

Stacjonarne drgania podłużne obustronnie umocowanego sprężystego pręta opisane są równaniem:

$$\begin{aligned}\frac{d^2u}{dx^2} &= -k^2u, \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0,\end{aligned}\tag{1}$$

gdzie $u(x)$ – wychylenie z położenia równowagi; wartościami własnymi są dopuszczalne wartości wektora falowego k , a układ współrzędnych wybrano tak, aby problem sprowadzić na odcinek jednostkowy.

Rozwiązaniem zagadnienia brzegowego są wartości własne $k_n = n\pi$ i funkcje własne

$$u_n(x) = \sqrt{2} \sin(k_n x).$$

1. Zagadnienie własne można rozwiązywać metodą strzałów: traktując problem jako zagadnienie początkowe z parametrem i dobierając wartość parametru tak, aby spełnione były warunki brzegowe. W tym celu wykonaj następujące kroki:
 - a. (0,5 pkt.) Dla dowolnej wartości parametru k , rozwiąż numerycznie zagadnienie początkowe określonej dla warunków początkowych: $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. Wykreśl zależność $u(x)$. Do rozwiązania zagadnienie początkowego wykorzystaj solver (np. `ode23`).
 - b. (0,5 pkt.) Napisz funkcję, która dla podanego k i ustalonych warunków początkowych, zwraca obliczoną wartość $u(1)$. Funkcja powinna rozwiązywać zagadnienie początkowe i zwracać obliczoną wartość $u(1)$.
 - c. (0,5 pkt.) Wyznacz kilka wartości k , dla których $u(1) = 0$. W tym celu wywołaj funkcję `fzero`, przekazując do niej jako argument funkcję z zadania 1.b.
 - d. (0,5 pkt.) Wyznaczone wartości k są wartościami własnymi zagadnienia, rozwiąż numerycznie zagadnienie początkowe i wykreśl zależności $u(x)$. Porównaj wyznaczone wartości własne i funkcje własne z rozwiązaniami analitycznymi.
 - e. (1 pkt) Zastanów się, jak można skrócić czas obliczeń, korzystając z symetrii zagadnienia (pręt jest symetryczny względem punktu $x = \frac{1}{2}$). Rozważ, jakie są dwie klasy rozwiązań wynikające z symetrii zagadnienia oraz jakie warunki brzegowe spełniają. Wprowadź stosowne modyfikacje w implementacji.

2. (2 pkt.) Zagadnienie brzegowe można rozwiązywać wykorzystując funkcję **bvp4c** ().
- a. Dla znanych (z wyrażeń analitycznych) wartości k , rozwiąż zagadnienie brzegowe, wykorzystując funkcję **bvp4c** () i wykreśl zależności $u(x)$. Porównaj wyznaczone funkcje z rozwiązaniami analitycznymi.
 - b. Potraktuj zagadnienie jako zagadnienie własne, rozwiąż je wykorzystując funkcję **bvp4c** (). Porównaj wyznaczone wartości własne i funkcje własne z rozwiązaniami analitycznymi.

Karol Tarnowski
Wrocław, 2023