

Metody numeryczne w fizyce

FZP002934wcl

rok akademicki 2021/22

semestr letni

Wykład 4

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220



Plan wykładu (1)

- Różniczkowanie numeryczne
 - Pierwsza pochodna
 - Dokładność przybliżenia
 - Druga pochodna
 - Zastosowanie interpolacji wielomianowej
- Całkowanie numeryczne
 - Zastosowanie interpolacji wielomianowej
 - Wzór Newtona-Cotesa
 - Wzór trapezów
 - Wzór Simpsona

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*



Plan wykładu (2)

- Zagadnienie początkowe
- Metoda Eulera
- Metody Rungego-Kutty
 - metoda Heuna
 - metoda punktu pośredniego
 - metoda rzędu czwartego
- Kontrola wielkość błędu

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*

Różniczkowanie numeryczne

Pierwsza pochodna

- Wzór Taylora

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(\xi)$$

- Pierwsza pochodna

$$f'(x) = \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] - \frac{1}{2}hf''(\xi)$$

Różniczkowanie numeryczne

Pierwsza pochodna - przykład

- Stosując wzór

$$f'(x) = \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] - \frac{1}{2} h f''(\xi)$$

- Chcemy obliczyć przybliżoną wartość pochodnej funkcji $\cos(x)$ w punkcie $x = \pi/4$ dla $h = 0,01$ i oszacować błąd przybliżenia

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &\approx \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + 0,01\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{0,01} = \\ &= \frac{0,700\ 000\ 476 - 0,707\ 106\ 781}{0,01} = -0,710\ 630\ 501 \end{aligned}$$

Różniczkowanie numeryczne

Pierwsza pochodna - przykład

- Błąd wyznaczonej wartości

$$\left| \frac{1}{2} hf''(\xi) \right| = 0,005 |\cos \xi| \leq 0,005$$

$$\xi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 0,01 \right)$$

$$|\cos \xi| \leq 0,707\ 106\ 781$$

$$\left| \frac{1}{2} hf''(\xi) \right| = 0,005 |\cos \xi| \leq 0,003\ 535\ 534$$



Różniczkowanie numeryczne

Pierwsza pochodna - przykład

$$\left| \frac{1}{2} h f''(\xi) \right| \leq 0,003\ 535\ 534$$

$$f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \approx -0,710\ 630\ 501$$

$$-\sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = -0,707\ 106\ 781$$

$$f' \left(\frac{\pi}{4} \right) - \left[-\sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right] = -0,003\ 523\ 719$$



Różniczkowanie numeryczne

Zmniejszanie kroku

$$f'(x) = \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] - \frac{1}{2} h f''(\xi)$$

$$f'(x) = \frac{1}{h} [f(x+h) - f(x)] + O(h)$$

- Zmniejszanie h powinno prowadzić do zwiększenia dokładności przybliżenia pochodnej

Różniczkowanie numeryczne

Zmniejszanie kroku

$$f = \operatorname{arctg}(x) \quad \text{dla} \quad x = \sqrt{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad f'(\sqrt{2}) = \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{3}$$

x	1,41421356237310e0
f(x)	9,55316618124509e-1

h	f(x+h)	f(x+h)-f(x)	(f(x+h)-f(x))/h
2 ⁻¹	1,08938363393987e0	1,34067015815356e-01	2,68134031630713e-1
2 ⁻²	1,02972677195646e0	7,44101538319478e-02	2,97640615327791e-1
2 ⁻³	9,94644389826101e-1	3,93277717015921e-02	3,14622173612737e-1
2 ⁻⁴	9,75550948454817e-1	2,02343303303073e-02	3,23749285284917e-1
2 ⁻¹⁰	9,55641989159854e-1	3,25371035345134e-04	3,33179940193418e-1
2 ⁻²⁵	9,55316628058617e-1	9,93410731453537e-09	3,33333328366280e-1
2 ⁻⁴⁰	9,55316618124812e-1	3,03201908025130e-13	3,33374023437500e-1
2 ⁻⁴⁸	9,55316618124511e-1	1,22124532708767e-15	3,43750000000000e-1
2 ⁻⁴⁹	9,55316618124510e-1	0,00000000000000e0	0,00000000000000e0



Różniczkowanie numeryczne

Pierwsza pochodna - dokładność kwadratowa

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{3!}h^3f'''(\xi_+)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) - \frac{1}{3!}h^3f'''(\xi_-)$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 0 + 2hf'(x) + 0 + \frac{1}{3!}h^3[f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)]$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{1}{12}h^2[f'''(\xi_+) + f'''(\xi_-)] = \\ &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{1}{6}h^2f'''(\xi) \end{aligned}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$



Różniczkowanie numeryczne

Druga pochodna - dokładność kwadratowa

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) + \frac{1}{3!}h^3f'''(x) + \frac{1}{4!}h^4f^{(IV)}(\xi_+)$$

$$f(x) = f(x)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2f''(x) - \frac{1}{3!}h^3f'''(x) + \frac{1}{4!}h^4f^{(IV)}(\xi_-)$$

$$f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) = h^2f''(x) + \frac{1}{12}h^4f^{(IV)}(\xi)$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$



Różniczkowanie numeryczne

Zastosowanie interpolacji wielomianowej

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x)}_{p(x)} + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) w(x)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$f'(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i'(x) + \frac{1}{(n+1)!} \left[f^{(n+1)}(\xi) w'(x) + w(x) \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi) \right]$$

$$w'(x) = \sum_{j=0}^n \left[\prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i) \right]$$



Różniczkowanie numeryczne

Zastosowanie interpolacji wielomianowej

- Gdy x jest jednym z węzłów ($x = x_m$)

$$w'(x) = \sum_{j=0}^n \left[\prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i) \right]$$

$$w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

$$w'(x_m) = \prod_{i=0, i \neq m}^n (x_m - x_i)$$

$$f'(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i'(x) + \frac{1}{(n+1)!} \left[f^{(n+1)}(\xi) w'(x) + w(x) \frac{d}{dx} f^{(n+1)}(\xi) \right]$$

$$f'(x_m) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i'(x_m) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0, i \neq m}^n (x_m - x_i)$$



Różniczkowanie numeryczne

Zastosowanie interpolacji wielomianowej - przykład

- dla $n = 2$ oraz $m = 1$

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \frac{x - x_2}{x_0 - x_2}, \quad l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}, \quad l_2(x) = \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$
$$l_0'(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}, \quad l_1'(x) = \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}, \quad l_2'(x) = \frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

$$f'(x_1) = f(x_0) \frac{x_1 - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f(x_1) \frac{2x_1 - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$
$$+ f(x_2) \frac{x_1 - x_0}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{1}{6} f'''(\xi)(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)$$



Całkowanie numeryczne

Zastosowanie interpolacji wielomianowej

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b p(x) dx = \int_a^b \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x) dx = \sum_{i=0}^n f(x_i) \int_a^b l_i(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$A_i = \int_a^b l_i(x) dx$$

Jeżeli węzły są równoodległe, to powyższy wzór nazywamy wzorem Newtona-Cotesa



Całkowanie numeryczne

Wzór trapezów

Całkowanie z wykorzystaniem interpolacji wielomianowej dla przypadku $n = 1$ sprowadza się do wzoru trapezów ($x_0 = a$, $x_1 = b$)

$$l_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - b}{a - b}$$

$$l_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x - a}{b - a}$$

$$A_0(x) = \int_a^b \frac{x - b}{a - b} dx = \frac{1}{2}(b - a)$$

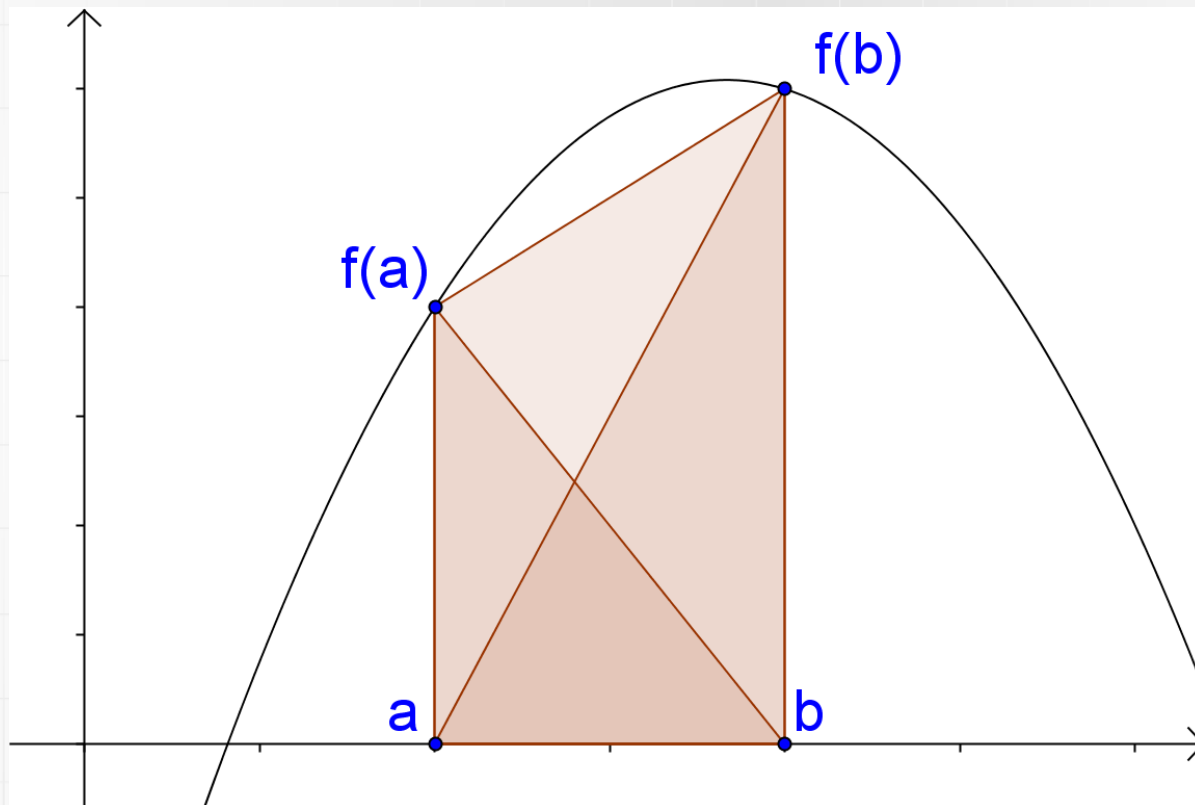
$$A_1(x) = \int_a^b \frac{x - a}{b - a} dx = \frac{1}{2}(b - a)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2}(b - a)[f(a) + f(b)]$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2}(b - a)[f(a) + f(b)] - \frac{1}{12}(b - a)^3 f''(\xi)$$

Całkowanie numeryczne

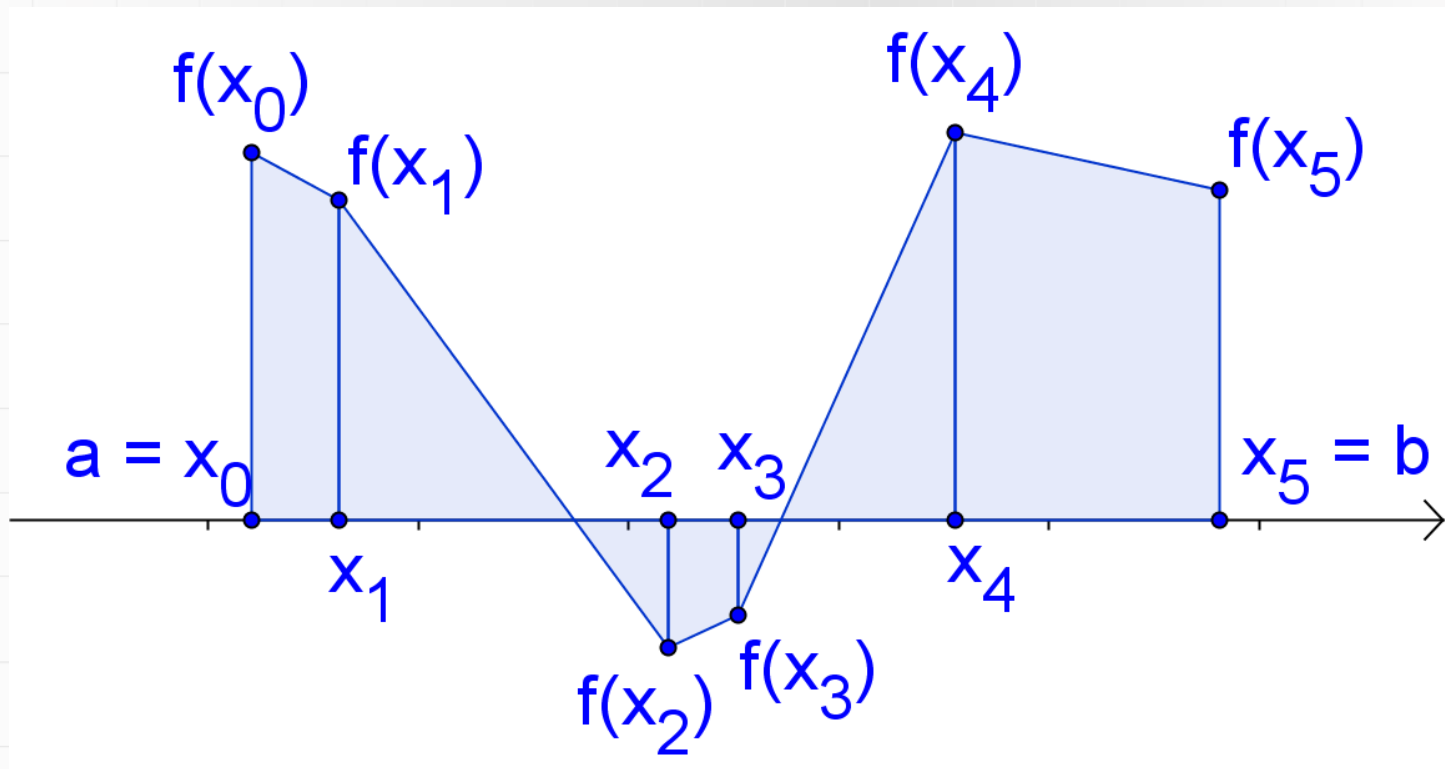
Wzór trapezów



$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} (b - a) [f(a) + f(b)]$$

Całkowanie numeryczne

Złożony wzór trapezów

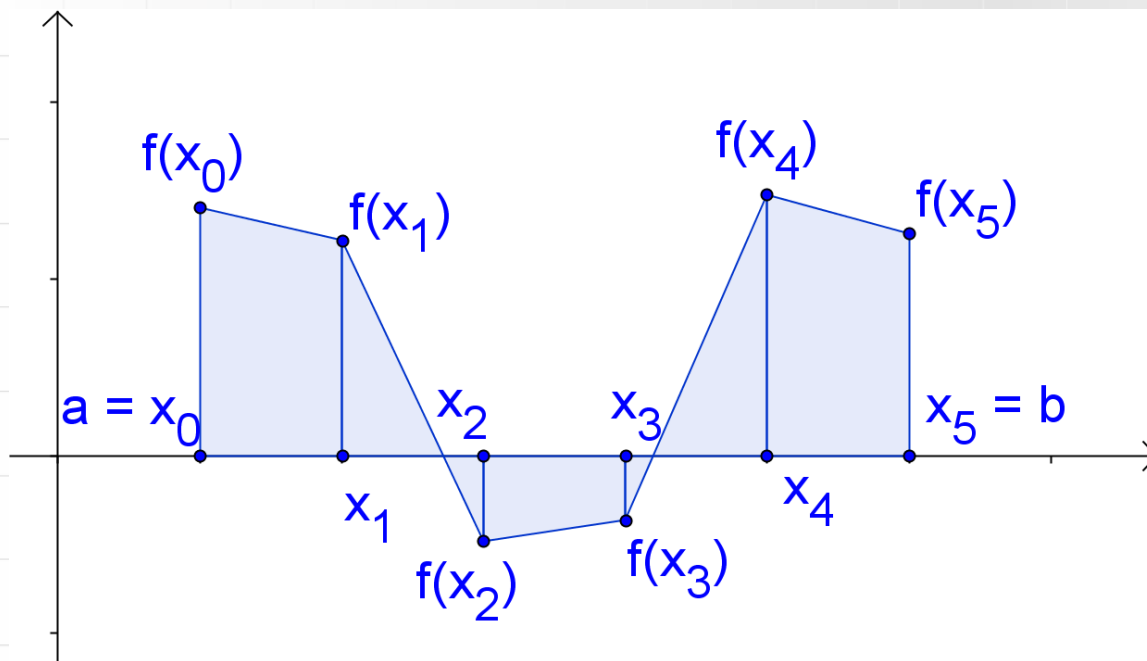


$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \approx \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) [f(x_i) + f(x_{i+1})]$$



Całkowanie numeryczne

Złożony wzór trapezów



$$x_i = a + ih$$

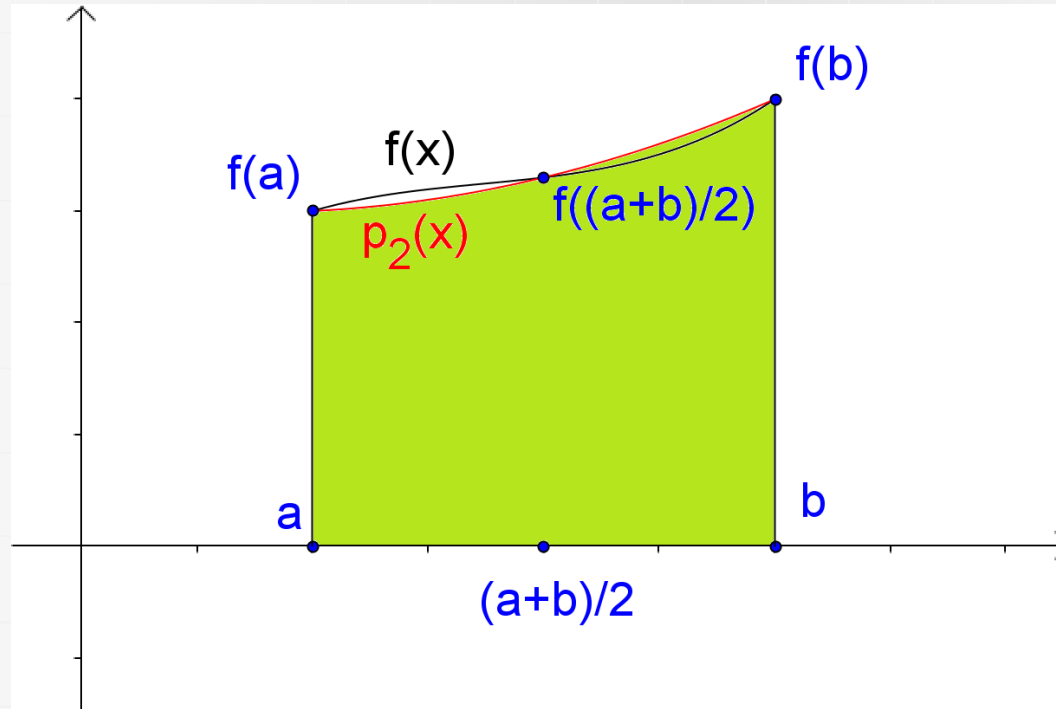
$$h = \frac{(b - a)}{n}$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} h \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] = h \left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$



Całkowanie numeryczne

Wzór Simpsona



$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{6}(b-a) \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] - \frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)$$



Całkowanie numeryczne

Złożony wzór Simpsona

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{6}(b-a) \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad x_i = a + ih \quad (0 \leq i \leq 2n)$$

$$h = \frac{(b-a)}{2n}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x) dx \approx$$

$$\approx \frac{1}{3} h \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} h \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{2i+1}) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} f(x_{2i+2}) + f(x_{2n}) \right]$$



Zagadnienie początkowe

Typowe zagadnienie początkowe opisane jest równaniem

$$\frac{df}{dt} = g(t, f), \quad f(t_0) = f_0.$$

W zagadnieniu początkowym może występować więcej zmiennych

$$\frac{df}{dt} = \mathbf{g}(t, \mathbf{f}), \quad \mathbf{f}(t_0) = \mathbf{f}_0.$$



Metoda Eulera

$$\frac{df}{dt} = g(t, f), \quad f(t_0) = f_0.$$

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{t_{n+1} - t_n} \approx g(t_n, f_n) = g_n$$

$$\frac{f_{n+1} - f_n}{h} \approx g_n$$

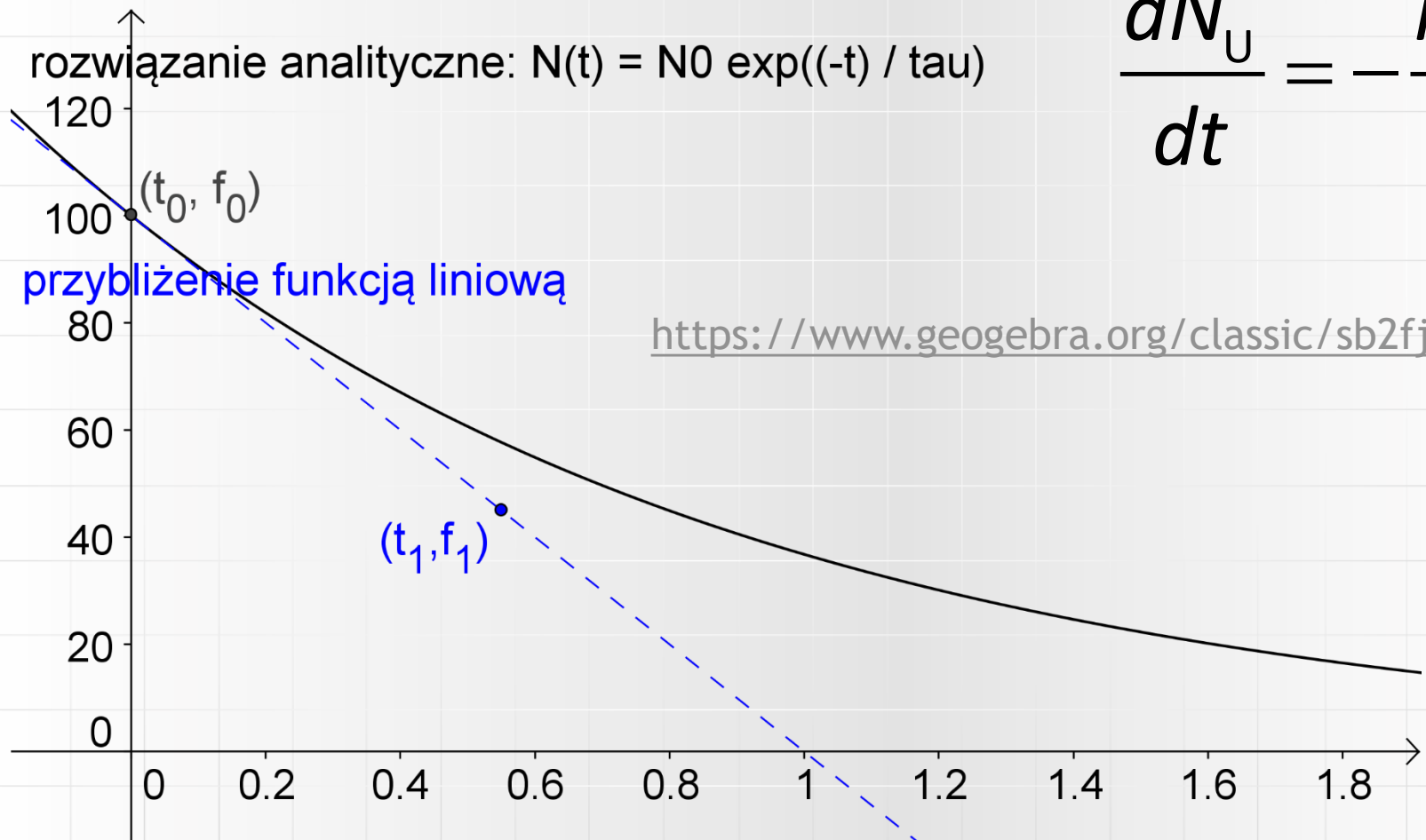
$$f_{n+1} = f_n + hg_n + O(h^2)$$



Metoda Eulera

$$\frac{dN_U}{dt} = -\frac{N_U}{\tau}$$

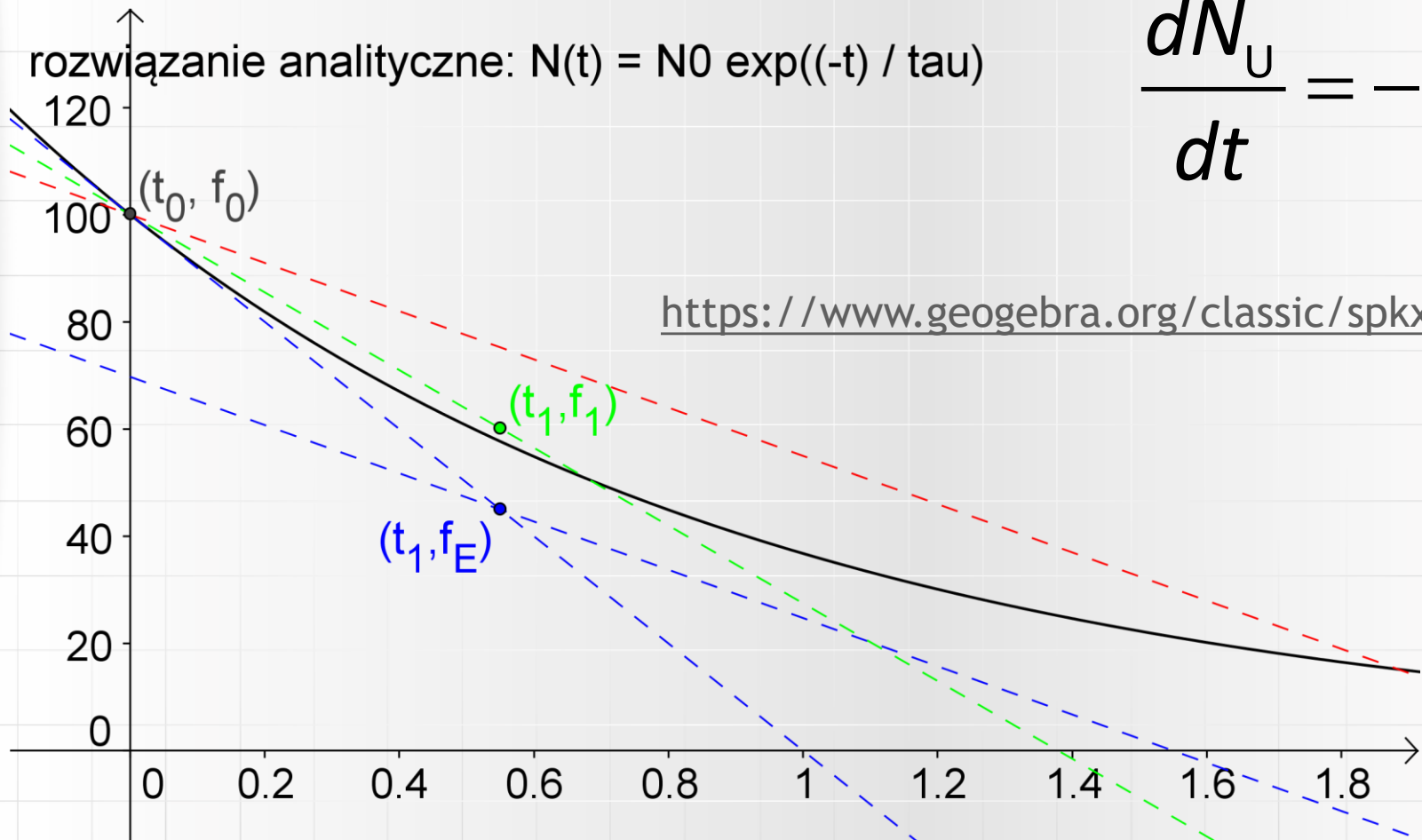
rozwiązanie analityczne: $N(t) = N_0 \exp((-t) / \tau)$



Metoda Heuna

$$\frac{dN_U}{dt} = -\frac{N_U}{\tau}$$

rozwiązanie analityczne: $N(t) = N_0 \exp((-t) / \tau)$



<https://www.geogebra.org/classic/spkxdnwf>



Metoda Heuna

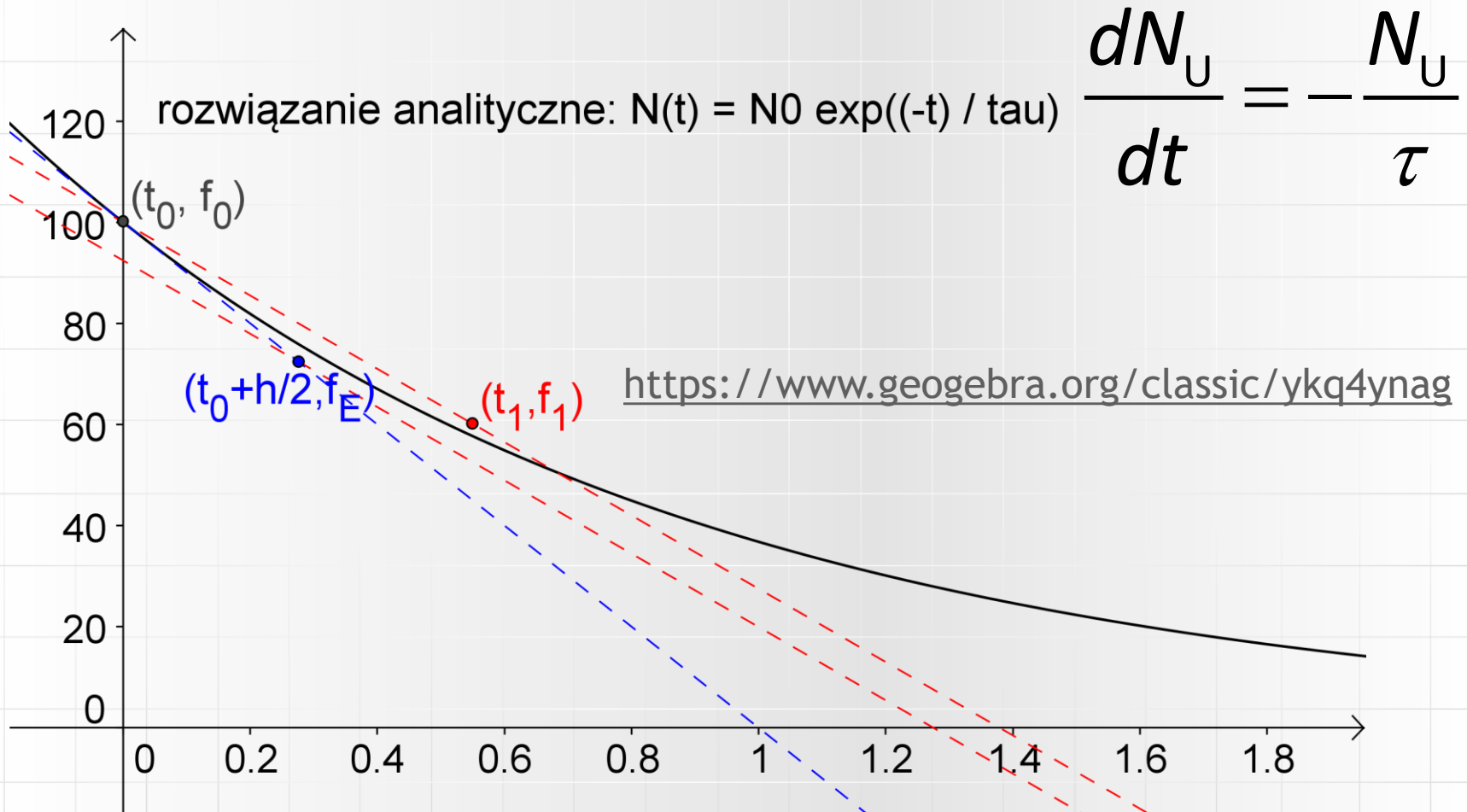
$$f(t+h) \approx f(t) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = hg(t, f)$$

$$k_2 = hg(t+h, f+k_1)$$



Metoda punktu pośredniego





Metoda punktu pośredniego

$$f(t+h) \approx f(t) + k_2$$

$$k_1 = hg(t, f)$$

$$k_2 = hg\left(t + \frac{h}{2}, f + \frac{k_1}{2}\right)$$



Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$f(t+h) \approx f(t) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg(t+h, f(t) + k_1)$$

$$f(t+h) \approx f(t) + k_2$$

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg\left(t + \frac{h}{2}, f(t) + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$$

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}k_1)$$



Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$\frac{df}{dt} = g(t, f) \quad f(t+h) = f(t) + h \frac{df}{dt} \Big|_t + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 f}{dt^2} \Big|_t + O(h^3)$$

$$f(t+h) = f(t) + hg(t, f(t)) + \frac{h^2}{2} \frac{d}{dt} g \Big|_t + O(h^3)$$

$$f(t+h) = f(t) + hg(t, f(t)) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial f} \frac{df}{dt} \right) \Big|_t + O(h^3)$$

$$f(t+h) = f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$$



Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = h \left[g(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}k_1) \right]$$

$$k_2 = h \left[g(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}hg(t, f(t))) \right]$$

$$k_2 = h \left[g(t, f(t)) + \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_t v_{21}h + \frac{\partial g}{\partial f} \Big|_t v_{21}hg(t, f(t)) + O(h^2) \right]$$

$$k_2 = hg(t, f(t)) + \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_t v_{21}h^2 + \frac{\partial g}{\partial f} \Big|_t v_{21}h^2g(t, f(t)) + O(h^3)$$



Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$k_2 = hg(t, f(t)) + \frac{\partial g}{\partial t} \Big|_t v_{21} h^2 + \frac{\partial g}{\partial f} \Big|_t v_{21} h^2 g(t, f(t)) + O(h^3)$$

$$k_2 = hg(t, f(t)) + v_{21} h^2 \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial f} g \right) \Big|_t + O(h^3)$$

$$f(t+h) = f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 \quad k_1 = hg(t, f(t))$$

$$f(t+h) = f(t) + \alpha_1 hg(t, f(t)) + \alpha_2 hg(t, f(t)) + \\ + \alpha_2 v_{21} h^2 \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial f} g \right) \Big|_t + O(h^3)$$



Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$f(t+h) = f(t) + (\alpha_1 + \alpha_2)hg(t, f(t)) + \alpha_2\nu_{21}h^2 \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial f} g \right) \Big|_t + O(h^3)$$

$$f(t+h) = f(t) + hg(t, f(t)) + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial f} \frac{df}{dt} \right) \Big|_t + O(h^3)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2\nu_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ \nu_{21} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \nu_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Metody Rungego-Kutty rzędu drugiego

$$f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$$

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}k_1)$$

v_{21}	
α_1	α_2

1	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$	
0	1

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 v_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{2} \\ v_{21} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ v_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Metody Rungego-Kutty

$$f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \dots + \alpha_n k_n$$

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}k_1)$$

$$k_3 = hg(t + v_{31}h + v_{32}h, f(t) + v_{31}k_1 + v_{32}k_2)$$

⋮

$$k_n = hg\left(t + h \sum_{i=1}^{n-1} v_{ni}, f(t) + \sum_{i=1}^{n-1} v_{ni} k_i\right)$$

Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego

$$f(t+h) \approx f(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg\left(t + \frac{1}{2}h, f(t) + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hg\left(t + \frac{1}{2}h, f(t) + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hg(t+h, f(t) + k_3)$$

$\frac{1}{2}$			
0	$\frac{1}{2}$		
0	0	1	
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Metoda Rungego-Kutty rzędu czwartego

$$f(t+h) = \tilde{f}(t+h) + Ch^5$$

$$f(t+h) = \hat{f}(t+h) + 2C\left(\frac{h}{2}\right)^5$$

$$0 = \tilde{f}(t+h) - \hat{f}(t+h) + \frac{15}{16}Ch^5$$

$$Ch^5 = \frac{16}{15} \left[\hat{f}(t+h) - \tilde{f}(t+h) \right] \approx \hat{f}(t+h) - \tilde{f}(t+h)$$

Metody adaptacyjne Rungego-Kutty

Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga

Liczba obliczonych wartości funkcji	1	2	3	4	5	6	7	8
Maksymalny rząd metody	1	2	3	4	4	5	6	6

$$\hat{f}(t+h) := f(t) + \sum_{i=1}^6 \alpha_i k_i$$

$$\tilde{f}(t+h) := f(t) + \sum_{i=1}^6 \beta_i k_i$$

$$k_i := hg \left(t + h \sum_{j=1}^{i-1} v_{ij}, f(t) + \sum_{j=1}^{i-1} v_{ij} k_j \right)$$

Metody adaptacyjne Rungego-Kutty

Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga

i	α_i	$\alpha_i - \beta_i$	d_{i1}	d_{i2}	d_{i3}	d_{i4}	d_{i5}
1	$\frac{16}{135}$	$\frac{1}{360}$					
2	0	0	$\frac{1}{4}$				
3	$\frac{6656}{12825}$	$-\frac{128}{4275}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$			
4	$\frac{28561}{56430}$	$-\frac{2197}{75240}$	$\frac{1932}{21967}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$		
5	$-\frac{9}{50}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	
6	$\frac{2}{55}$	$\frac{2}{55}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$



Metody adaptacyjne Rungego-Kutty

Metoda Rungego-Kutty-Fehlberga

$$e := \hat{f}(t+h) - \tilde{f}(t+h) = \sum_{i=1}^6 (\alpha_i - \beta_i) k_i$$

$$|e| < \delta$$

$$e \approx Ch^5$$

$$|e| < \delta / 128$$



Metody adaptacyjne Rungego-Kutty

ode23 Bogacki-Shampine

i	α_i	β_i	d_{i1}	d_{i2}	d_{i3}
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{24}$			
2	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$		
3	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{3}{4}$	
4	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$

$$\hat{f}(t+h) := f(t) + \sum_{i=1}^4 \alpha_i k_i$$

$$\tilde{f}(t+h) := f(t) + \sum_{i=1}^4 \beta_i k_i$$

$$k_i := hg \left(t + h \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij}, f(t) + \sum_{j=1}^{i-1} d_{ij} k_j \right)$$



Podsumowanie (1)

- Różniczkowanie numeryczne
 - Pierwsza pochodna
 - Dokładność przybliżenia
 - Druga pochodna
 - Zastosowanie interpolacji wielomianowej
- Całkowanie numeryczne
 - Zastosowanie interpolacji wielomianowej
 - Wzór Newtona-Cotesa
 - Wzór trapezów
 - Wzór Simpsona



Podsumowanie (2.1)

- Zagadnienie początkowe $\frac{df}{dt} = g(t, f), \quad f(t_0) = f_0$

- Metoda Eulera $f_{n+1} = f_n + hg_n + O(h^2)$

$$f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$$

- Metody Rungego-Kutty $k_1 = hg(t, f(t))$
 $k_2 = hg(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}k_1)$



Podsumowanie (2.2)

- Metody Rungego-Kutty

$$f(t+h) \approx f(t) + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \dots + \alpha_n k_n$$

$$k_1 = hg(t, f(t))$$

$$k_2 = hg(t + v_{21}h, f(t) + v_{21}k_1)$$

$$k_3 = hg(t + v_{31}h + v_{32}h, f(t) + v_{31}k_1 + v_{32}k_2)$$

⋮

$$k_n = hg\left(t + h \sum_{i=1}^{n-1} v_{ni}, f(t) + \sum_{i=1}^{n-1} v_{ni} k_i\right)$$

- Kontrola wielkość błędu