Politechnika Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

FZP002934wcL

rok akademicki 2021/22

semestr letni

Wykład 3

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220

Plan wykładu (1)

- Normy wektorów i macierzy
- Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych
  - Metoda Richardsona
  - Metoda Jacobiego

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*

Plan wykładu (2)

- Wielomian interpolujący
- Wzór interpolacyjny Newtona
- Wzór interpolacyjny Lagrange'a
- Ilorazy różnicowe
- Interpolacja Hermite'a
- Interpolacja funkcjami sklejanymi

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*

Normy wektorów i macierzy

Normy wektorów

W przestrzeni wektorowej V norma jest funkcją $\| \ \|$ określoną na V, o wartościach rzeczywistych nieujemnych, która ma trzy własności:

$$
\begin{array}{ll}
\|x\| > 0 & \text{dla } x \neq 0,\ x \in V, \\
\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| & \text{dla } \lambda \in R,\ x \in V, \\
\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| & \text{dla } x, y \in V.
\end{array}
$$

Normy wektorów i macierzy

Normy wektorów

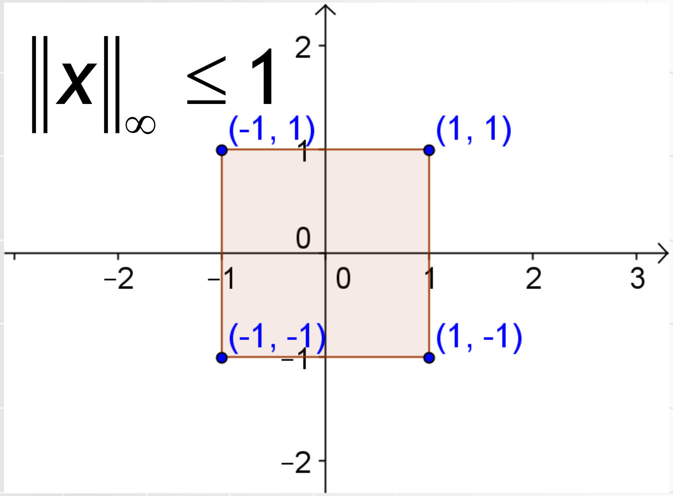
- norma euklidesowa (norma l_2) $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$
- norma l_∞ $$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|,$$
- norma l_1 $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Normy wektorów i macierzy

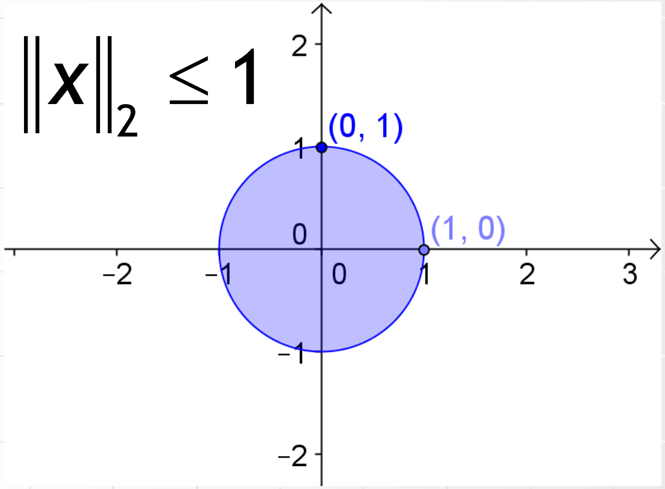
Normy wektorów

$$\left\{ x : x \in R^2, \|x\| \leq 1 \right\}$$

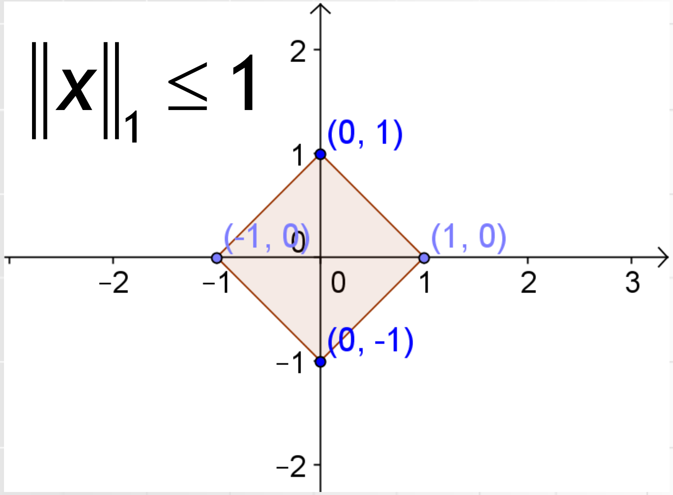
$\|x\|_\infty \leq 1$



$\|x\|_2 \leq 1$



$\|x\|_1 \leq 1$



Normy wektorów i macierzy

Normy macierzy

- Dla ustalonej normy $\| \; \|$ wektora indukowana przez nią norma macierzy kwadratowej A stopnia n jest określona wzorem:

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \left\{ \|Au\| : u \in R^n \right\}$$

Metody iteracyjne

Przykład

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 &= 6x_2 + 3 \\ 9x_2 &= 8x_1 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{6}{7} x_2^{(k-1)} + \frac{3}{7} \\ x_2^{(k)} &= \frac{8}{9} x_1^{(k-1)} - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

metoda Jacobiego

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{6}{7} x_2^{(k-1)} + \frac{3}{7} \\ x_2^{(k)} &= \frac{8}{9} x_1^{(k)} - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

metoda Gaussa-Seidela

Metody iteracyjne
Przykład

metoda Jacobiego

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0,00000	0,00000
10	0,14865	-0,19820
20	0,18682	-0,24909
30	0,19662	-0,26215
40	0,19913	-0,26551
50	0,19978	-0,26637

metoda Gaussa-Seidela

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0,00000	0,00000
10	0,21978	-0,24909
20	0,20130	-0,26551
30	0,20009	-0,26659
40	0,20001	-0,26666
50	0,20000	-0,26667

$$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = -\frac{4}{15}$$

Metody iteracyjne

Ogólna metoda iteracyjna

- Układ równań $Ax = b$ można wyrazić w równoważnej postaci

$$Qx = \left(Q - A\right)x + b$$

- Sugeruje to proces iteracyjny

$$Qx^{(k)} = \left(Q - A\right)x^{(k-1)} + b$$

- W procesie generowany jest ciąg $\left\{x^{(k)}\right\}$

Metody iteracyjne

Ogólna metoda iteracyjna

- Zakładając nieosobliwość Q

$$x^{(k)} = \left(I - Q^{-1}A\right)x^{(k-1)} + Q^{-1}b$$

- Rozwiązanie dokładne spełnia równanie

$$x = \left(I - Q^{-1}A\right)x + Q^{-1}b$$

- Po odjęciu stronami

$$x^{(k)} - x = \left(I - Q^{-1}A\right)\left(x^{(k-1)} - x\right)$$

Metody iteracyjne

Ogólna metoda iteracyjna

- Dla dowolnej normy wektorowej i indukowanej nią normy macierzowej

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \le \left\| I - Q^{-1}A \right\| \left\| x^{(k-1)} - x \right\|$$

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \le \left\| I - Q^{-1}A \right\|^{k} \left\| x^{(0)} - x \right\|$$

- Jeśli $\left\| I - Q^{-1}A \right\| < 1$ to $\lim_{k\to\infty} \left\| x^{(k)} - x \right\| = 0$.

Metody iteracyjne
Metoda Richardsona

- W metodzie Richardsona $Q = I$, co daje

$$x^{(k)} = (I - A)x^{(k-1)} + b$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + r^{(k-1)}$$

$$r^{(k-1)} = b - Ax^{(k-1)}$$

- Metoda jest zbieżna dla macierzy, dla których

$$\|I - A\| < 1$$

Metody iteracyjne

Metoda Jacobiego

- W metodzie Jacobiego Q jest macierzą przekątniową taką, że $q_{ii} = a_{ii}$.
- Metoda jest zbieżna dla macierzy dominujących przekątniowo

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Podsumowanie (1)

- Normy wektorów i macierzy
  - normy wektorowe l_1, l_2, l_∞
  - normy macierzy indukowane normami wektorowymi
- Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych
  - metoda Richardsona ($Q = I$)
  - metoda Jacobiego (Q - macierz zawierająca przekątną macierzy A)

Wielomian interpolujący

Zadanie. Znaleźć wielomian p możliwie najniższego stopnia taki, że dla danych $n + 1$ punktów (x_i, y_i) jest $p(x_i) = y_i$ $(0 \leq i \leq n)$.

Twierdzenie. Jeśli liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są parami różne to istnieje dokładnie jeden wielomian $p \in \Pi_n$ taki, że $p(x_i) = y_i$ $(0 \leq i \leq n)$.

Wielomian interpolujący

Dowód - jednoznaczność

Załóżmy, że istnieją dwa wielomiany klasy Π_n interpolujące wartości y_i w węzłach x_i: $p_n(x)$ oraz $q_n(x)$.

Rozważmy wielomian $p_n(x) - q_n(x)$, który także należy do klasy Π_n.

Wielomiany należące do Π_n mogą znikać w co najwyżej n punktach, o ile nie znikają tożsamościowo.

Wielomian $p_n(x) - q_n(x)$ znika w $n+1$ punktach x_i dla $(0 \le i \le n)$, zatem $p_n(x) \equiv q_n(x)$.

Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

Istnienie – dla $n = 0$ wielomian stały $p_0(x) = y_0$ spełnia jedyny warunek interpolacyjny $p_0(x_0) = y_0$.

Załóżmy, że dla pewnego k istnieje wielomian p_{k-1} klasy Π_{k-1} taki, że $p_{k-1}(x_i) = y_i$ dla $(0 \le i \le k-1)$.

Wielomian $p_k(x)$ możemy zapisać jako

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}).$$

Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

Wielomian $p_k(x)$ możemy zapisać jako

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}).$$

Stopień tego wielomianu nie przewyższa k.

Wielomian ten spełnia warunki interpolacyjne ($0 \leq i \leq k-1$). Pozostaje wyznaczyć c_k tak, żeby $p_k(x_k) = y_k$.

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}) = y_k.$$

Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

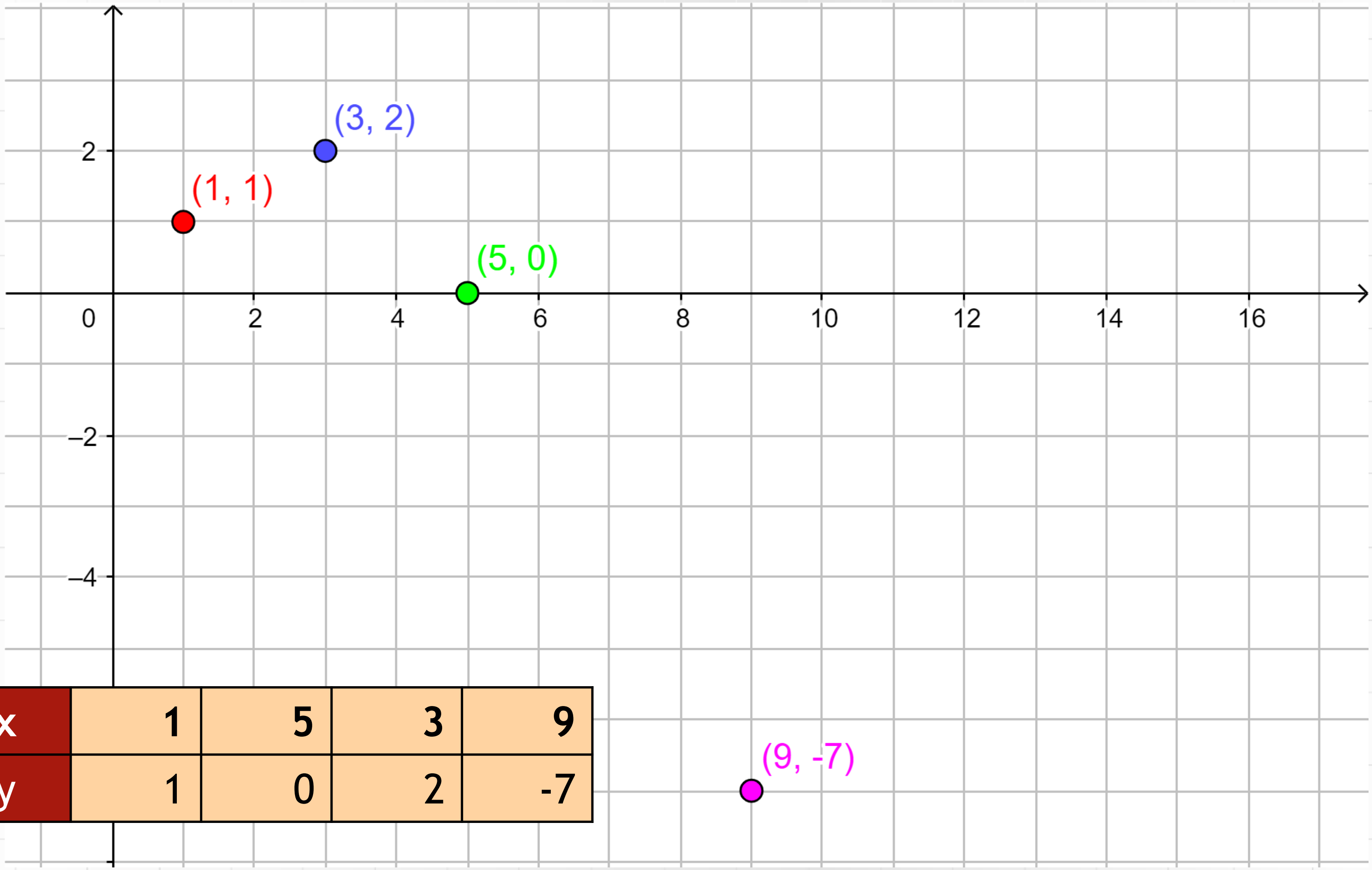
$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1}) = y_k.$$

$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})}$$

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k}\left(c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)\right)$$

Wzór interpolacyjny Newtona

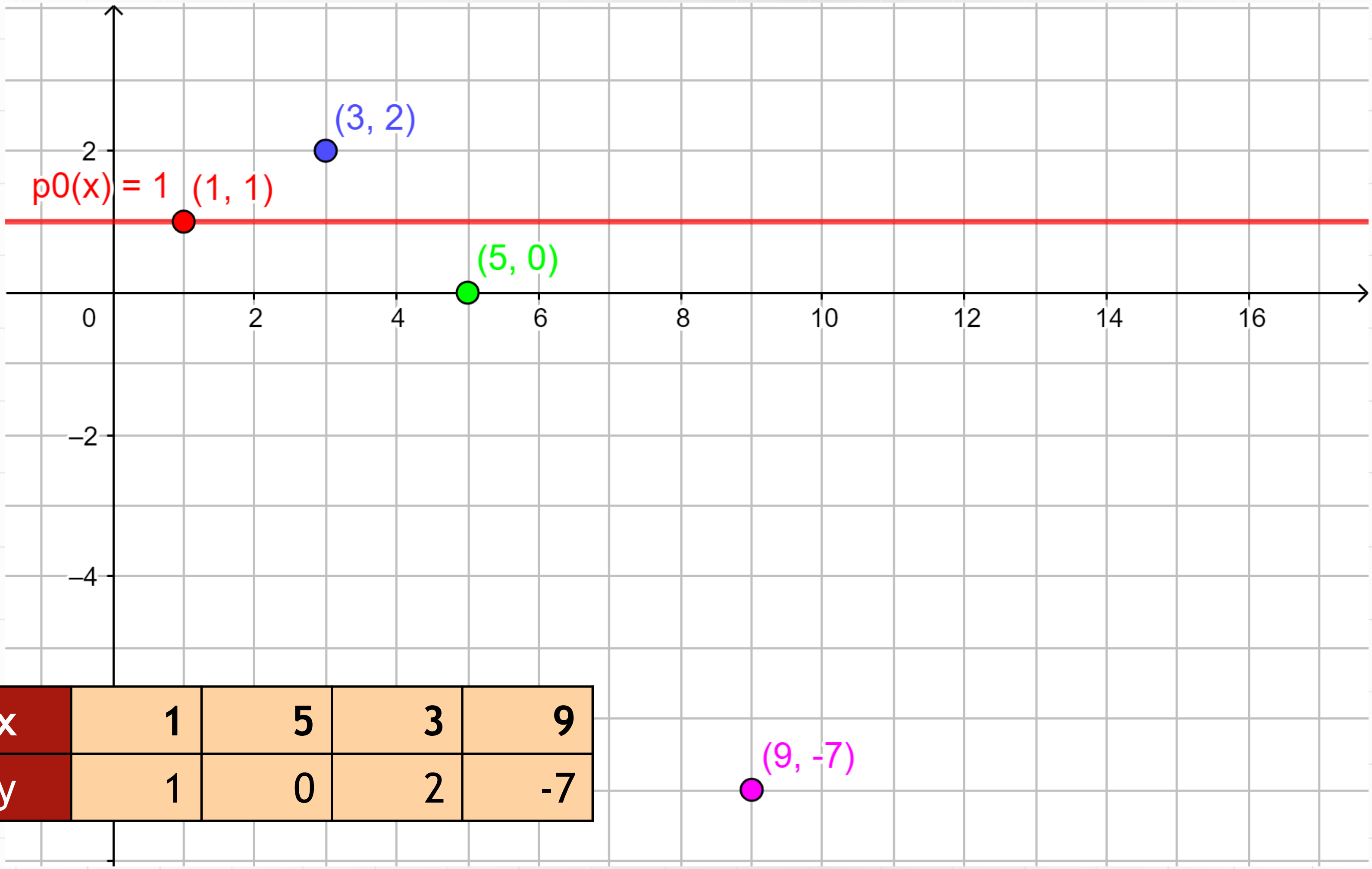
Przykład



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Newtona

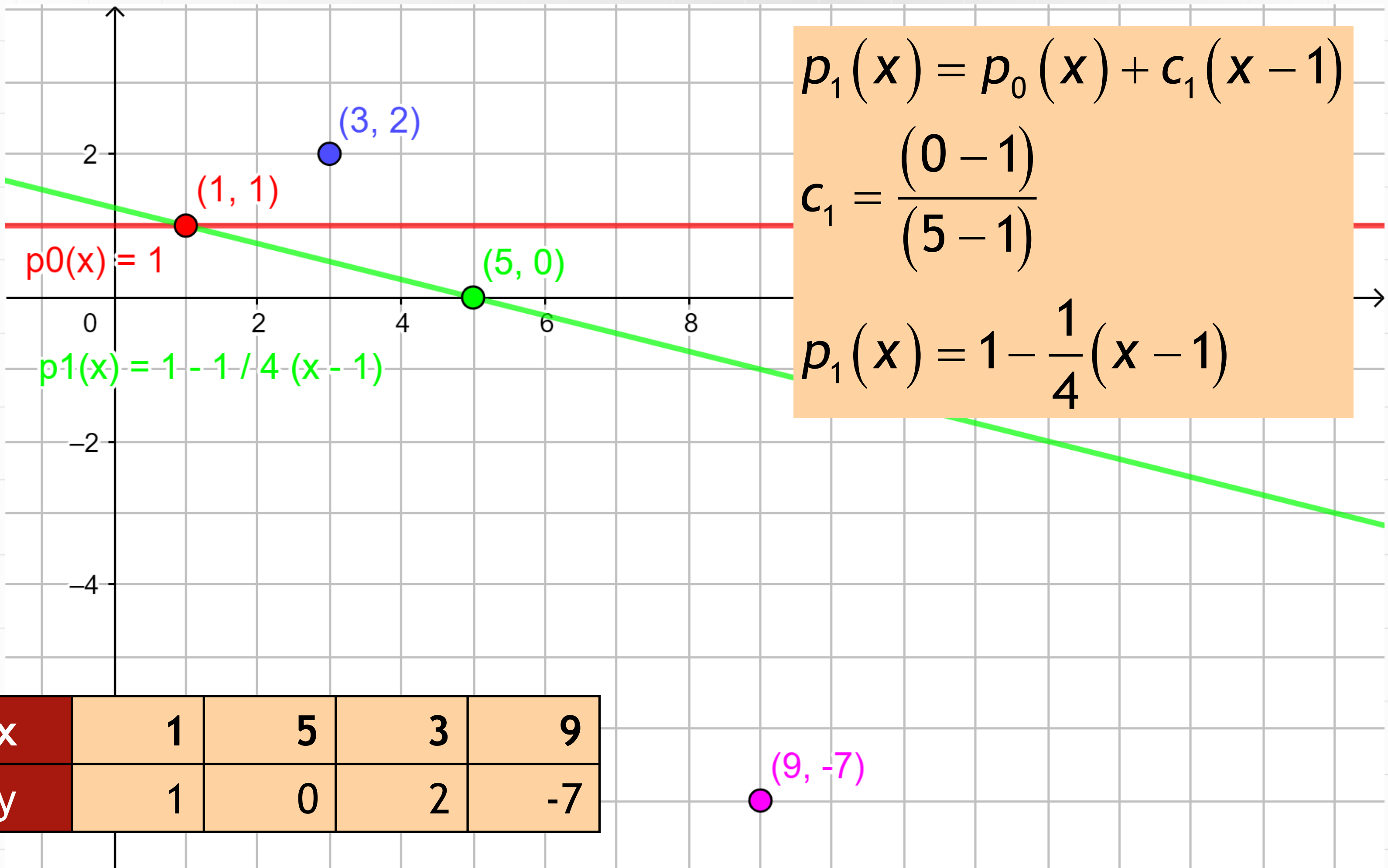
Przykład



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



$$p_1(x) = p_0(x) + c_1(x-1)$$

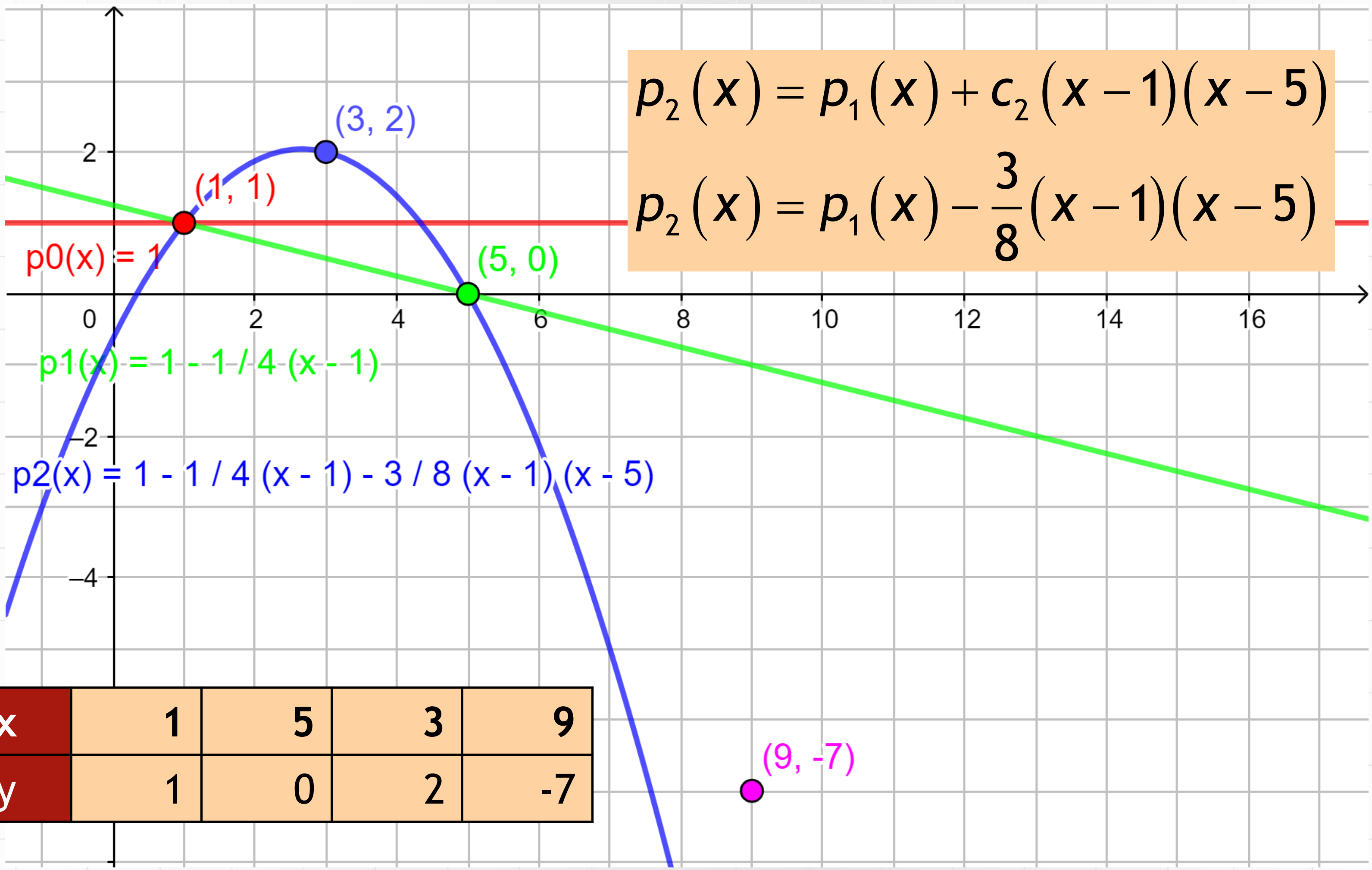
$$c_1 = \frac{(0-1)}{(5-1)}$$

$$p_1(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-1)$$

x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



$$p_2(x) = p_1(x) + c_2(x-1)(x-5)$$

$$p_2(x) = p_1(x) - \frac{3}{8}(x-1)(x-5)$$

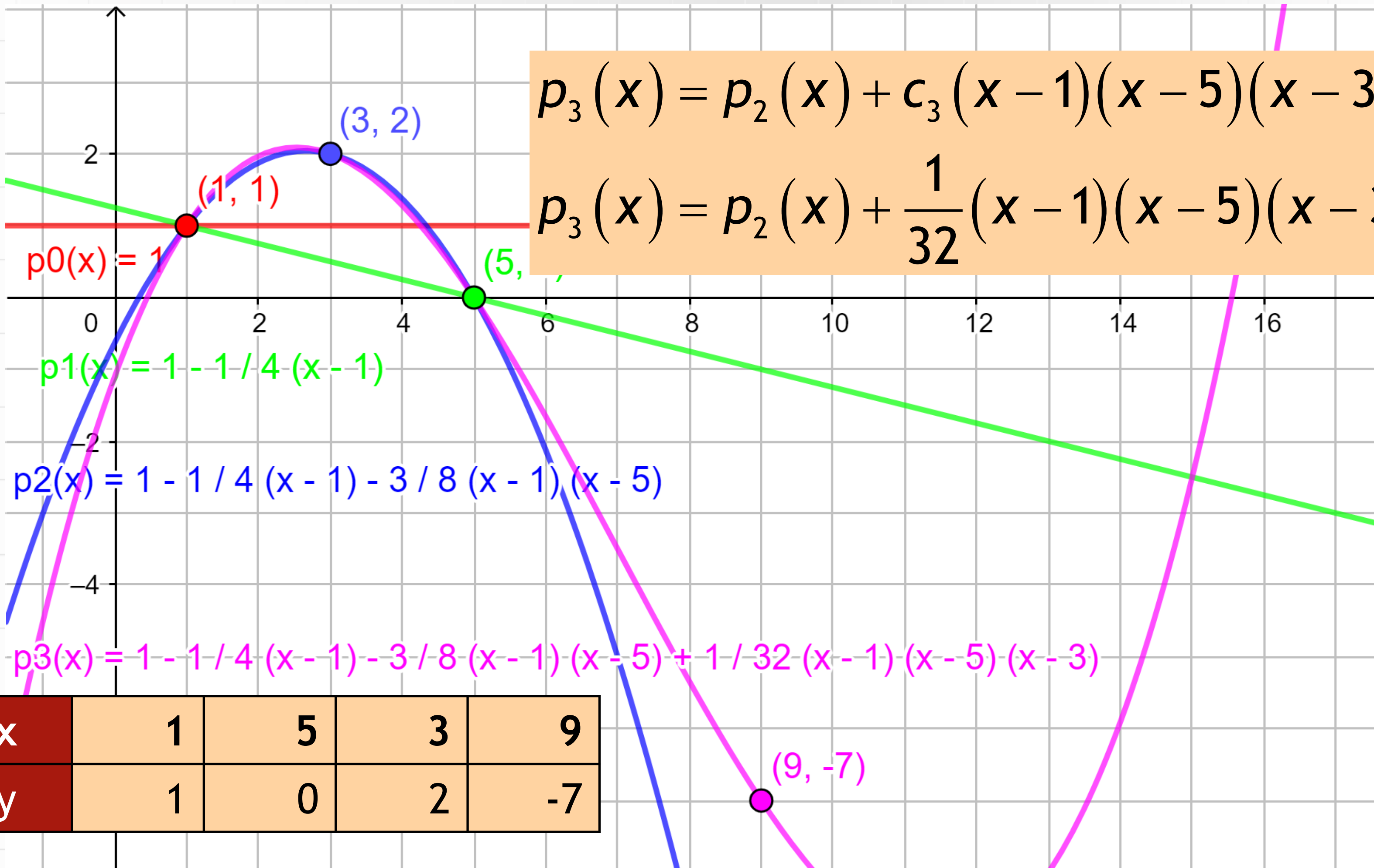
x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład

$$p_3(x) = p_2(x) + c_3(x-1)(x-5)(x-3)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{1}{32}(x-1)(x-5)(x-3)$$

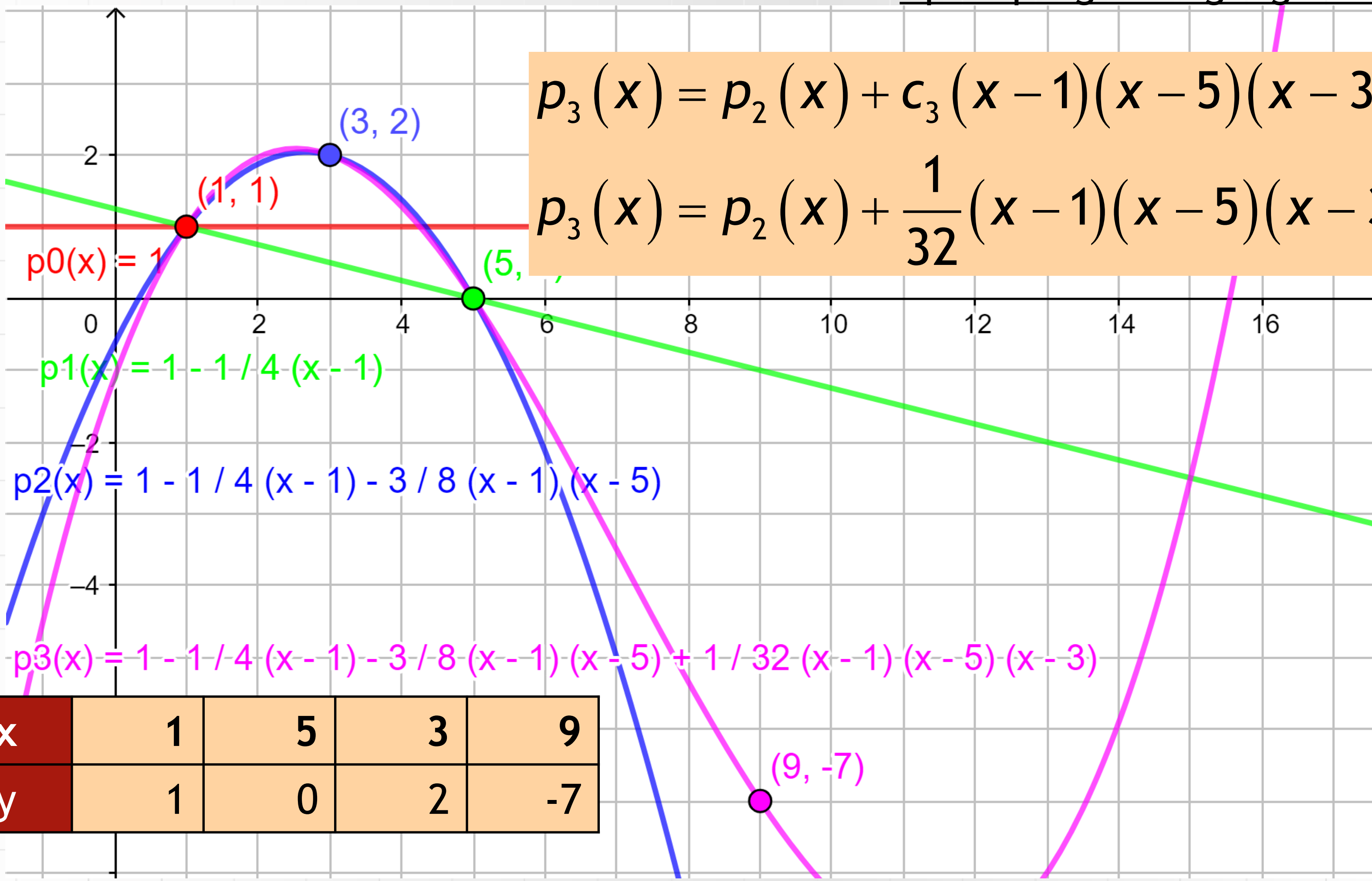


x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład

Aplet programu geogebra

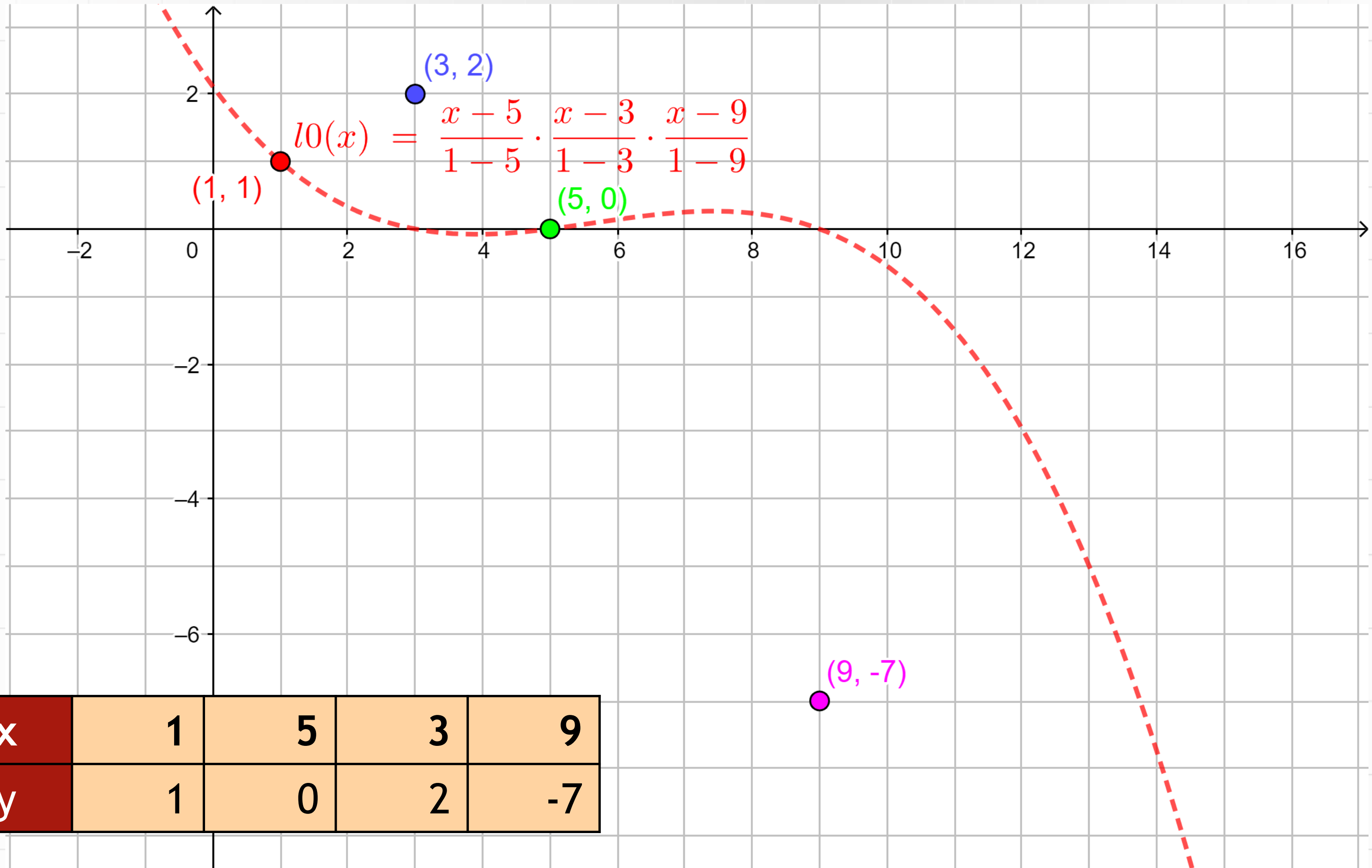


$$p_3(x) = p_2(x) + c_3(x-1)(x-5)(x-3)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{1}{32}(x-1)(x-5)(x-3)$$

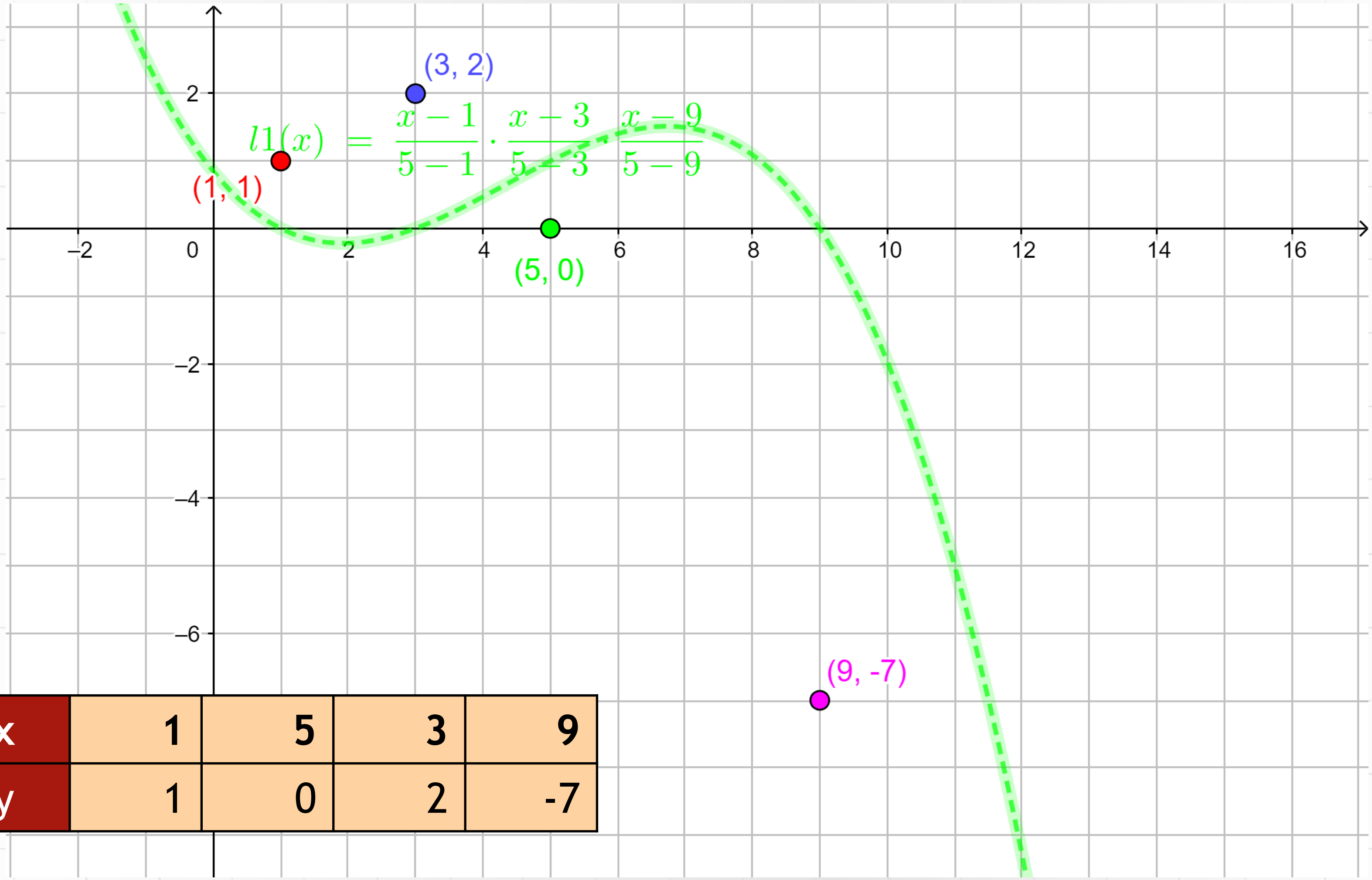
x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Lagrange’a



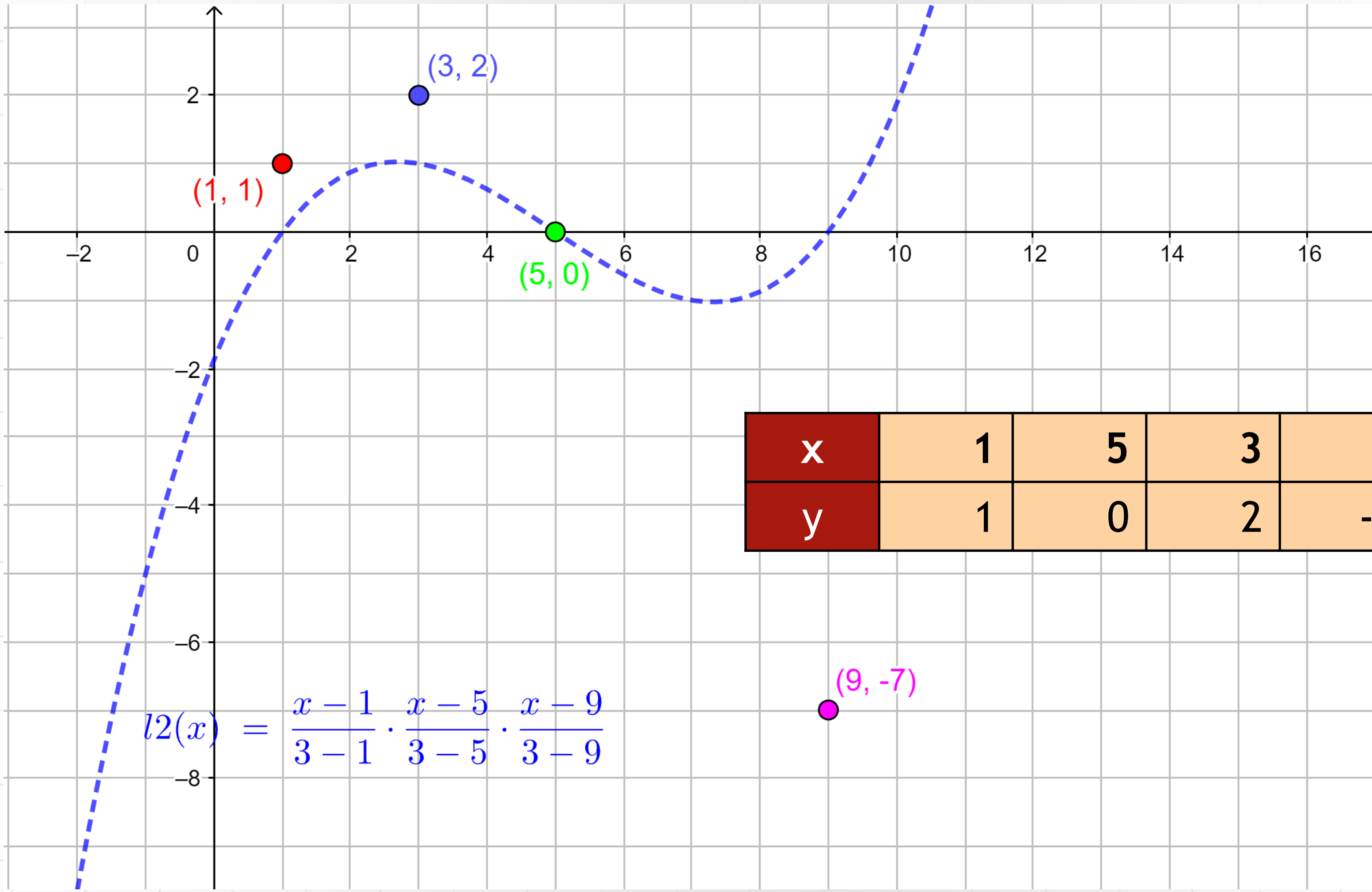
x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Lagrange'a



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

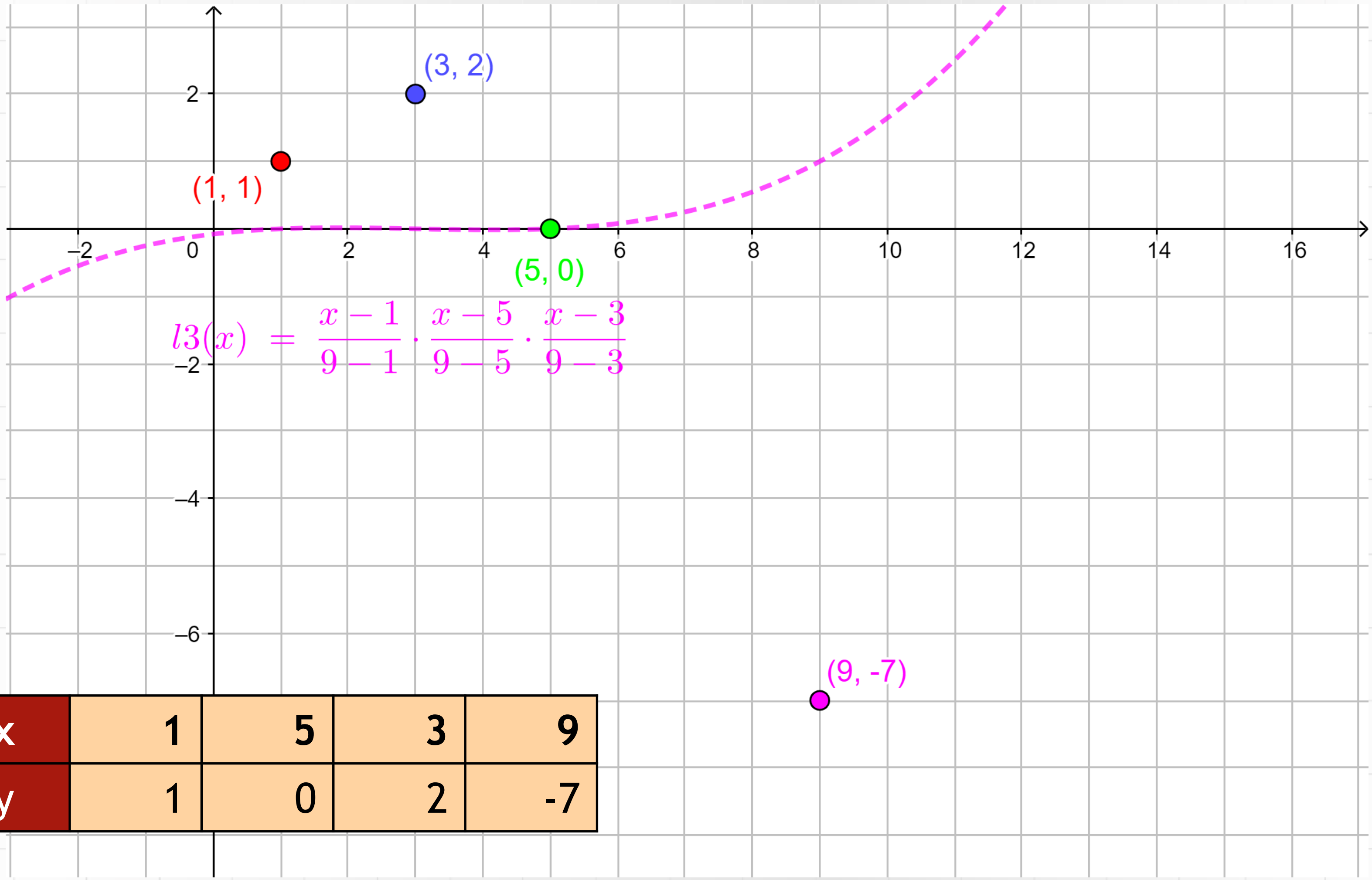
Wzór interpolacyjny Lagrange’a



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

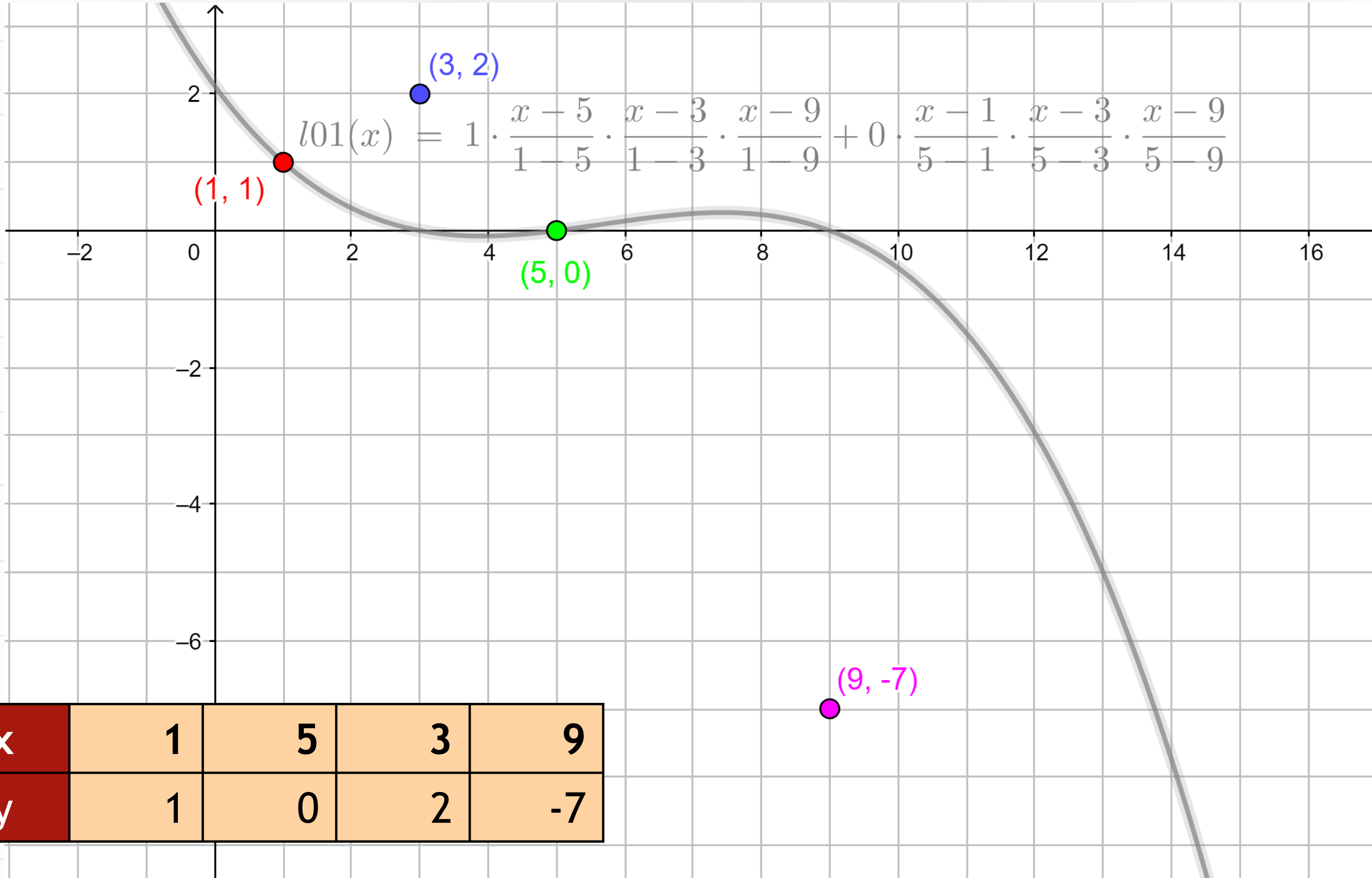
$$l2(x) = \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-5}{3-5} \cdot \frac{x-9}{3-9}$$

Wzór interpolacyjny Lagrange’a



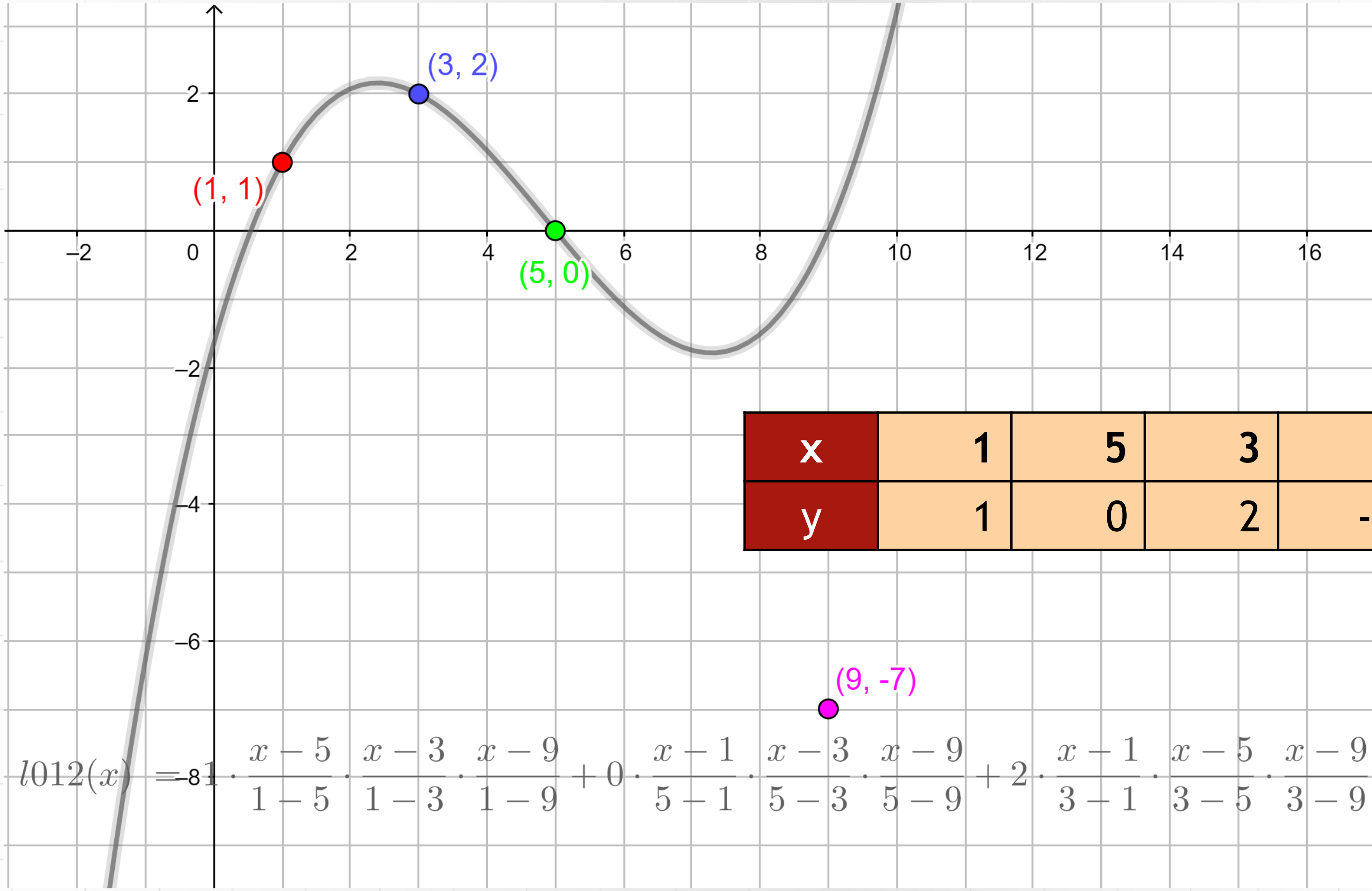
x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Lagrange'a



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

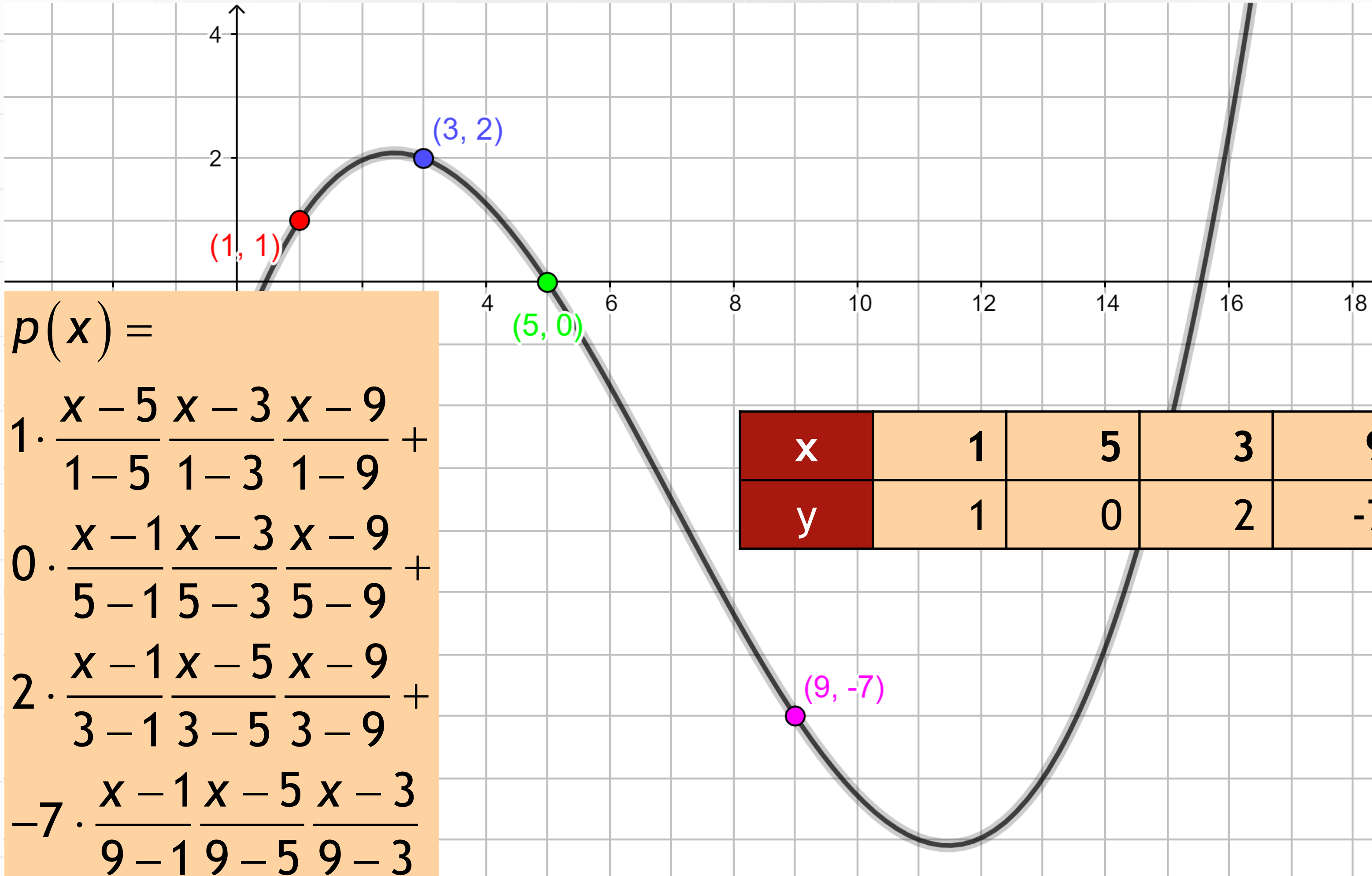
Wzór interpolacyjny Lagrange’a



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

$$l012(x) = 1 \cdot \frac{x-5}{1-5} \cdot \frac{x-3}{1-3} \cdot \frac{x-9}{1-9} + 0 \cdot \frac{x-1}{5-1} \cdot \frac{x-3}{5-3} \cdot \frac{x-9}{5-9} + 2 \cdot \frac{x-1}{3-1} \cdot \frac{x-5}{3-5} \cdot \frac{x-9}{3-9}$$

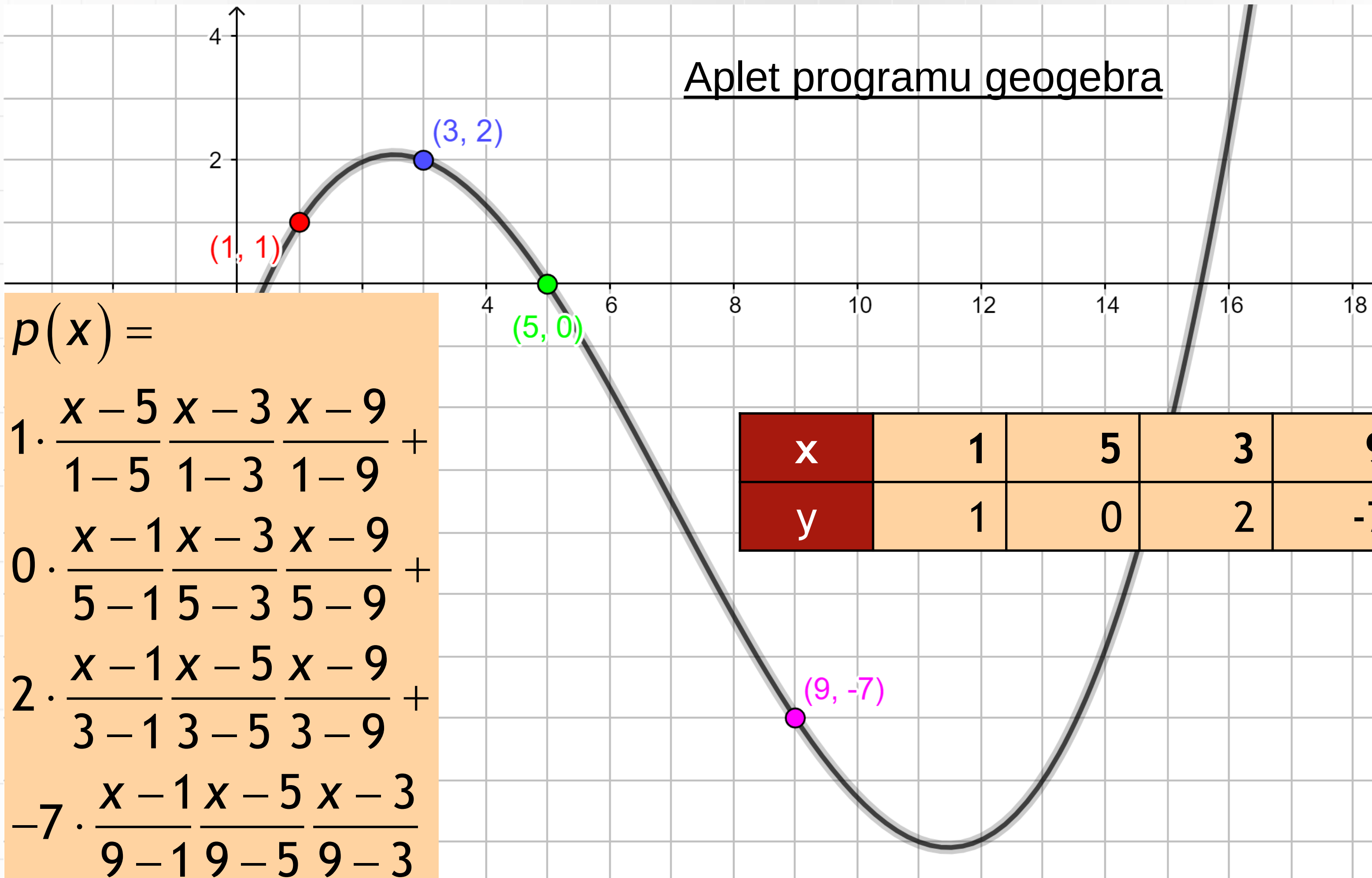
Wzór interpolacyjny Lagrange’a



$$p(x) =$$
$$1 \cdot \frac{x-5}{1-5}\frac{x-3}{1-3}\frac{x-9}{1-9} +$$
$$0 \cdot \frac{x-1}{5-1}\frac{x-3}{5-3}\frac{x-9}{5-9} +$$
$$2 \cdot \frac{x-1}{3-1}\frac{x-5}{3-5}\frac{x-9}{3-9} +$$
$$-7 \cdot \frac{x-1}{9-1}\frac{x-5}{9-5}\frac{x-3}{9-3}$$

x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Lagrange’a



$$p(x) =$$
$$1 \cdot \frac{x-5}{1-5}\frac{x-3}{1-3}\frac{x-9}{1-9} +$$
$$0 \cdot \frac{x-1}{5-1}\frac{x-3}{5-3}\frac{x-9}{5-9} +$$
$$2 \cdot \frac{x-1}{3-1}\frac{x-5}{3-5}\frac{x-9}{3-9} +$$
$$-7 \cdot \frac{x-1}{9-1}\frac{x-5}{9-5}\frac{x-3}{9-3}$$

x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$l_i(x) = c(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)$$

$$l_i(x) = 1$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \qquad (0 \le i \le n)$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x)$$

Politechnika Wrocławska

Iloraz różnicowy

Wielomian $p(x)$ klasy Π_n spełniający dla danej funkcji f warunki interpolacyjne

$$p\left(x_i\right) = f\left(x_i\right)$$

można wyrazić za pomocą wzoru Newtona:

$$p\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} c_k \prod_{j=0}^{k-1}\left(x - x_j\right).$$

Współczynniki c_k zależą tylko od węzłów x_0, x_1, ..., x_k i wartości funkcji w tych węzłach.

$$c_k = f\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right]$$

Jest to iloraz różnicowy rzędu k.

Iloraz różnicowy

- iloraz różnicowy rzędu zerowego

$$f\left[x_0\right] = f\left(x_0\right)$$

- iloraz różnicowy rzędu pierwszego

$$f\left[x_0, x_1\right] = \frac{f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}$$

Iloraz różnicowy

- ilorazy różnicowe spełniają zależność

$$f\left[x_0, x_1, \ldots, x_k\right] = \frac{f\left[x_1, x_2, \ldots, x_k\right] - f\left[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}\right]}{x_k - x_0}$$

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0,x_1]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2,x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			

Wzór interpolacyjny Newtona

Iloraz różnicowy

1	1	-1/4	-3/8	1/32
5	0	-1	-1/8	
3	2	-3/2		
9	-7			

$$p_3(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)(x-5) + \frac{1}{32}(x-1)(x-5)(x-3)$$

Interpolacja wielomianowa

Ważne zagadnienia

- Dokładność interpolacji
- Wybór węzłów interpolacji
- Zbieżność wielomianów interpolacyjnych

Interpolacja Hermite’a

Uogólnienie interpolacji Newtona

Interpolacja Hermite’a, czyli interpolacja z węzłami wielokrotnymi. Szukamy wielomianu, który w węzłach ma dane nie tylko wartości, ale i pochodne.

Interpolacja Hermite'a

Przykład

Szukamy wielomianu *p* klasy Π_2 takiego, że

- $p(x_0) = c_{00}$, $p'(x_0) = c_{01}$, $p(x_1) = c_{10}$.
- Tablica ilorazów różnicowych ma wtedy postać:

x_0	c_{00}	c_{01}	c_{02}
x_0	c_{00}	c_{11}	
x_1	c_{10}		

$$\lim_{x \to x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2$$

Interpolacja Hermite'a

Przykład 2

$$p(1) = 2,\ p'(1) = 3,\ p(2) = 6,\ p'(2) = 7,\ p''(2) = 8$$

$$f\left[x_0, x_0, \ldots, x_0\right] = \frac{1}{k!} f^{(k)}\left(x_0\right)$$

1	2	3	1	2	-1
1	2	4	3	1	
2	6	7	4		
2	6	7			
2	6				

$$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2) - 1(x-1)^2(x-2)^2$$

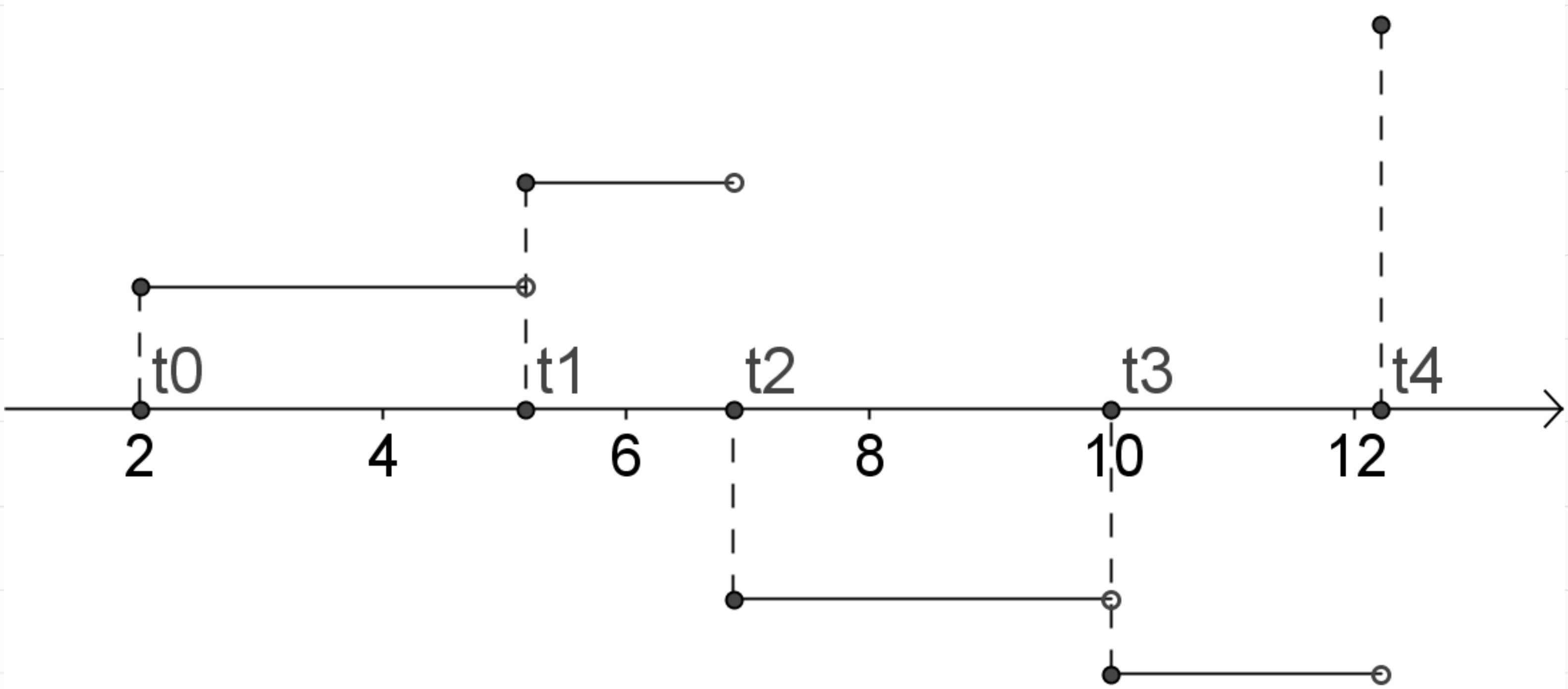
Interpolujące funkcje sklejane

Zadanie. Mamy n+1 węzłów t_0, t_1, …, t_n takich, że $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ i znamy wartości w tych węzłach. Szukamy funkcji S, która:

- W każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1})$ $(0 \leq i \leq n-1)$ jest wielomianem klasy Π_k.
- Ma ciągłą $(k-1)$-szą pochodną w przedziale $[t_0, t_n]$.
- Funkcję S nazywamy funkcją sklejaną stopnia k.

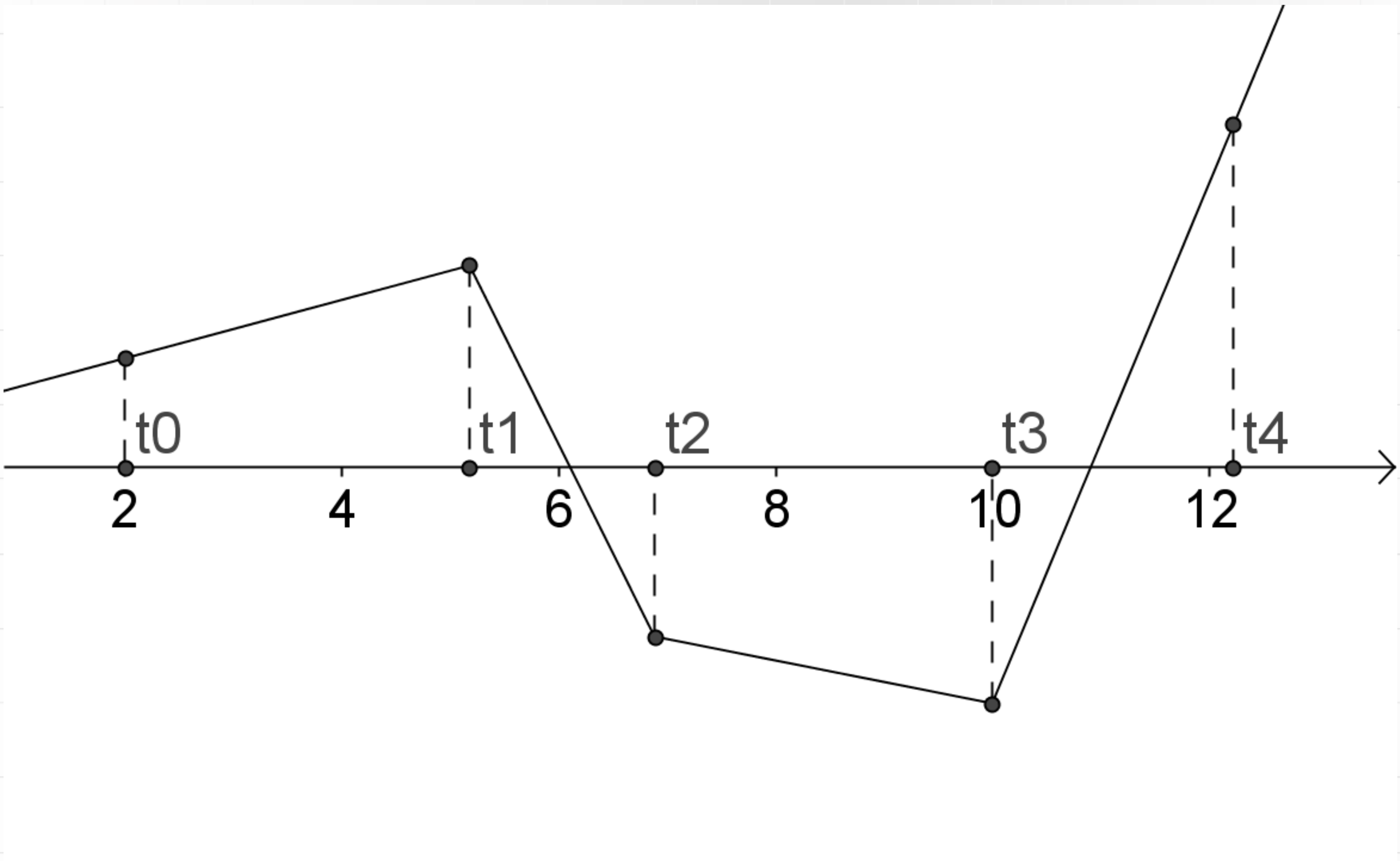
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 0



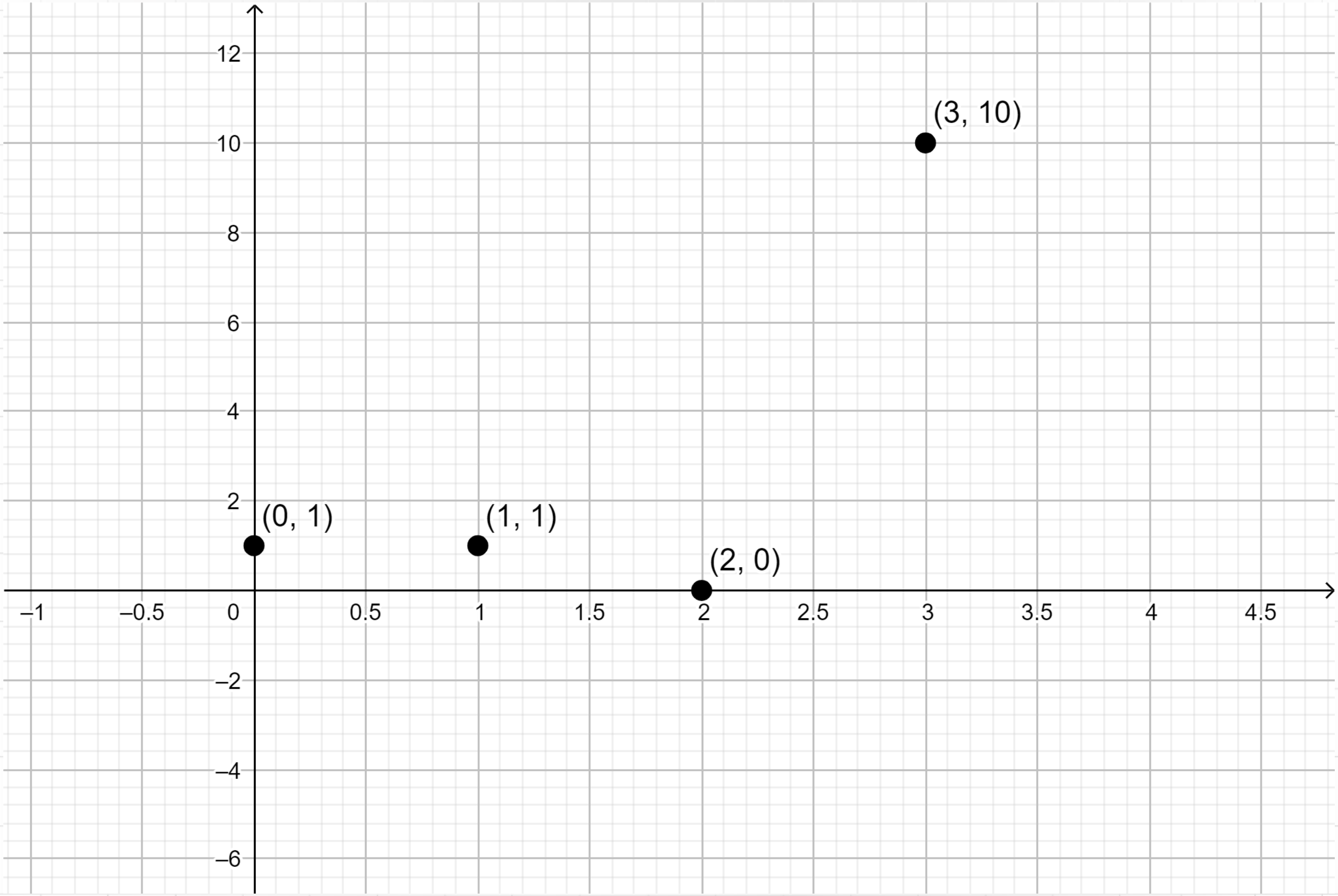
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 1



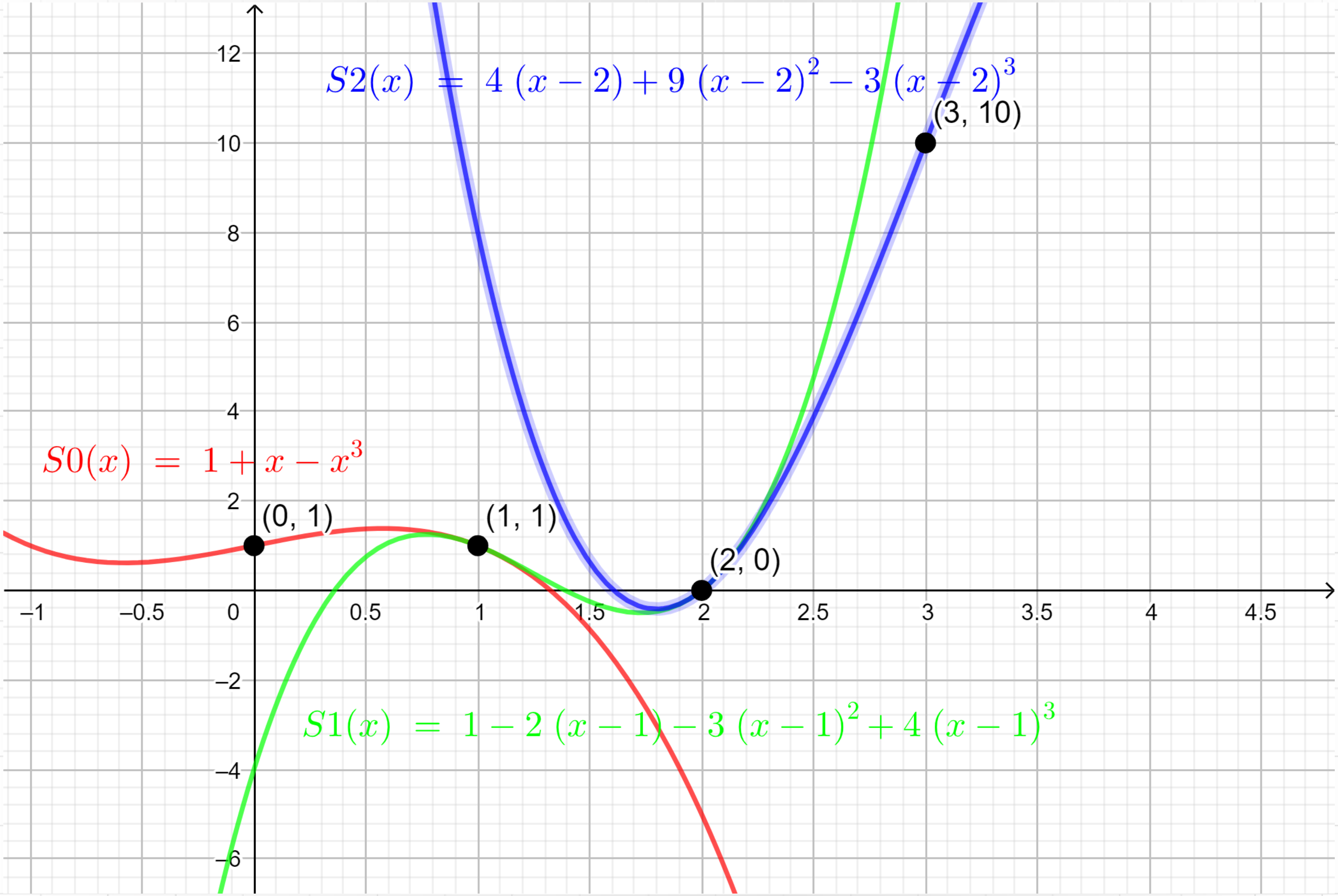
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3



Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3



Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

Szukamy takiej funkcji S, która:

- w danych węzłach t_i (dla $i = 0, 1, \ldots, n$)
- ma dane wartości y_i,
- w każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1})$ jest

wielomianem S_i (dla $i = 0, 1, \ldots, n - 1$) klasy Π_3.

Wszystkie wielomiany mają łącznie $4n$ współczynników

$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

Wszystkie wielomiany mają łącznie $4n$ współczynników.

Warunki na współczynniki wynikają z:

- n warunków $S_i(t_i) = y_i$ ($i = 0, \ldots, n-1$)
- n warunków $S_i(t_i+1) = y_{i+1}$ ($i = 0, \ldots, n-1$)
- ciągłość pochodnej S' daje jeden warunek $S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$ ($i = 1, \ldots, n-1$) w każdym węźle wewnętrznym (łącznie $n-1$)
- ciągłość drugiej pochodnej S'' daje $n-1$ warunków.

W sumie mamy $4n-2$ równań.

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

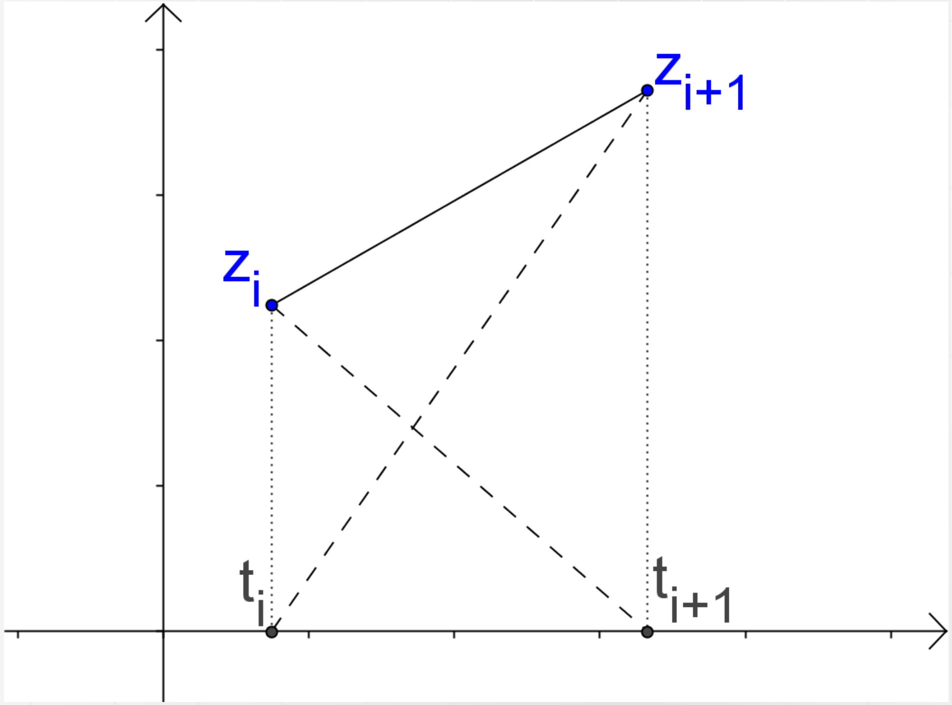
- $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
- $S'_i(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$
- $S''_i(x) = 6a_i x + 2b_i$
- $S'''_i(x) = 6a_i$

- funkcja $S_i''(x)$ jest liniowa
- wykorzystując pomocnicze wielkości $z_i = S''_i(t_i)$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S''_i(x) = \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - t_i) + \frac{z_i}{h_i}(t_{i+1} - x)$$



$$h_i = t_{i+1} - t_i$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + C(x - t_i) + D(t_{i+1} - x)$$

Stałe całkowania *C* i *D* można wyznaczyć z warunków

$$S_i(t_i) = y_i \qquad S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 +$$
$$+ \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right)(x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)(t_{i+1} - x)$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

Aby wyznaczyć wielkości z_i korzystamy z warunków

$S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$ ($i = 1, \ldots, n-1$)

$$S_i'(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 + \frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \\ + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S_i'(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 - \frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6}\right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6}\right)$$

$$S_i'(t_i) = -\frac{h_i}{3} z_i - \frac{h_i}{6} z_{i+1} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

$$S_i'(t_{i+1}) = \frac{h_i}{3} z_{i+1} + \frac{h_i}{6} z_i - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

$$S_{i-1}'(t_i) = \frac{h_{i-1}}{3} z_i + \frac{h_{i-1}}{6} z_{i-1} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}}$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$h_{i-1}z_{i-1}+2\left(h_{i-1}+h_i\right)z_i+h_iz_{i+1}=\frac{6}{h_i}\left(y_{i+1}-y_i\right)-\frac{6}{h_{i-1}}\left(y_i-y_{i-1}\right)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$1\le i\le n-1$$

$$z_0=0,\quad z_n=0$$

$$u_i=2\left(h_{i-1}+h_i\right),\quad b_i=\frac{6}{h_i}\left(y_{i+1}-y_i\right),\quad v_i=b_i-b_{i-1}$$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i)\Big(C_i + (x - t_i)\big(B_i + (x - t_i)A_i\big)\Big)$$

$$A_i = \frac{1}{6h_i}(z_{i+1} - z_i)$$

$$B_i = \frac{z_i}{2}$$

$$C_i = -\frac{h_i}{6}(z_{i+1} + 2z_i) + \frac{1}{h_i}(y_{i+1} - y_i)$$

Podsumowanie (2.1)

- Wielomian interpolujący
  - jednoznaczność
  - istnienie
- Wzór interpolacyjny Newtona
  - przykład konstrukcji
- Wzór interpolacyjny Lagrange'a
  - przykład konstrukcji
  - wzór ogólny

Podsumowanie (2.2)

- Ilorazy różnicowe
  - wzór ogólny interpolacji Newtona
- Interpolacja Hermite'a
  - uogólnienie interpolacji Newtona
- Interpolacja funkcjami sklejanymi
  - wyznaczanie współczynników wielomianów