

Metody numeryczne w fizyce

FZP002934wcl

rok akademicki 2021/22

semestr letni

Wykład 7

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220



Plan wykładu

- Algebraiczne zagadnienie własne
- Metoda potęgowa
- Faktoryzacja Schura
- Lokalizacja wartości własnych - twierdzenie Gerszgorina



- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2006, rozdział 5



Drgania pręta

$$u'' = -k^2 u$$

$$x_i = a + ih = a + i \frac{b-a}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n+1$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = -k^2 u_i$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -k^2 h^2 u_i$$



Drgania pręta

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = \lambda u_i$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} u = \lambda u$$

Algebraiczne zagadnienie własne

- Niech A będzie macierzą kwadratową stopnia n , o elementach zespolonych, a λ liczbą zespoloną.

- Jeśli równanie $Ax = \lambda x$

jest spełnione przez pewien wektor x o n składowych zespolonych nie wszystkich równych 0, to λ jest wartością własną, a x wektorem własnym macierzy A .

Algebraiczne zagadnienie własne

- macierz $A - \lambda I$ przekształca pewien wektor niezerowy na 0
- macierz $A - \lambda I$ jest osobliwa
- $\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$



Algebraiczne zagadnienie własne

- równanie charakterystyczne

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

- wielomian charakterystyczny



Podobieństwo macierzy

- Macierze A i B są podobne jeśli istnieje taka macierz nieosobliwa P , że $B = PAP^{-1}$ (oraz $QBQ^{-1} = A$, gdzie $Q = P^{-1}$)
- Macierze podobne mają te same zbiory wartości własnych



Metoda potęgowa

- Tylko jedna wartość własna ma największy moduł
- Istnieje układ n wektorów własnych liniowo niezależnych

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|$$

$$u^{(j)} : Au^{(j)} = \lambda_j u^{(j)}$$



Metoda potęgowa

- Niech $x^{(0)}$ będzie dowolną kombinacją liniową tych wektorów własnych z niezerowym współczynnikiem przy $u^{(1)}$

$$x^{(0)} = u^{(1)} + \sum_{j=2}^n a_j u^{(j)}$$

$$x^{(1)} = Ax^{(0)} = Au^{(1)} + \sum_{j=2}^n a_j Au^{(j)}$$

$$x^{(2)} = Ax^{(1)} = A^2u^{(1)} + \sum_{j=2}^n a_j A^2u^{(j)}$$



Metoda potęgowa

$$x^{(k)} = A^k x^{(0)} = A^k u^{(1)} + \sum_{j=2}^n a_j A^k u^{(j)}$$

$$x^{(k)} = \lambda_1^k u^{(1)} + \sum_{j=2}^n a_j \lambda_j^k u^{(j)}$$

$$x^{(k)} = \lambda_1^k \left(u^{(1)} + \sum_{j=2}^n a_j \frac{\lambda_j^k}{\lambda_1^k} u^{(j)} \right)$$

$$x^{(k)} = \lambda_1^k \left(u^{(1)} + \varepsilon^{(k)} \right)$$



Metoda potęgowa

- Niech φ będzie dowolnym funkcjonałem liniowym określonym na C^n i takim, że $\varphi(u^{(1)}) \neq 0$

$$x^{(k)} = \lambda_1^k \left(u^{(1)} + \varepsilon^{(k)} \right)$$

$$\varphi(x^{(k)}) = \lambda_1^k \left(\varphi(u^{(1)}) + \varphi(\varepsilon^{(k)}) \right)$$

$$r_k = \frac{\varphi(x^{(k+1)})}{\varphi(x^{(k)})} = \frac{\lambda_1^{k+1} \left(\varphi(u^{(1)}) + \varphi(\varepsilon^{(k+1)}) \right)}{\lambda_1^k \left(\varphi(u^{(1)}) + \varphi(\varepsilon^{(k)}) \right)} \rightarrow \lambda_1$$



Odwrotna metoda potęgowa

- Jeśli λ jest wartością własną macierzy nieosobliwej A , to λ^{-1} jest wartością własną macierzy A^{-1}

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$$

$$|\lambda_n^{-1}| > |\lambda_{n-1}^{-1}| \geq |\lambda_{n-2}^{-1}| \geq \dots \geq |\lambda_2^{-1}| \geq |\lambda_1^{-1}| > 0$$

$$x^{(k+1)} = A^{-1} x^{(k)}$$

$$Ax^{(k+1)} = x^{(k)}$$

Metoda potęgowa z macierzą przesuniętą

$$A - \mu I$$

$$0 < |\lambda_k - \mu| < \varepsilon \text{ oraz } |\lambda_j - \mu| > \varepsilon \text{ dla } j \neq k$$

- stosując odwrotną metodę potęgową można znaleźć $(\lambda_k - \mu)^{-1}$



Faktoryzacja Schura

- macierze A i B są podobne jeśli istnieje taka macierz nieosobliwa P , że $B = PAP^{-1}$ (oraz $QBQ^{-1} = A$, gdzie $Q = P^{-1}$)
- niech B będzie trójkątna

Faktoryzacja Schura

Pojęcia

- A^H - macierz sprzężona z A

$$\left(A^H\right)_{ij} = \overline{\left(A\right)_{ji}}$$

- U - nazywamy unitarną jeśli $UU^H = I$
- A i B są unitarnie podobne jeśli $B = UAU^H$

Faktoryzacja Schura

Lemat I

- macierz $I - vv^H$ jest unitarna wtedy i tylko wtedy, gdy $\|v\|_2^2 = 2$ lub $v = 0$

- niech $U = (I - vv^H)$

$$\begin{aligned} UU^H &= (I - vv^H)(I - vv^H)^H = (I - vv^H)(I - vv^H) = \\ &= I - 2vv^H + vv^Hvv^H = I - 2vv^H + v(v^Hv)v^H = \\ &= I - 2vv^H + (v^Hv)vv^H = I - [2 - v^Hv]vv^H = I - [2 - \|v\|_2^2]vv^H \end{aligned}$$

Faktoryzacja Schura

Lemat II

- jeśli wektory x i y są takie, że $\|x\|_2 = \|y\|_2$ i $x^H y$ jest rzeczywiste, to istnieje macierz unitarna $U = I - vv^H$, dla której $Ux = y$
- jeśli $x = y$, to $U = I$ oraz $v = 0$
- jeśli $x \neq y$, to przyjmujemy $v = \alpha(x - y)$, gdzie

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\|x - y\|_2}, \text{ wtedy } \|v\|_2^2 = 2$$

sprawdzamy, czy $Ux = y$



Faktoryzacja Schura

Lemat II (2)

$$\begin{aligned} Ux - y &= (I - vv^H)x - y = x - vv^Hx - y = x - y - vv^Hx = \\ &= (x - y) - \alpha^2(x - y)(x^H - y^H)x = (x - y) \left[1 - \alpha^2(x^Hx - y^Hx) \right] \end{aligned}$$

$$1 - \alpha^2(x^Hx - y^Hx) = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2(2x^Hx - 2y^Hx) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\alpha^2(x^Hx + x^Hx - y^Hx - y^Hx) = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \left(\begin{array}{c} x^Hx + y^Hy - y^Hx - x^Hy \\ \|\!x\|_2 = \|\!y\|_2 \quad y^Hx \in \mathbb{R} \end{array} \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\alpha^2(x^H(x - y) + y^H(y - x)) = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2(x^H - y^H)(x - y) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\alpha^2\|x - y\|_2^2 = 0$$

Faktoryzacja Schura

Twierdzenie

- Każda macierz kwadratowa jest unitarnie podobna do macierzy trójkątnej górnej
- Dowód indukcyjny względem stopnia macierzy n
 - dla $n = 1$ twierdzenie jest prawdziwe
 - założmy, że jest prawdziwe dla macierzy stopnia $n - 1$ i rozważmy macierz A stopnia n , niech λ będzie jej wartością własną, a $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ odpowiednim wektorem własnym

Faktoryzacja Schura

Dowód

- założmy, że jest prawdziwe dla macierzy stopnia $n - 1$ i rozważmy macierz A stopnia n
- niech λ będzie jej wartością własną, a $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ odpowiednim wektorem własnym (można założyć, że $\|x\|_2 = 1$)
- zdefiniujmy $\beta = \operatorname{sgn} x_1$ dla $x_1 \neq 0$ oraz $\beta = 1$ w p. p.
- wprowadźmy też wektor jednostkowy $e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0)$
- istnieje macierz unitarna U taka, że $Ux = \beta e^{(1)}$

Faktoryzacja Schura

Dowód (2)

- istnieje macierz unitarna U taka, że $Ux = \beta e^{(1)}$
- stąd $\beta^{-1}x = U^H e^{(1)}$
- oraz $UAU^H e^{(1)} = UA \beta^{-1}x = \beta^{-1}UAx = \beta^{-1}\lambda Ux =$
 $= \beta^{-1}\lambda\beta e^{(1)} = \lambda e^{(1)}$
- zatem pierwszą kolumną UAU^H jest $\lambda e^{(1)}$

Faktoryzacja Schura

Dowód (3)

- pierwszą kolumną UAU^H jest $\lambda e^{(1)}$
- niech \tilde{A} będzie macierzą powstałą z UAU^H przez skreślenie pierwszego wiersza i kolumny
- istnieje macierz unitarna Q taka, że $Q\tilde{A}Q^H$ jest trójkątna górna
- wprowadźmy macierz $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} U$
- V jest unitarna jako iloczyn macierzy unitarnych

Faktoryzacja Schura

Dowód (4)

- $V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} U$ sprowadza A do trójkątnej górnej

$$VAV^H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} UAU^H \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & w \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^H \end{bmatrix}$$

$$VAV^H = \begin{bmatrix} \lambda & w \\ 0 & Q\tilde{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & wQ^H \\ 0 & Q\tilde{A}Q^H \end{bmatrix}$$

Faktoryzacja Schura

Wniosek

- każda macierz hermitowska jest unitarnie podobna do macierzy przekątnej
- niech $U : UAU^H$ jest trójkątna górna
- wtedy $(UAU^H)^H$ jest trójkątna dolna
- ale $(UAU^H)^H = (U^H)^H A^H U^H = UAU^H$
- czyli UAU^H jest trójkątna górna i jednocześnie jest trójkątna dolna - jest przekątniowa

Faktoryzacja Schura

Zastosowanie

- jeśli znamy wartość własną λ macierzy A stopnia n to możemy utworzyć macierz \tilde{A} stopnia $n - 1$, której wartościami własnymi są pozostałe wartości własne A
 1. znaleźć x odpowiadający λ
 2. zdefiniować β j.w.
 3. znaleźć $\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\|x - \beta e^{(1)}\|_2}$, $v = \alpha(x - \beta e^{(1)})$, $U = I - vv^H$
 4. obliczyć UAU^H skreślić pierwszy wiersz i kolumnę



Twierdzenie Gerszgorina

- Widmo dowolnej macierzy A stopnia n zawiera się w sumie następujących kół na płaszczyźnie zespolonej:

$$D_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\} \quad \text{dla } 1 \leq i \leq n$$

Twierdzenie Gerszgorina

Dowód

- niech λ będzie wartością własną macierzy A i x będzie odpowiadającym jej wektorem własnym takim, że $\|x\|_{\infty} = 1$
- dla pewnego i $|x_i| = 1$
- ponieważ $Ax = \lambda x$, zatem $(Ax)_i = \lambda x_i$ oraz

$$\lambda x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (\lambda - a_{ii}) x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j$$



Twierdzenie Gerszgorina

Dowód (2)

$$(\lambda - a_{ii})x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j$$

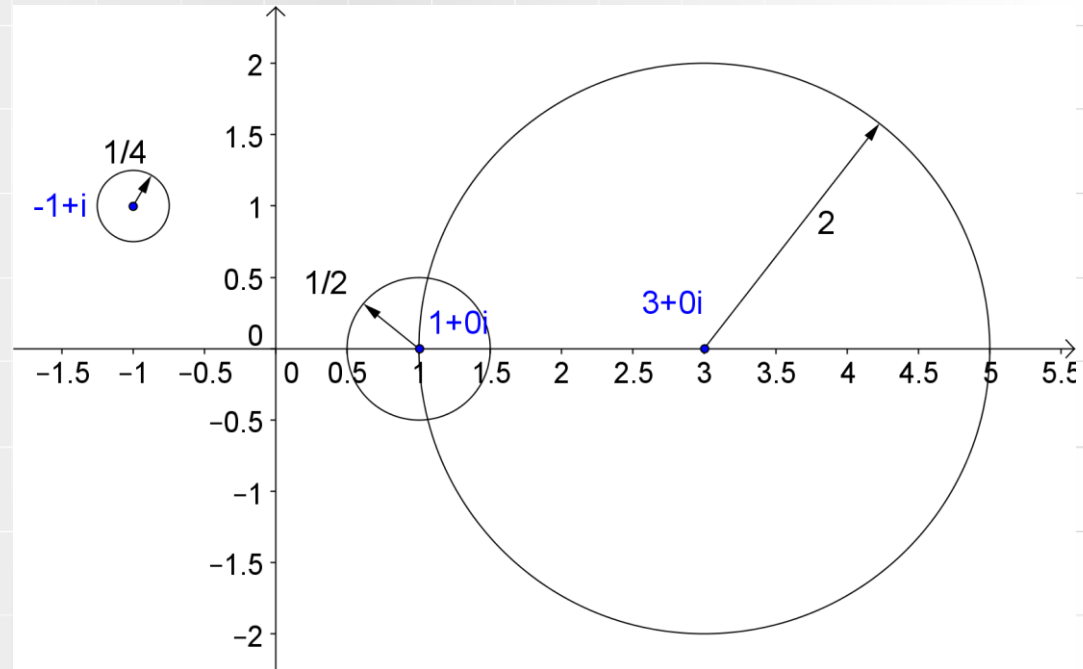
- z nierówności trójkąta oraz $|x_j| \leq 1 = |x_i|$

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| |x_j| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Twierdzenie Gerszgorina

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} -1+i & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$





Podsumowanie

- Algebraiczne zagadnienie własne
- Metoda potęgowa
- Faktoryzacja Schura
- Lokalizacja wartości własnych -
twierdzenie Gerszgorina