Politechnika Wrocławska

# Metody numeryczne w fizyce

## FZP002934wcL

rok akademicki 2021/22

semestr letni

# Wykład 5

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220

# Plan wykładu

- Zagadnienie początkowe
- Metoda Eulera
- Metody Rungego-Kutty
  - metoda Heuna
  - metoda punktu pośredniego
  - metoda rzędu czwartego
- Kontrola wielkość błędu
- Obniżenie rzędu równania

# Zagadnienie początkowe

Typowe zagadnienie początkowe opisane jest równaniem

$$\frac{df}{dt} = g\left(t, f\right), \quad f\left(t_0\right) = f_0.$$

W zagadnieniu początkowym może występować więcej zmiennych

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{g}\left(t, \mathbf{f}\right), \quad \mathbf{f}\left(t_0\right) = \mathbf{f}_0.$$

# Metoda Eulera

$$\frac{df}{dt} = g(t, f), \quad f(t_0) = f_0.$$

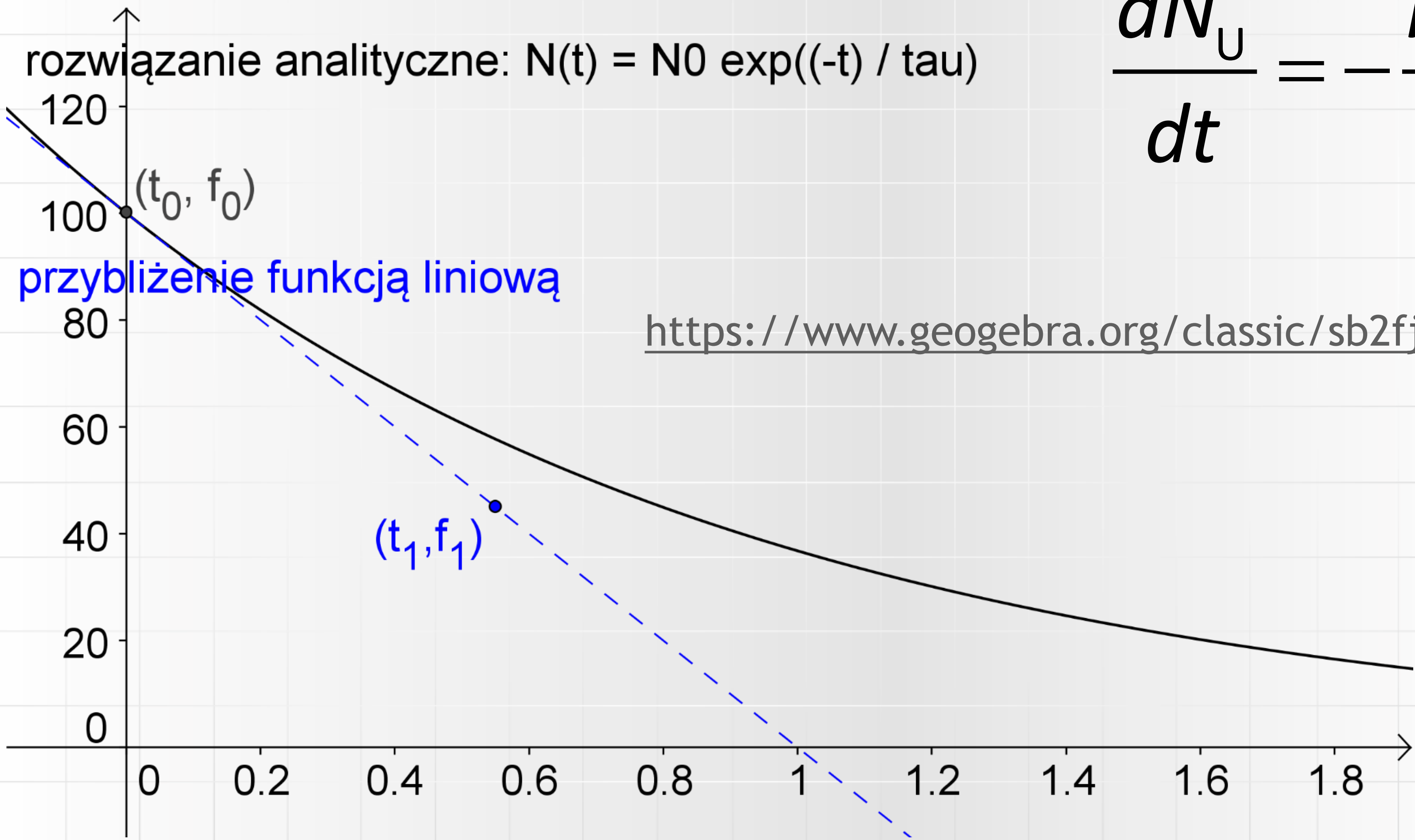
$$\frac{f_{n+1} - f_n}{t_{n+1} - t_n} \approx g(t_n, f_n) = g_n$$

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{h} \approx g_n$$

$$\boxed{f_{n+1} = f_n + hg_n + O(h^2)}$$

# Metoda Eulera

$$\frac{dN_U}{dt} = -\frac{N_U}{\tau}$$

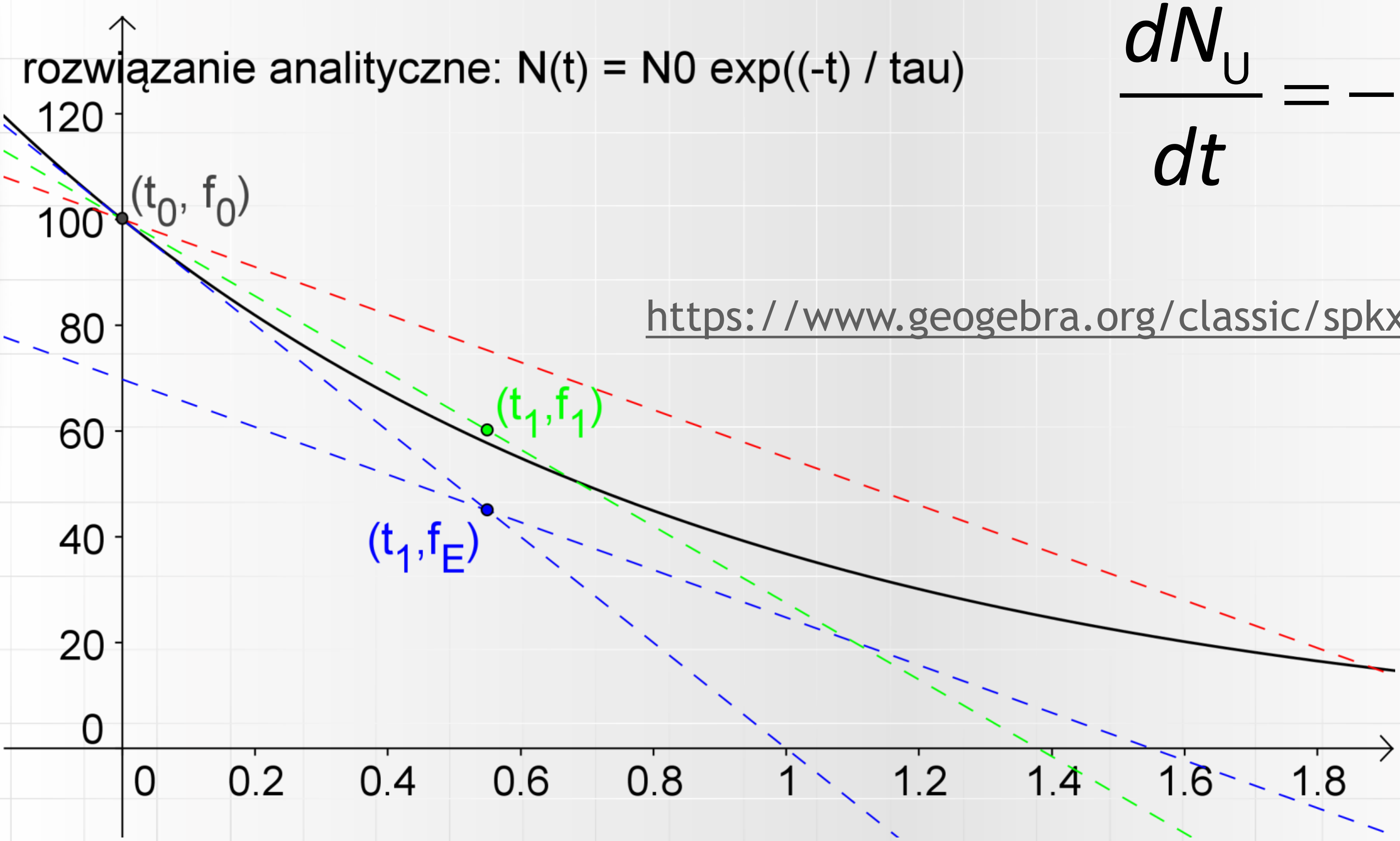



https://www.geogebra.org/classic/sb2fjudh

# Metoda Heuna

$$\frac{dN_U}{dt} = -\frac{N_U}{\tau}$$

https://www.geogebra.org/classic/spkxdnwf

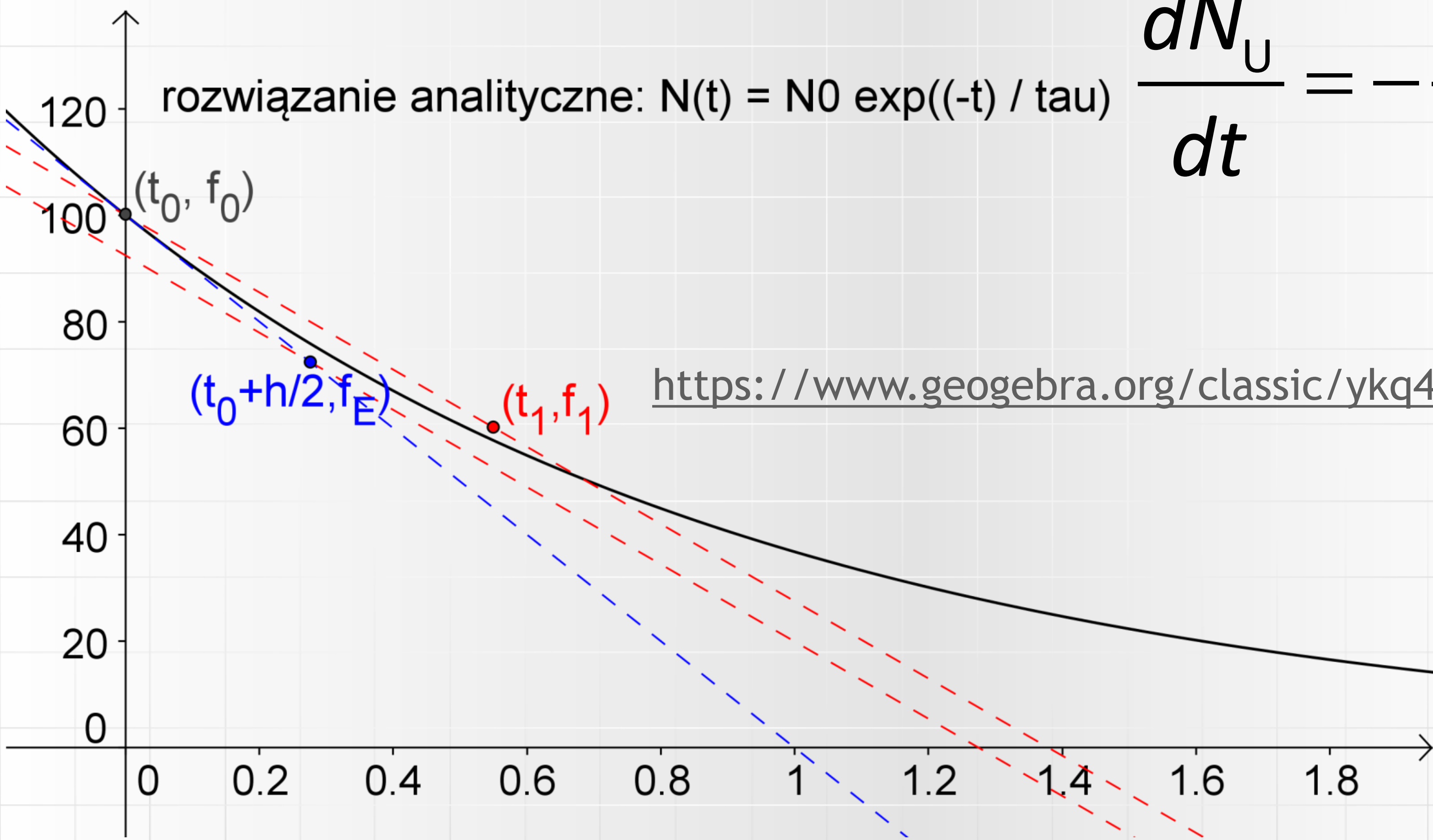


# Metoda Heuna

$$f(t+h) \approx f(t) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hg(t, f) \\ k_2 &= hg(t+h, f+k_1) \end{aligned}$$

# Metoda punktu pośredniego




$$\frac{dN_U}{dt} = -\frac{N_U}{\tau}$$

https://www.geogebra.org/classic/ykq4ynag

# Metoda punktu pośredniego

$$\boxed{f(t+h) \approx f(t) + k_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= hg(t, f) \\ k_2 &= hg\left(t + \frac{h}{2}, f + \frac{k_1}{2}\right) \end{aligned}}$$

# Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$\boxed{f(t+h) \approx f(t) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= hg(t, f(t)) \\ k_2 &= hg(t+h, f(t)+k_1) \end{aligned}}$$

$$\boxed{f(t+h) \approx f(t) + k_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= hg(t, f(t)) \\ k_2 &= hg\left(t+\frac{h}{2}, f(t)+\frac{k_1}{2}\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= hg(t, f(t)) \\ k_2 &= hg(t+\nu_{21}h, f(t)+\nu_{21}k_1) \end{aligned}}$$

# Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$\frac{df}{dt} = g(t, f) \qquad f(t+h) = f(t) + h\left.\frac{df}{dt}\right|_t + \frac{h^2}{2}\left.\frac{d^2 f}{dt^2}\right|_t + O(h^3)$$

$$f(t+h) = f(t) + hg(t, f(t)) + \frac{h^2}{2}\left.\frac{d}{dt}g\right|_t + O(h^3)$$

$$f(t+h) = f(t) + hg(t, f(t)) + \frac{h^2}{2}\left.\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial f}\frac{df}{dt}\right)\right|_t + O(h^3)$$

$$f(t+h) = f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$$

# Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$k_1 = hg\left(t, f(t)\right)$$

$$k_2 = h\left[g\left(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}k_1\right)\right]$$

$$k_2 = h\left[g\left(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}hg\left(t, f(t)\right)\right)\right]$$

$$k_2 = h\left[g\left(t, f(t)\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_t v_{21}h + \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_t v_{21}hg\left(t, f(t)\right) + O\left(h^2\right)\right]$$

$$k_2 = hg\left(t, f(t)\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_t v_{21}h^2 + \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_t v_{21}h^2 g\left(t, f(t)\right) + O\left(h^3\right)$$

# Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$k_2 = hg\left(t, f\left(t\right)\right) + \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_t \nu_{21} h^2 + \left.\frac{\partial g}{\partial f}\right|_t \nu_{21} h^2 g\left(t, f\left(t\right)\right) + O\left(h^3\right)$$

$$k_2 = hg\left(t, f\left(t\right)\right) + \nu_{21} h^2 \left.\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial f} g\right)\right|_t + O\left(h^3\right)$$

$$f\left(t+h\right) = f\left(t\right) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 \qquad k_1 = hg\left(t, f\left(t\right)\right)$$

$$f\left(t+h\right) = f\left(t\right) + \alpha_1 hg\left(t, f\left(t\right)\right) + \alpha_2 hg\left(t, f\left(t\right)\right) +$$

$$+ \alpha_2 \nu_{21} h^2 \left.\left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial f} g\right)\right|_t + O\left(h^3\right)$$

# Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$f(t+h) = f(t) + (\alpha_1 + \alpha_2) hg(t, f(t)) +$$
$$+ \alpha_2 \nu_{21} h^2 \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial f} g \right)\Bigg|_t + O(h^3)$$

$$f(t+h) = f(t) + hg(t, f(t)) + \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial f} \frac{df}{dt} \right)\Bigg|_t + O(h^3)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 \nu_{21} = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \nu_{21} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \nu_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

# Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$\boxed{f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} k_1 &= hg(t, f(t)) \\ k_2 &= hg(t + \nu_{21} h, f(t) + \nu_{21} k_1) \end{aligned}}$$

| | |
|---|---|
| $\nu_{21}$ | |
| $\alpha_1$ | $\alpha_2$ |

| | |
|---|---|
| 1 | |
| ½ | ½ |

| | |
|---|---|
| ½ | |
| 0 | 1 |

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 \nu_{21} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \nu_{21} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \nu_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

# Metody Rungego-Kutty

$$\boxed{f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \ldots + \alpha_n k_n}$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= hg\left(t, f(t)\right) \\
k_2 &= hg\left(t + \nu_{21}h, f(t) + \nu_{21}k_1\right) \\
k_3 &= hg\left(t + \nu_{31}h + \nu_{32}h, f(t) + \nu_{31}k_1 + \nu_{32}k_2\right) \\
&\vdots \\
k_n &= hg\left(t + h\sum_{i=1}^{n-1}\nu_{ni}, f(t) + \sum_{i=1}^{n-1}\nu_{ni}k_i\right)
\end{aligned}$$

Politechnika Wrocławska

# Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego

$$f(t+h) \approx f(t) + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = hg\left(t, f(t)\right)$$

$$k_2 = hg\left(t + \frac{1}{2}h, f(t) + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hg\left(t + \frac{1}{2}h, f(t) + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hg\left(t + h, f(t) + k_3\right)$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ½ | | | |
| 0 | ½ | | |
| 0 | 0 | 1 | |
| 1/6 | 1/3 | 1/3 | 1/6 |

# Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego

$$f(t+h)=\tilde{f}(t+h)+Ch^5$$

$$f(t+h)=\hat{f}(t+h)+2C\left(h/2\right)^5$$

$$0=\tilde{f}(t+h)-\hat{f}(t+h)+\frac{15}{16}Ch^5$$

$$Ch^5=\frac{16}{15}\left[\hat{f}(t+h)-\tilde{f}(t+h)\right]\approx\hat{f}(t+h)-\tilde{f}(t+h)$$

# Metody adaptacyjne Rungego-Kutty
## Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga

| Liczba obliczonych wartości funkcji | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Maksymalny rząd metody | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |

$$\hat{f}\left(t+h\right) := f\left(t\right) + \sum_{i=1}^{6} \alpha_i k_i$$

$$\tilde{f}\left(t+h\right) := f\left(t\right) + \sum_{i=1}^{6} \beta_i k_i$$

$$k_i := hg\left( t + h\sum_{j=1}^{i-1} v_{ij}, f\left(t\right) + \sum_{j=1}^{i-1} v_{ij} k_j \right)$$

# Metody adaptacyjne Rungego-Kutty
## Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga

| $i$ | $\alpha_i$ | $\alpha_i$-$\beta_i$ | $d_{i1}$ | $d_{i2}$ | $d_{i3}$ | $d_{i4}$ | $d_{i5}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{16}{135}$ | $\frac{1}{360}$ | | | | | |
| 2 | $0$ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | | | | |
| 3 | $\frac{6656}{12825}$ | $-\frac{128}{4275}$ | $\frac{3}{32}$ | $\frac{9}{32}$ | | | |
| 4 | $\frac{28561}{56430}$ | $-\frac{2197}{75240}$ | $\frac{1932}{21967}$ | $-\frac{7200}{2197}$ | $\frac{7296}{2197}$ | | |
| 5 | $-\frac{9}{50}$ | $\frac{1}{50}$ | $\frac{439}{216}$ | $-8$ | $\frac{3680}{513}$ | $-\frac{845}{4104}$ | |
| 6 | $\frac{2}{55}$ | $\frac{2}{55}$ | $-\frac{8}{27}$ | $2$ | $-\frac{3544}{2565}$ | $\frac{1859}{4104}$ | $-\frac{11}{40}$ |

# Metody adaptacyjne Rungego-Kutty

## Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga

$$e := \hat{f}\left(t+h\right) - \tilde{f}\left(t+h\right) = \sum_{i=1}^{6}\left(\alpha_i - \beta_i\right)k_i$$

$$\left|e\right| < \delta$$

$$e \approx Ch^5$$

$$\left|e\right| < \delta / 128$$

# Metody adaptacyjne Rungego-Kutty
## ode23 Bogacki-Shampine

| $i$ | $\alpha_i$ | $\beta_i$ | $d_{i1}$ | $d_{i2}$ | $d_{i3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{2}{9}$ | $\frac{7}{24}$ | | | |
| 2 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | | |
| 3 | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $0$ | $\frac{3}{4}$ | |
| 4 | $0$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{4}{9}$ |

$$\hat{f}(t+h) := f(t) + \sum_{i=1}^{4} \alpha_i k_i$$

$$\tilde{f}(t+h) := f(t) + \sum_{i=1}^{4} \beta_i k_i$$

$$k_i := hg\left(t + h\sum_{j=1}^{i-1} d_{ij}, f(t) + \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij} k_j\right)$$

# Obniżenie rzędu równania

Typowe zagadnienie początkowe opisane jest równaniem

$$\frac{du}{dx} = f\left(x, u\right), \quad u\left(x_0\right) = u^{(0)}.$$

W zagadnieniu początkowym może występować więcej zmiennych

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}\right), \quad \mathbf{u}\left(x_0\right) = \mathbf{u}^{(0)}.$$

# Obniżenie rzędu równania

Zagadnienie początkowe rzędu drugiego

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x, u, u'\right), \quad u\left(x_0\right) = u^{(0)}, \quad u'\left(x_0\right) = u'^{(0)}$$

można zapisać jako zagadnienie początkowe rzędu pierwszego dla dwóch zmiennych

$$u_1 \equiv u, \quad u_2 \equiv u' \quad \begin{array}{ll} \dfrac{du_1}{dx} = u_2, & u_1\left(x_0\right) = u_1^{(0)}, \\ \dfrac{du_2}{dx} = f\left(x, u_1, u_2\right), & u_2\left(x_0\right) = u_2^{(0)}. \end{array}$$

Politechnika Wrocławska

# Obniżenie rzędu równania

Zagadnienie początkowe rzędu pierwszego dla dwóch zmiennych

$$\frac{du_1}{dx} = u_2, \qquad u_1(x_0) = u_1^{(0)},$$

$$\frac{du_2}{dx} = f(x, u_1, u_2), \qquad u_2(x_0) = u_2^{(0)}.$$

można zapisać w postaci wektorowej

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ f(x, u_1, u_2) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1(x_0) \\ u_2(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

# Obniżenie rzędu równania

Zagadnienie początkowe w postaci wektorowej

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ f\left(x, u_1, u_2\right) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1\left(x_0\right) \\ u_2\left(x_0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}\right), \qquad \mathbf{u}\left(x_0\right) = \mathbf{u}^{(0)}.$$

# Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu początkowym rzędu drugiego znamy wartości funkcji i jej pochodnej w punkcie początkowym

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x, u, u'\right), \quad u\left(x_0\right) = u^{(0)}, \quad u'\left(x_0\right) = u'^{(0)}.$$

Innym typem problemów są zagadnienia brzegowe, przykładowo

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x, u, u'\right), \quad u\left(x_0\right) = u^{(0)}, \quad u\left(x_1\right) = u^{(1)}.$$

# Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu brzegowym

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x,u,u'\right)$$

$$u'' = f\left(x,u,u'\right)$$

możemy dobrać tak układ współrzędnych, aby

$$x_0 = 0,\quad x_1 = 1.$$

# Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu brzegowym

$$u'' = f(x, u, u')$$

możemy znać różne zestawy warunków brzegowych

$$u(0) = u^{(0)},\ u(1) = u^{(1)}; \qquad u(0) = u^{(0)},\ u'(1) = v^{(1)};$$

$$u'(0) = v^{(0)},\ u(1) = u^{(1)}; \qquad u'(0) = v^{(0)},\ u'(1) = v^{(1)}.$$

# Zagadnienie własne

W niektórych przypadkach w problemie pojawia się jeszcze parametr – wartość własna

$$u'' = f\left(x, u, u', \lambda\right).$$

# Zagadnienie własne

$$u'' = f(x, u, u', k)$$

Przykład: drgania podłużne sprężystego pręta.

$$u'' = -k^2 u$$

- pręt obustronnie umocowany

$$u(0) = 0 \qquad u(1) = 0$$

- pręt umocowany jednostronnie

$$u(0) = 0 \qquad u'(1) = 0$$

# Zagadnienie własne

## Rozwiązania analityczne dla pręta obustronnie umocowanego

$$u_n(x) = \sqrt{2}\sin(k_n x)$$

$$k_n^2 = (n\pi)^2$$

# Metoda strzałów

## Zagadnienie brzegowe

$$u'' = f\left(x, u, u'\right)$$

Stosując podstawienia $y_1 = u$ $y_2 = u'$

otrzymujemy

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f\left(x, y_1, y_2\right).$$

Załóżmy, że warunki brzegowe są postaci:

$$u(0) = u^{(0)}, \quad u(1) = u^{(1)}.$$

# Metoda strzałów

## Zagadnienie brzegowe

Wprowadźmy dodatkowy parametr $\delta$ i załóżmy, że

$$u'(0) = \delta.$$

Dla ustalonego $\delta$ jesteśmy w stanie rozwiązać zagadnienie początkowe znanymi metodami.

Rozwiązanie równania różniczkowego daje nam wartość funkcji na drugim brzegu przedziału

$$u_\delta(1).$$

$$F(\delta) = u_\delta(1) - u^{(1)}$$

# Metoda strzałów

## Zagadnienie brzegowe

Miejsca zerowego funkcji

$$F(\delta) = u_\delta(1) - u^{(1)}$$

poszukiwać możemy np. metodami:

- bisekcji,
- siecznych.

# Metoda strzałów

## Zagadnienie własne

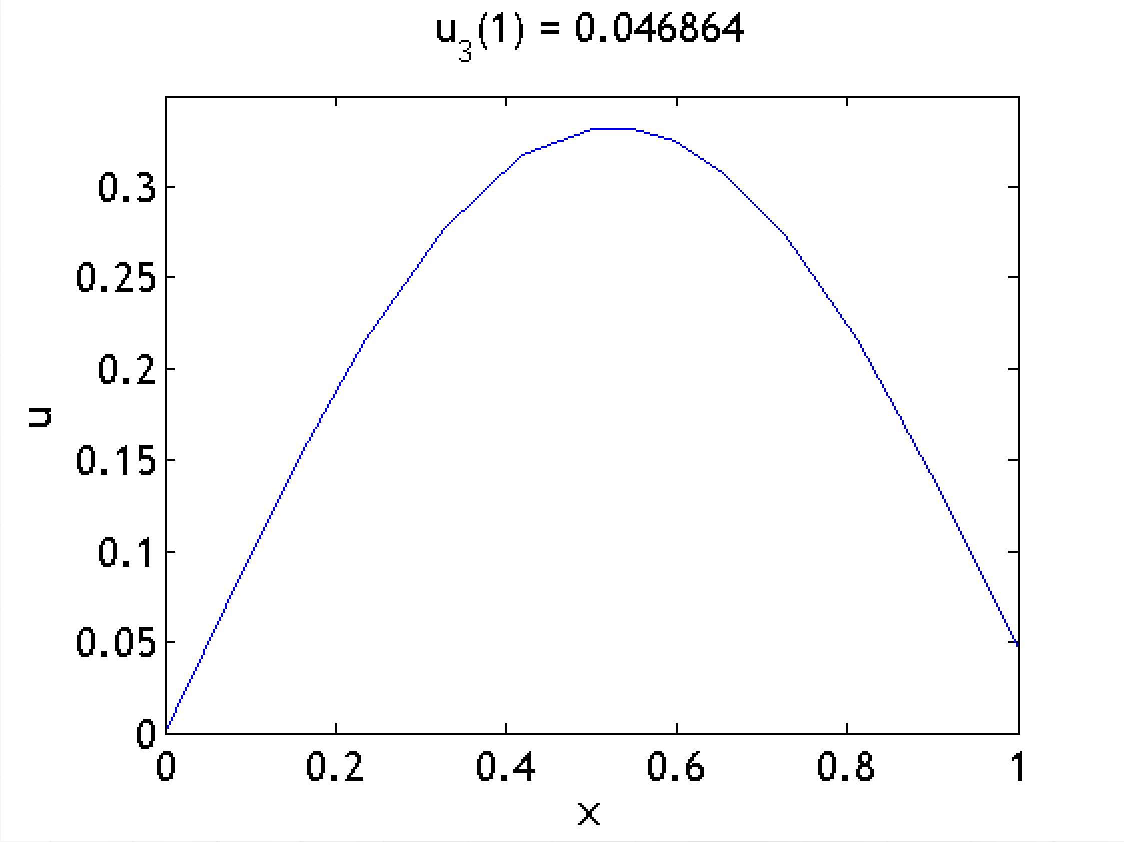
$$F(k) = u_k(1) - u^{(1)}$$

Metodę strzałów można także wykorzystać do rozwiązania zagadnienia własnego.

W tym przypadku dopasowujemy wartość własną zagadnienia.

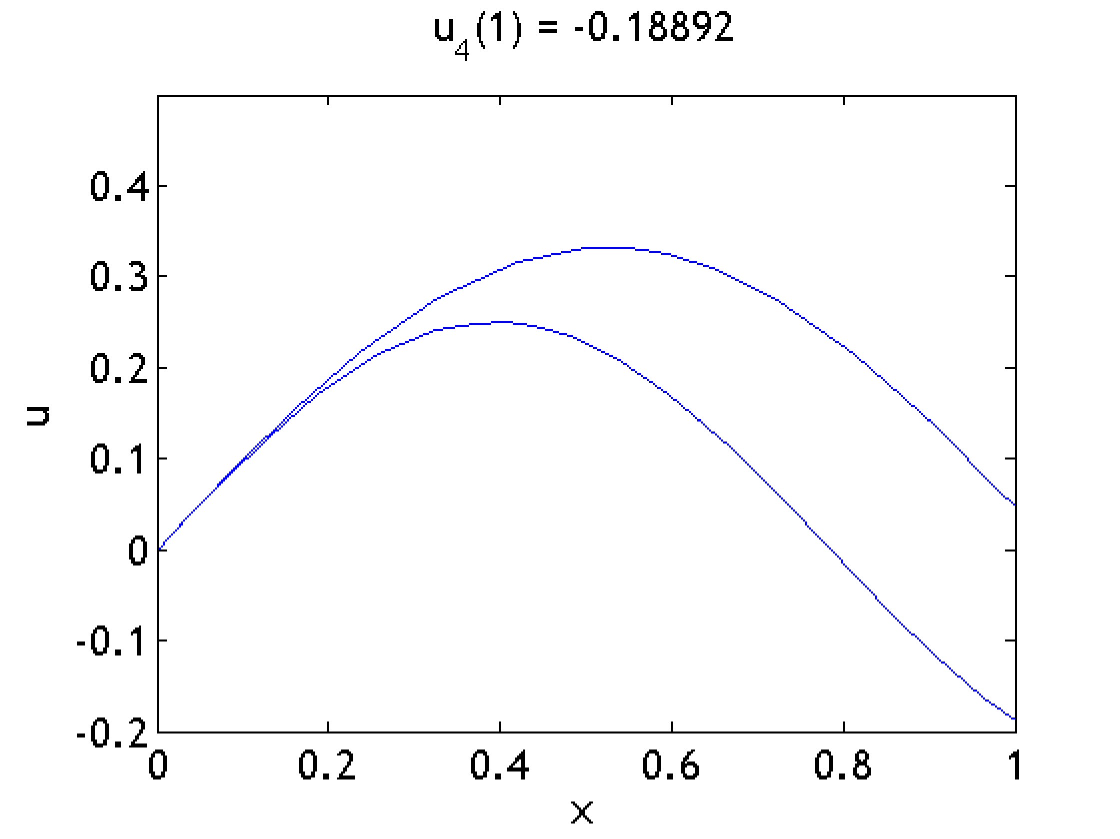
# Metoda strzałów

## Zagadnienie własne



# Metoda strzałów

## Zagadnienie własne



# Zagadnienie brzegowe

## Funkcje Matlaba

Do rozwiazywania zagadnienia brzegowego w środowisku Matlab można wykorzystać funkcje **`bvp4c()`**, **`bvp5c()`**, które wykorzystują metodę kolokacji.

https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/bvp4c.html

https://www.mathworks.com/help/matlab/math/solve-bvp-with-unknown-parameter.html

# Zagadnienie brzegowe

## Metoda różnic skończonych

$$u'' = -k^2 u$$

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = b,\ x_i = a + is,\ s = \frac{b-a}{n+1}.$$

$$u_i = u\left(x_i\right)$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{s^2} = -k^2 u_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\dots,n$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -s^2 k^2 u_i,$$

# Zagadnienie brzegowe
## Metoda różnic skończonych

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -s^2 k^2 u_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n$$

$$u_0 = 0, \; u_{n+1} = 0,$$

$$\mathbf{B}u = \lambda u.$$

# Podsumowanie (1.1)

- Zagadnienie początkowe $$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{f}), \quad \mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}_0$$

- Metoda Eulera $$f_{n+1} = f_n + hg_n + O(h^2)$$

$$f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$$

- Metody Rungego-Kutty $$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg(t + \nu_{21}h, f(t) + \nu_{21}k_1)$$

# Podsumowanie (1.2)

- Metody Rungego-Kutty

$$f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \ldots + \alpha_n k_n$$

$$\begin{aligned}
k_1 &= hg\left(t, f(t)\right) \\
k_2 &= hg\left(t + \nu_{21} h, f(t) + \nu_{21} k_1\right) \\
k_3 &= hg\left(t + \nu_{31} h + \nu_{32} h, f(t) + \nu_{31} k_1 + \nu_{32} k_2\right) \\
&\vdots \\
k_n &= hg\left(t + h\sum_{i=1}^{n-1} \nu_{ni}, f(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \nu_{ni} k_i\right)
\end{aligned}$$

- Kontrola wielkość błędu
- Obniżenie rzędu równania

# Podsumowanie (2.1)

- Zagadnienie początkowe

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ f\left(x, u_1, u_2\right) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1\left(x_0\right) \\ u_2\left(x_0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}\right), \qquad \mathbf{u}\left(x_0\right) = \mathbf{u}^{(0)}.$$

- Zagadnienie brzegowe

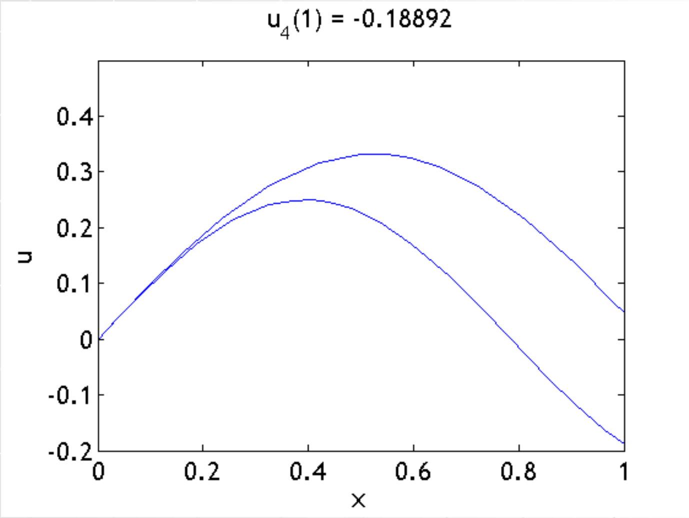
$$u'' = f\left(x, u, u'\right)$$

$$u(0) = u^{(0)},\ u(1) = u^{(1)} \text{ itp.}$$

# Podsumowanie (2.2)

- Zagadnienie własne $$u'' = f\left(x, u, u', \lambda\right)$$

- Metoda strzałów



# Podsumowanie (2.3)

- **`bvp4c()`**

```
sol = bvp4c(odefun,bcfun,solinit)
```

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{s^2} = -k^2 u_i$$

- Metoda różnic skończonych

$$\mathbf{B}u = \lambda u.$$