_n} \approx g(t_n, f_n) = g_n$$

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{h} \approx g_n$$

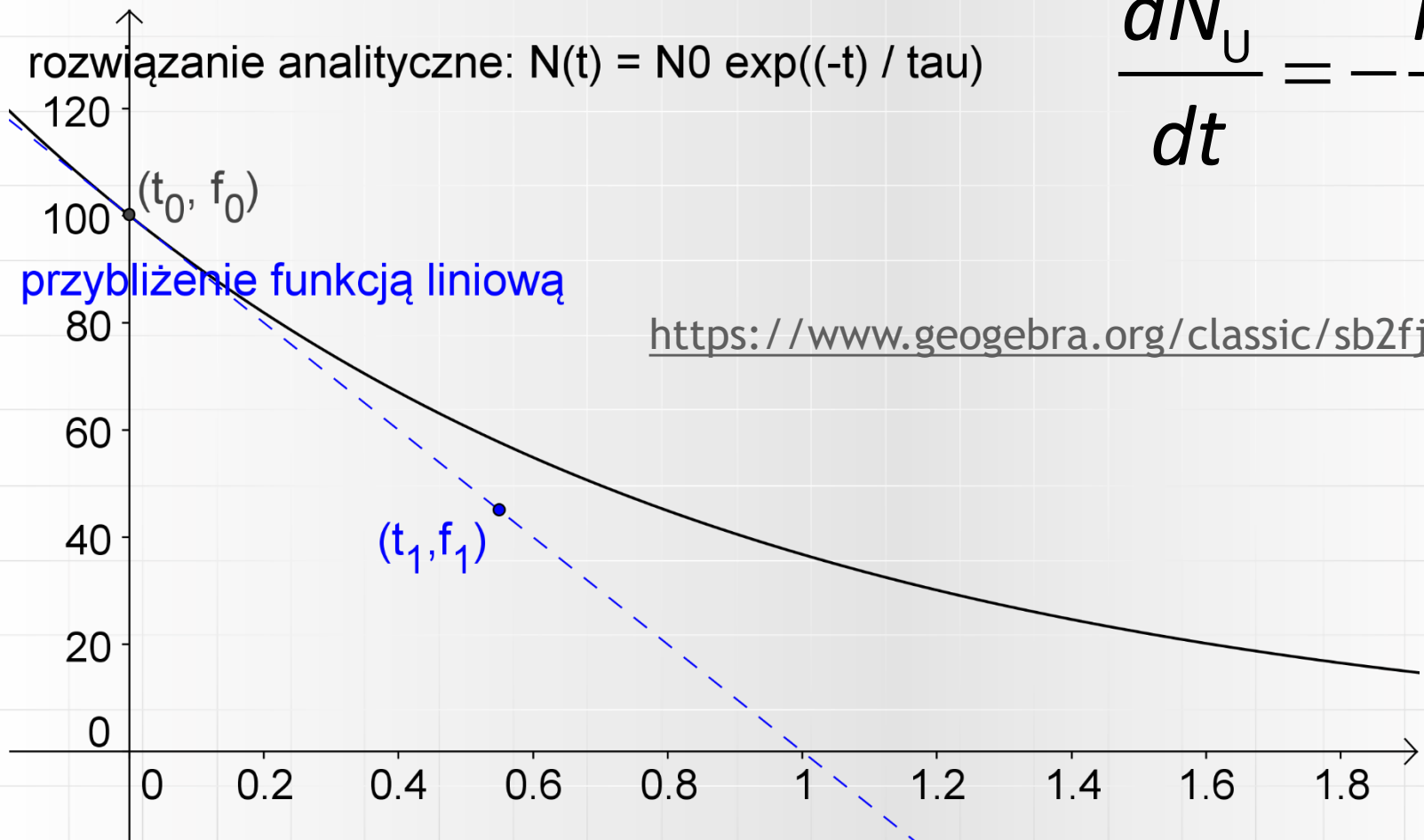
$$f_{n+1} = f_n + hg_n + O(h^2)$$



Metoda Eulera

rozwiązanie analityczne: $N(t) = N_0 \exp((-t) / \tau)$

$$\frac{dN_U}{dt} = -\frac{N_U}{\tau}$$



Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$$

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}k_1)$$

v_{21}	
α_1	α_2

1	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$	
0	1

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 v_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ v_{21} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ v_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Metody Rungego-Kutty

$$f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \dots + \alpha_n k_n$$

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}k_1)$$

$$k_3 = hg(t + v_{31}h + v_{32}h, f(t) + v_{31}k_1 + v_{32}k_2)$$

⋮

$$k_n = hg\left(t + h \sum_{i=1}^{n-1} v_{ni}, f(t) + \sum_{i=1}^{n-1} v_{ni} k_i\right)$$

Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego

$$f(t+h) \approx f(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg\left(t + \frac{1}{2}h, f(t) + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hg\left(t + \frac{1}{2}h, f(t) + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hg(t+h, f(t) + k_3)$$

$\frac{1}{2}$			
0	$\frac{1}{2}$		
0	0	1	
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$



Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego

$$f(t+h) = \tilde{f}(t+h) + Ch^5$$

$$f(t+h) = \hat{f}(t+h) + 2C\left(\frac{h}{2}\right)^5$$

$$0 = \tilde{f}(t+h) - \hat{f}(t+h) + \frac{15}{16}Ch^5$$

$$Ch^5 = \frac{16}{15} \left[\hat{f}(t+h) - \tilde{f}(t+h) \right] \approx \hat{f}(t+h) - \tilde{f}(t+h)$$



Metody adaptacyjne Rungego-Kutty

Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga

Liczba obliczonych wartości funkcji	1	2	3	4	5	6	7	8
Maksymalny rząd metody	1	2	3	4	4	5	6	6

$$\hat{f}(t+h) := f(t) + \sum_{i=1}^6 \alpha_i k_i$$

$$\tilde{f}(t+h) := f(t) + \sum_{i=1}^6 \beta_i k_i$$

$$k_i := hg \left(t + h \sum_{j=1}^{i-1} v_{ij}, f(t) + \sum_{j=1}^{i-1} v_{ij} k_j \right)$$



Metody adaptacyjne Rungego-Kutty

Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga

i	α_i	$\alpha_i - \beta_i$	d_{i1}	d_{i2}	d_{i3}	d_{i4}	d_{i5}
1	$\frac{16}{135}$	$\frac{1}{360}$					
2	0	0	$\frac{1}{4}$				
3	$\frac{6656}{12825}$	$-\frac{128}{4275}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$			
4	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{2197}{75240}$	$\frac{1932}{21967}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$		
5	$-\frac{9}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	
6	$\frac{2}{55}$	$\frac{2}{55}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$



Metody adaptacyjne Rungego-Kutty

Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga

$$e := \hat{f}(t+h) - \tilde{f}(t+h) = \sum_{i=1}^6 (\alpha_i - \beta_i) k_i$$

$$|e| < \delta$$

$$e \approx Ch^5$$

$$|e| < \delta / 128$$



Metody adaptacyjne Rungego-Kutty

ode23 Bogacki-Shampine

i	α_i	β_i	d_{i1}	d_{i2}	d_{i3}
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{24}$			
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		
3	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{3}{4}$	
4	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$

$$\hat{f}(t+h) := f(t) + \sum_{i=1}^4 \alpha_i k_i$$

$$\tilde{f}(t+h) := f(t) + \sum_{i=1}^4 \beta_i k_i$$

$$k_i := hg \left(t + h \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij}, f(t) + \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij} k_j \right)$$



Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu początkowym rzędu drugiego znamy wartości funkcji i jej pochodnej w punkcie początkowym

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = g(t, f, f'), \quad f(t_0) = f^{(0)}, \quad f'(t_0) = f'^{(0)}.$$

Innym typem problemów są zagadnienia brzegowe, przykładowo

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x, u, u'), \quad u(x_0) = u^{(0)}, \quad u(x_1) = u^{(1)}.$$



Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu brzegowym

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x, u, u')$$

$$u'' = f(x, u, u')$$

możemy dobrać tak układ współrzędnych,
aby

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$



Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu brzegowym

$$u'' = f(x, u, u')$$

możemy znać różne zestawy warunków brzegowych

$$u(0) = u^{(0)}, u(1) = u^{(1)}; \quad u(0) = u^{(0)}, u'(1) = v^{(1)};$$

$$u'(0) = v^{(0)}, u(1) = u^{(1)}; \quad u'(0) = v^{(0)}, u'(1) = v^{(1)}.$$



Zagadnienie własne

W niektórych przypadkach w problemie pojawia się jeszcze parametr - wartość własna

$$u'' = f(x, u, u', \lambda).$$



Zagadnienie własne

$$u'' = f(x, u, u', k)$$

Przykład: drgania podłużne sprężystego pręta.

$$u'' = -k^2 u$$

- pręt obustronnie umocowany

$$u(0) = 0 \quad u(1) = 0$$

- pręt umocowany jednostronnie

$$u(0) = 0 \quad u'(1) = 0$$



Zagadnienie własne

Rozwiązania analityczne dla pręta
obustronnie umocowanego

$$u_n(x) = \sqrt{2} \sin(k_n x)$$

$$k_n^2 = (n\pi)^2$$



Metoda strzałów

Zagadnienie brzegowe

$$u'' = f(x, u, u')$$

Stosując podstawienia $y_1 = u$ $y_2 = u'$

otrzymujemy

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f(x, y_1, y_2).$$

Założmy, że warunki brzegowe są postaci:

$$u(0) = u^{(0)}, \quad u(1) = u^{(1)}.$$



Metoda strzałów

Zagadnienie brzegowe

Wprowadźmy dodatkowy parametr δ i załóżmy, że

$$u'(0) = \delta.$$

Dla ustalonego δ jesteśmy w stanie rozwiązać zagadnienie początkowe znanymi metodami.

Rozwiązanie równania różniczkowego daje nam wartość funkcji na drugim brzegu przedziału

$$u_{\delta}(1).$$

$$F(\delta) = u_{\delta}(1) - u^{(1)}$$

Metoda strzałów

Zagadnienie brzegowe

Miejsca zerowego funkcji

$$F(\delta) = u_{\delta}(1) - u^{(1)}$$

poszukiwać możemy np. metodami:

- bisekcji,
- siecznych.

Metoda strzałów

Zagadnienie własne

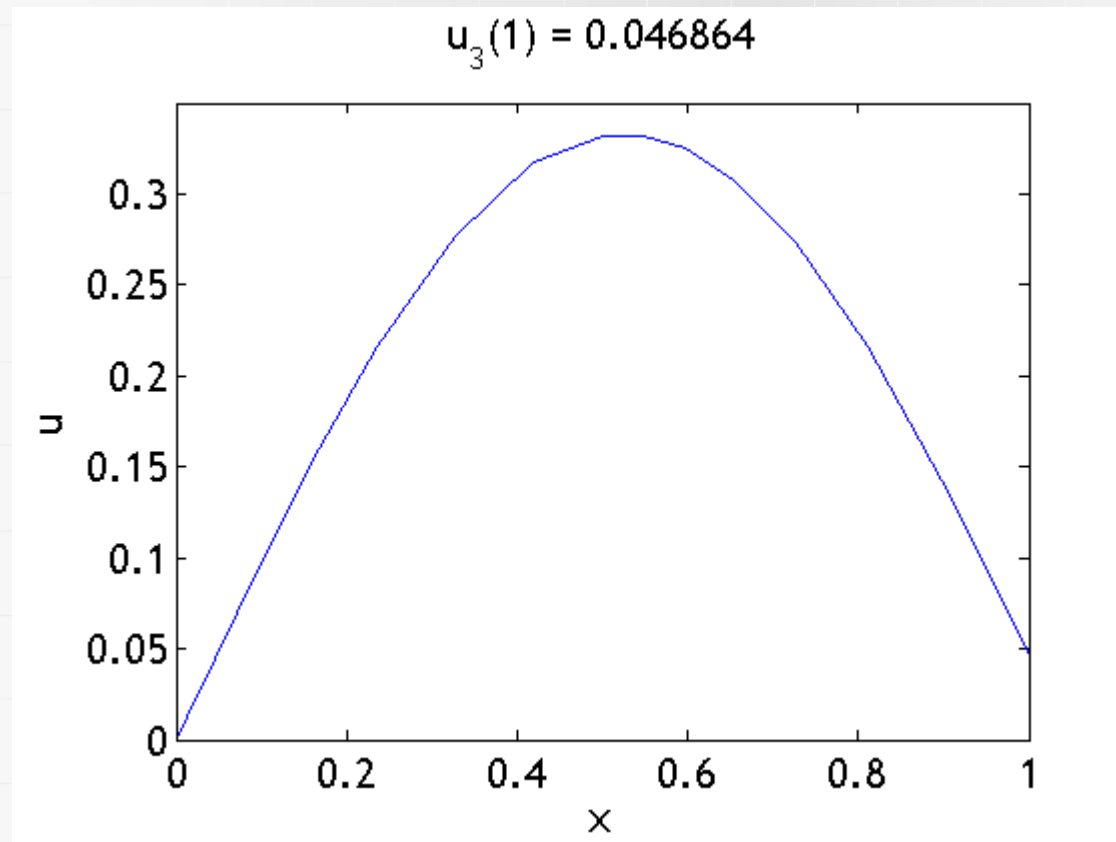
$$F(k) = u_k(1) - u^{(1)}$$

Metodę strzałów można także wykorzystać do rozwiązania zagadnienia własnego.

W tym przypadku dopasowujemy wartość własną zagadnienia.

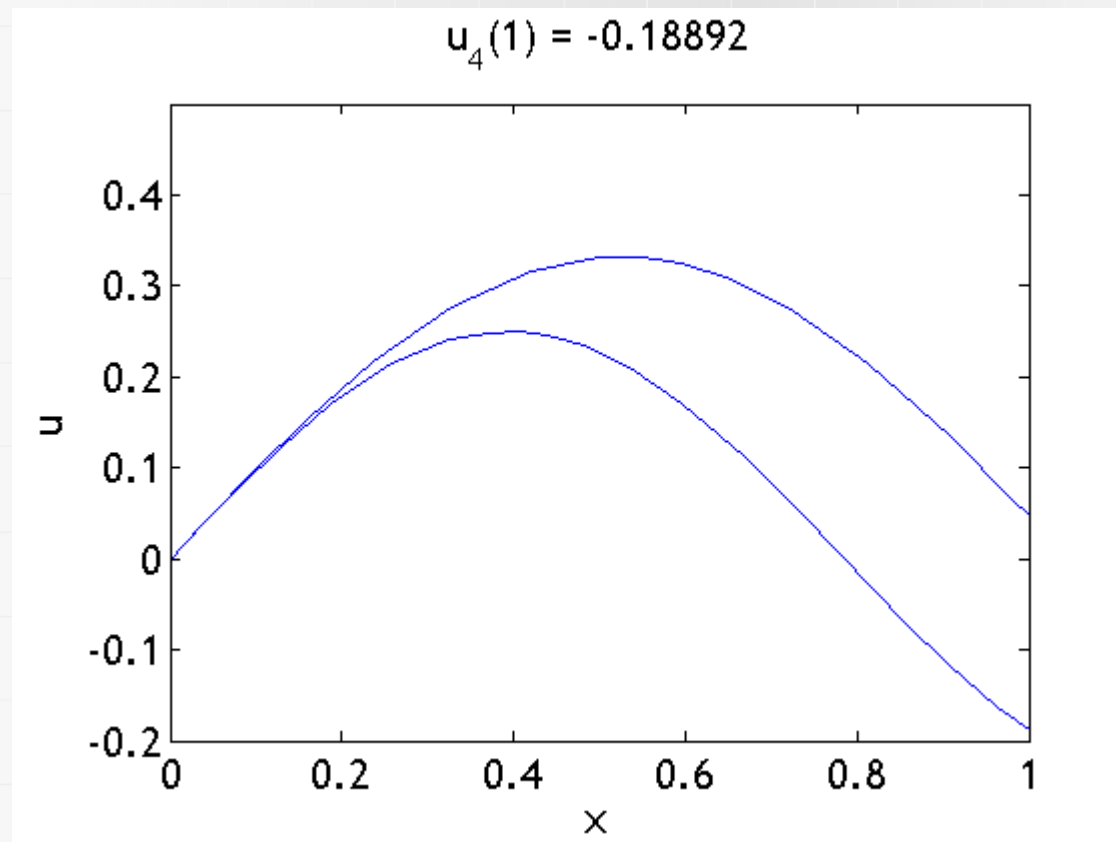
Metoda strzałów

Zagadnienie własne



Metoda strzałów

Zagadnienie własne





Zagadnienie brzegowe

Funkcje Matlab

Do rozwiązywania zagadnienia brzegowego w środowisku Matlab można wykorzystać funkcje `bvp4c()`, `bvp5c()`, które wykorzystują metodę kolokacji.

<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/bvp4c.html>

<https://www.mathworks.com/help/matlab/math/solve-bvp-with-unknown-parameter.html>



Zagadnienie brzegowe

Metoda różnic skończonych

$$u'' = -k^2 u$$

$$x_0 = a, x_{n+1} = b, x_i = a + is, s = \frac{b-a}{n+1}.$$

$$u_i = u(x_i)$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{s^2} = -k^2 u_i, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -s^2 k^2 u_i,$$



Podsumowanie (1)

- Zagadnienie początkowe
- Obniżenie rzędu równania
- Kontrola wielkość błędu



Podsumowanie (2.1)

- Zagadnienie brzegowe

$$u'' = f(x, u, u')$$

$$u(0) = u^{(0)}, u(1) = u^{(1)} \text{ itp.}$$

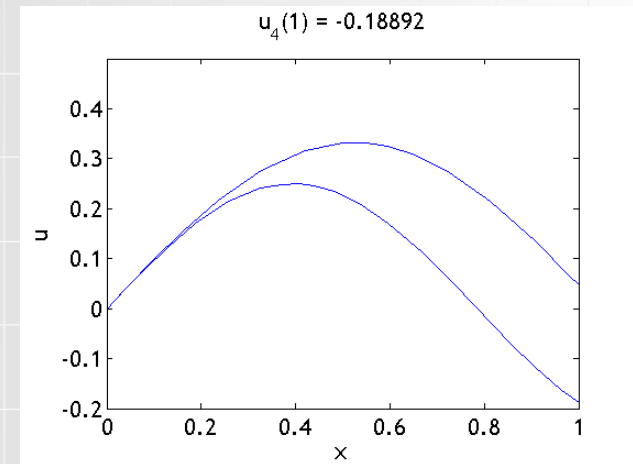
- Zagadnienie własne

$$u'' = f(x, u, u', \lambda)$$



Podsumowanie (2.2)

- Metoda strzałów



- `bvp4c()`

```
sol = bvp4c(odefun,bcfun,solinit)
```

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{s^2} = -k^2 u_i$$

- Metoda różnic skończonych

$$Bu = \lambda u.$$