

Metody numeryczne w fizyce

FZP002934wcl

rok akademicki 2021/22

semestr letni

Wykład 2

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220



Plan wykładu (1)

- Metody wyznaczania miejsc zerowych
 - Metoda bisekcji
 - Metoda Newtona i metoda siecznych
- Zbieżność
- Notacja O i o

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*



Plan wykładu (2)

- Układy równań liniowych
- Układy równań do łatwe rozwiązania
- Wyznaczanie rozkładów LU
- Eliminacja Gaussa

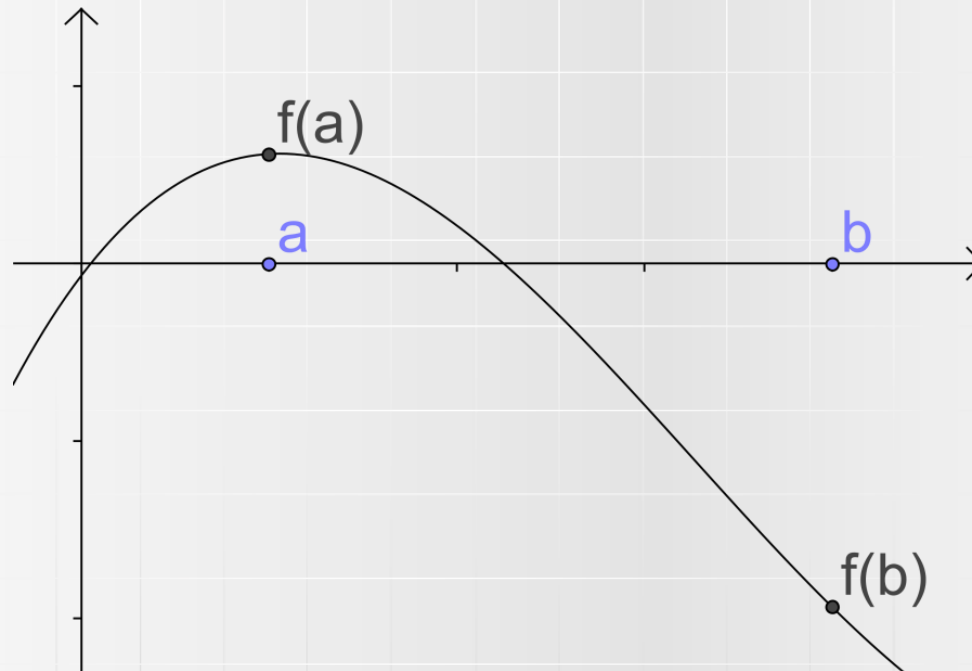
Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*



Metoda bisekcji

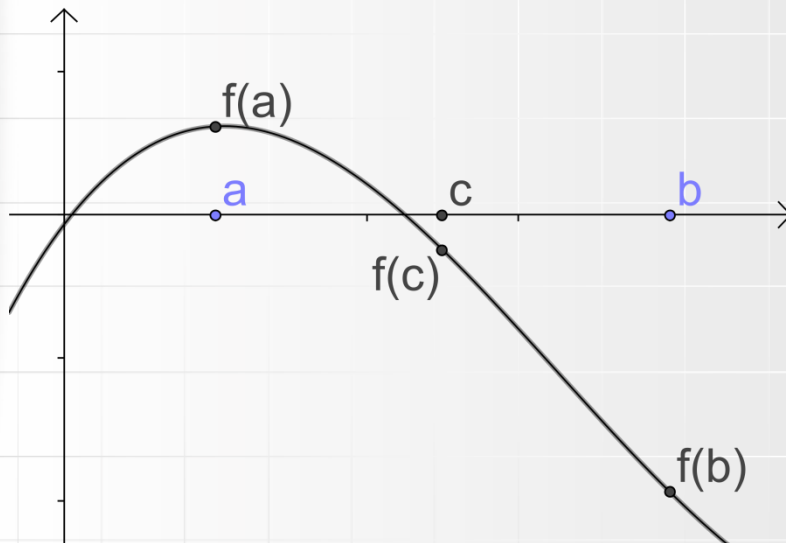
Jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i jeśli $f(a)f(b) < 0$, to funkcja ta musi mieć zero w (a, b) .



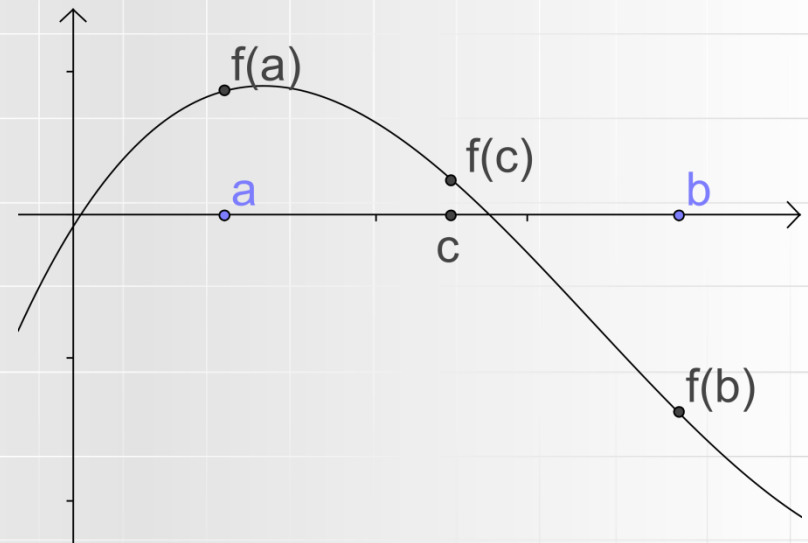


Metoda bisekcji

Wyznaczamy punkt $c = \frac{1}{2}(a+b)$ oraz wartość funkcji $f(c)$

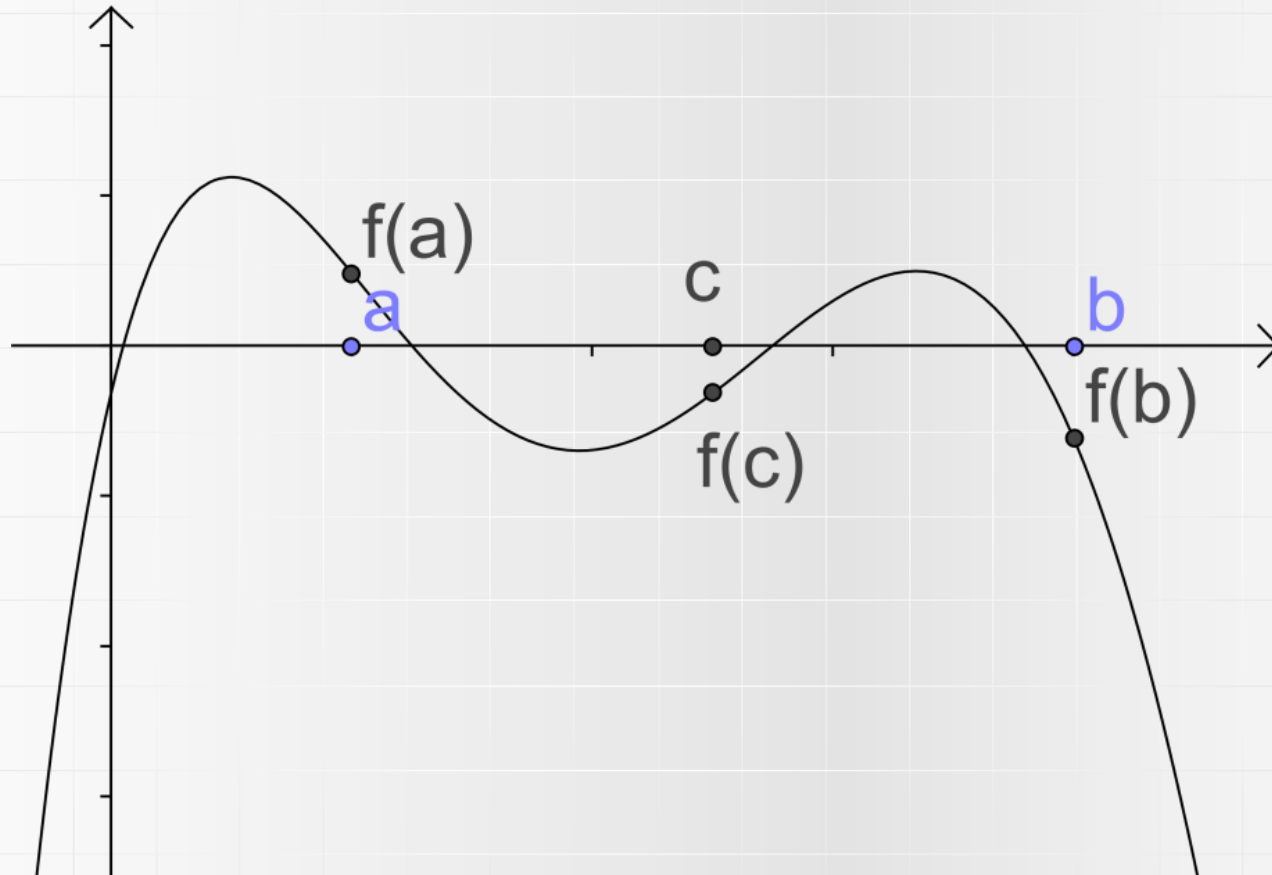


jeśli $f(a)f(c) < 0$ to
 $b = c$



jeśli $f(b)f(c) < 0$ to
 $a = c$

Metoda bisekcji



jeśli $f(a)f(c) < 0$ to $b = c$



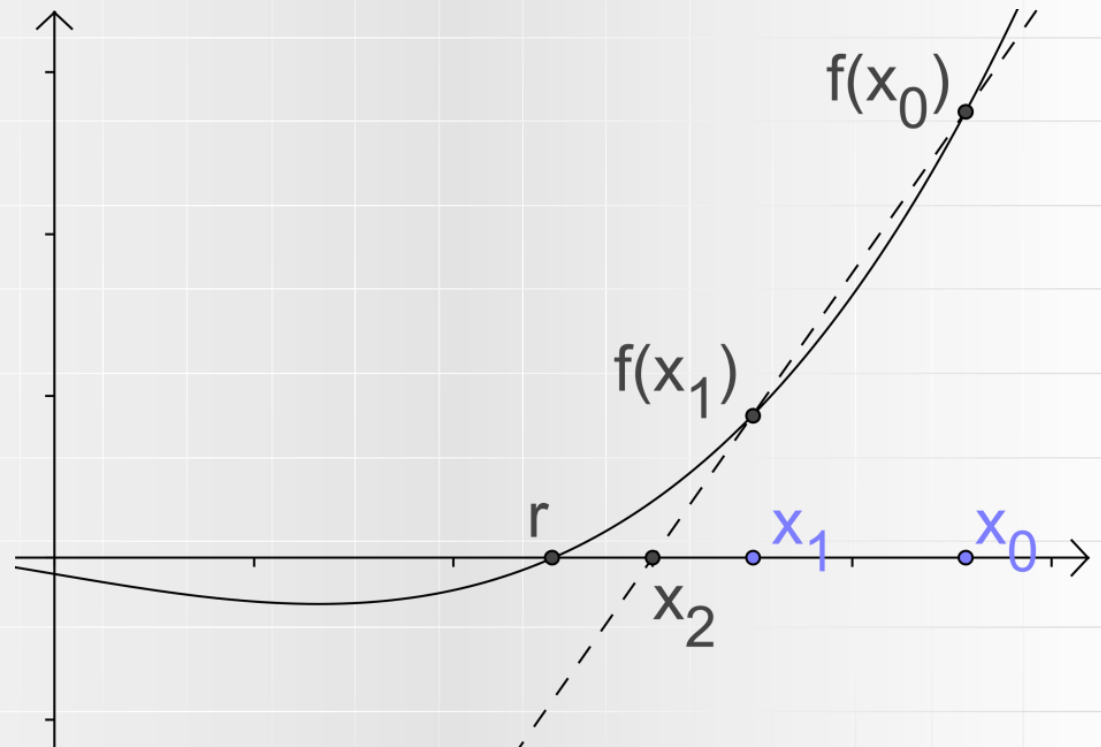
Metoda bisekcji

Kryteria zakończenia:

- przekroczenie maksymalnej liczby kroków,
- zadowalająco mały błąd,
- zadowalająco mała wartość funkcji.



Metoda siecznych

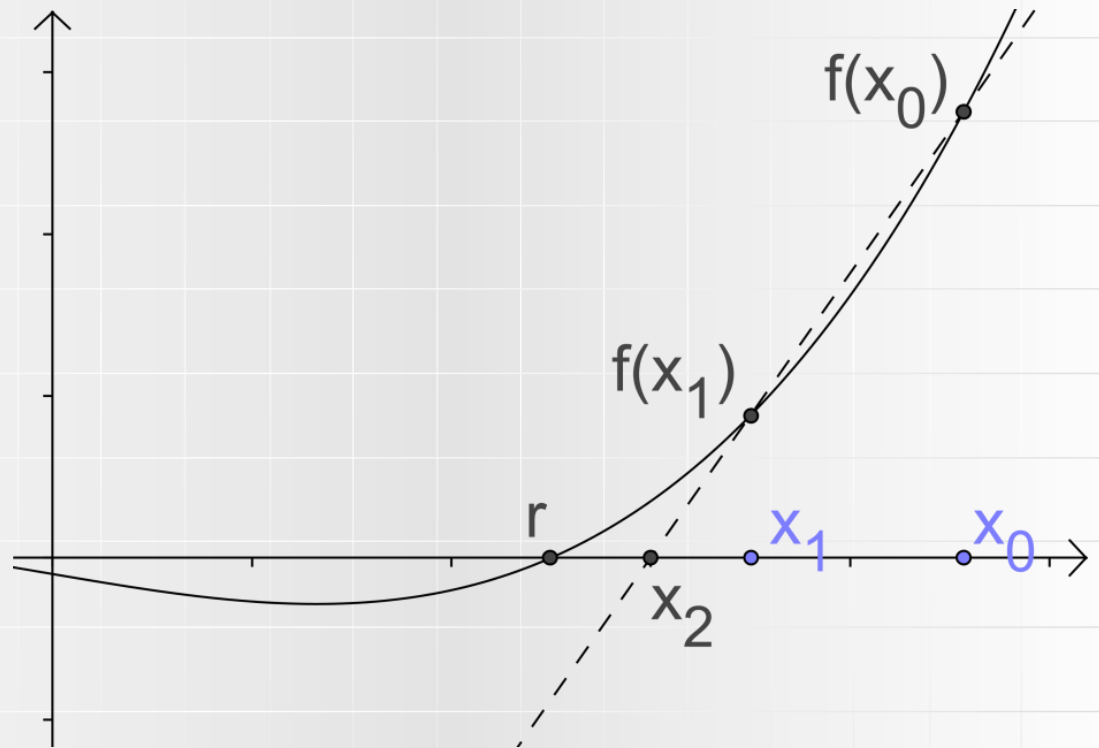


$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



Metoda Newtona

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$



Zbieżność

W wielu przypadkach program komputerowy generuje ciąg przybliżeń rozwiązania. Zbieżność określa jak szybko uzyskamy dostatecznie dobre przybliżenie.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e \approx 2,718281828$$

$$x_1 = 2,00000\ 0$$

$$x_2 = 2,25000\ 0$$

$$x_5 = 2,48832\ 0$$

$$x_{10} = 2,59374\ 2$$

$$x_{100} = 2,70481\ 4$$

$$x_{1000} = 2,71692\ 4$$



Zbieżność

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_n + 1}{x_{n-1} + x_n}, x_0 = 0, x_1 = 2$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 0,5$$

$$x_3 = 0,8$$

$$x_4 = 1,076923077$$

$$x_5 = 0,991803278$$

$$x_6 = 0,999695214873514$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}, x_1 = 2$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 1,5$$

$$x_3 = 1,416667$$

$$x_4 = 1,414216$$

$$\sqrt{2} = 1,414213$$



Rząd zbieżności

Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do x^* .

Zbieżność jest co najmniej *liniowa*, jeśli istnieją stała $c < 1$ i liczba całkowita N takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq c|x_n - x^*| \quad (n \geq N)$$

Zbieżność jest co najmniej *nadliniowa*, jeśli istnieje ciąg zbieżny do 0 $\{\varepsilon_n\}$ i liczba całkowita N takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq \varepsilon_n|x_n - x^*| \quad (n \geq N)$$



Rząd zbieżności

Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem zbieżnym do x^* .

Zbieżność jest co najmniej *kwadratowa*, jeśli istnieją stała dodatnia C i liczba całkowita N takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^2 \quad (n \geq N)$$

Zbieżność jest co najmniej *rzędu α* , jeśli istnieją stała dodatnia C , stała $\alpha > 1$ i liczba całkowita N takie, że

$$|x_{n+1} - x^*| \leq C|x_n - x^*|^\alpha \quad (n \geq N)$$



Notacja O i o

Niech $\{x_n\}$ i $\{\alpha_n\}$ będą dwoma różnymi ciągami.

$$x_n = O(\alpha_n)$$

jeśli istnieją takie stałe C i n_0 , że $|x_n| \leq C|\alpha_n|$ dla każdego $n \geq n_0$.

$$x_n = o(\alpha_n)$$

jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{\alpha_n} \right) = 0$. Istnieje ciąg liczb nieujemnych zbieżny do 0 taki, że $|x_n| \leq \varepsilon_n |\alpha_n|$.



Notacja O i o

Jeśli $x_n \rightarrow 0$, $\alpha_n \rightarrow 0$ oraz $x_n = O(\alpha_n)$ to ciąg $\{x_n\}$ dąży do 0 *co najmniej tak szybko* jak $\{\alpha_n\}$.

Jeśli $x_n \rightarrow 0$, $\alpha_n \rightarrow 0$ oraz $x_n = o(\alpha_n)$ to ciąg $\{x_n\}$ dąży do 0 *szybciej niż* $\{\alpha_n\}$.

$$\frac{n+1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{5}{n} + e^{-n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n \ln n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{\ln n}\right)$$

$$e^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$



Notacja O i o

Notacji tej używa się nie tylko dla ciągów.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5) \quad (x \rightarrow 0)$$

Istnieje otoczenie punktu 0 i stała C takie, że w tym otoczeniu

$$\left| \sin x - x + \frac{x^3}{6} \right| \leq C|x^5|.$$

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow \infty).$$

Istnieją takie stałe r i C , że $|f(x)| \leq C|g(x)|$ dla każdego $x \geq r$.

$$\sqrt{x^2 + 1} = O(x) \quad (x \rightarrow \infty)$$



Notacja O i o

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow x^*)$$

jeśli istnieją takie stałe C i otoczenie punktu x^* takie, że w tym otoczeniu

$$|f(x)| \leq C|g(x)|.$$

Podobnie

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \rightarrow x^*)$$

jeśli $\lim_{x \rightarrow x^*} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = 0.$

Układ równań liniowych

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$



Mnożenie macierzy

- macierz A (rozmiaru $n \times p$)
- macierz B (rozmiaru $p \times m$)
- wynik mnożenia AB (macierz rozmiaru $n \times m$)

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$



Równoważność układów równań

Niech będą dwa układy n równań z n niewiadomymi:

$$Ax = b, Bx = d.$$

Takie układy równań są równoważne, jeśli mają identyczne rozwiązania.

Chcąc rozwiązać układ równań możemy przekształcić go do równoważnego prostszego układu.



Operacje elementarne

1. Przesztawianie równań ($E_i \leftrightarrow E_j$)
2. Mnożenie równania stronami przez pewną liczbę różną od zera ($lE_i \leftrightarrow E_i$)
3. Dodawanie stronami do równania wielokrotności innego równania ($E_i + lE_j \leftrightarrow E_i$)

Operacje elementarne

Przedstawianie równań

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_3 \\ b_2 \end{bmatrix}$$



Operacje elementarne

Mnożenie równania przez skalar

$\lambda \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \lambda b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Operacje elementarne

Dodawanie równania z mnożnikiem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{21} + a_{31} & \lambda a_{22} + a_{32} & \lambda a_{23} + a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \lambda b_2 + b_3 \end{bmatrix}$$



Odwrotność macierzy

$$Ax = b$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b$$



Układy łatwe do rozwiązania

Założmy, że macierz jest przekątniowa

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{bmatrix}$$

Jeśli dla pewnego i jest $a_{ii} = 0$ oraz $b_i = 0$, to x_i może być dowolne, natomiast jeśli $a_{ii} = 0$ oraz $b_i \neq 0$ to układ jest sprzeczny.



Układy łatwe do rozwiązania

Założmy, że macierz jest trójkątna dolna. Ponadto założmy, że $a_{ii} \neq 0$ dla wszystkich i .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$x_1 \leftarrow b_1/a_{11}$$

$$x_2 \leftarrow (b_2 - a_{21}x_1)/a_{22}$$

$$x_3 \leftarrow (b_3 - a_{32}x_2 - a_{31}x_1)/a_{33}$$

podstawianie w przód

$$x_i \leftarrow \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j \right) / a_{ii}$$



Układy łatwe do rozwiązania

Założmy, że macierz jest trójkątna górna oraz $a_{ii} \neq 0$ dla wszystkich i .

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

podstawianie wstecz

$$x_n \leftarrow b_n / a_{n,n}$$

$$x_i \leftarrow \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right) / a_{ii}$$

$$x_{n-1} \leftarrow (b_{n-1} - a_{n-1,n} x_{n,n}) / a_{n-1,n-1}$$



Układy łatwe do rozwiązania

W podobny sposób można rozwiązywać układy równań, których macierz powstaje z macierzy trójkątnej przez przestawienie wierszy.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{31} & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_3 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

permutacja (3,1,2)



Rozkład LU

Założmy, że macierz A można wyrazić jako iloczyn macierzy trójkątnej dolnej L i górnej U

$$A = LU.$$

Wtedy rozwiązywanie układu równań $Ax = b$ można wykonać w dwóch etapach, bo $L(Ux) = b$.

- $Lz = b$ rozwiązujemy względem z ,
- $Ux = z$ rozwiązujemy względem x .

Nie każda macierz ma rozkład LU .



Rozkład LU

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Jeżeli rozkład LU istnieje, to nie jest określony jednoznacznie.



Rozkład LU - algorytm

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} & l_{nn} \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & u_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^n l_{is} u_{sj} = \sum_{s=1}^{\min(i,j)} l_{is} u_{sj}$$

$$l_{is} = 0 \quad s > i$$

$$u_{sj} = 0 \quad s > j$$



Rozkład LU - algorytm

Założmy, że znamy $k-1$ wierszy macierzy U oraz $k-1$ kolumn macierzy L .

Dla $i=j=k$ mamy

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{\min(i,j)} l_{is} u_{sj}$$

$$a_{kk} = \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sk} + \boxed{l_{kk}} \boxed{u_{kk}},$$

ustaliwszy jeden z elementów l_{kk} lub u_{kk} obliczamy drugi.



Rozkład LU - algorytm

Znając l_{kk} oraz u_{kk} obliczamy pozostałe elementy k -tego wiersza macierzy U oraz k -tej kolumny macierzy L .

$$a_{kj} = \sum_{s=1}^k l_{ks} u_{sj} = \sum_{s=1}^{k-1} l_{ks} u_{sj} + l_{kk} \boxed{u_{kj}} \quad (k < j \leq n + 1)$$

$$a_{ik} = \sum_{s=1}^k l_{is} u_{sk} = \sum_{s=1}^{k-1} l_{is} u_{sk} + \boxed{l_{ik}} u_{kk} \quad (k < i \leq n + 1)$$

$$a_{ij} = \sum_{s=1}^{\min(i,j)} l_{is} u_{sj}$$



Rozkład LU

- rozkład Doolittle'a

$$l_{ij} = 1 \text{ dla } 1 \leq i \leq n$$

- rozkład Crouta

$$u_{ij} = 1 \text{ dla } 1 \leq i \leq n$$

- rozkład Cholesky'ego (dla macierzy rzeczywistej, symetrycznej, i dodatniookreślonej)

$$U = L^T, \text{ czyli } A = LL^T$$



Eliminacja Gaussa

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & -4 & 2 & 2 \\ \boxed{1/2} & -12 & 8 & 1 \\ \boxed{-1} & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$



Eliminacja Gaussa

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & -4 & 2 & 2 \\ \boxed{1/2} & -12 & 8 & 1 \\ \boxed{-1} & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & -4 & 2 & 2 \\ \boxed{1/2} & \boxed{3} & 2 & -5 \\ \boxed{-1} & \boxed{-1/2} & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$



Eliminacja Gaussa

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & -4 & 2 & 2 \\ \boxed{1/2} & \boxed{3} & 2 & -5 \\ \boxed{-1} & \boxed{-1/2} & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & -4 & 2 & 2 \\ \boxed{1/2} & \boxed{3} & 2 & -5 \\ \boxed{-1} & \boxed{-1/2} & \boxed{2} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$



Eliminacja Gaussa

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & -4 & 2 & 2 \\ \boxed{1/2} & \boxed{3} & 2 & -5 \\ \boxed{-1} & \boxed{-1/2} & \boxed{2} & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 6 & 10 \\ 3 & -13 & 9 & 3 \\ -6 & 4 & 1 & -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$



Eliminacja Gaussa

Znaczenie elementów głównych

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 0 & 1 - \varepsilon^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 - \varepsilon^{-1} \end{bmatrix}$$

$$x_2 = (2 - \varepsilon^{-1}) / (1 - \varepsilon^{-1}), \quad x_1 = (1 - x_2) \varepsilon^{-1}$$

$$x_2 = 1, \quad x_1 = 0$$

Eliminacja Gaussa

Znaczenie elementów głównych

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 - \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 - 2\varepsilon \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 1, \quad x_1 = 1$$

Eliminacja Gaussa

Wybór elementów głównych

$$Ax = b$$

$$PAx = Pb$$

$$PA = LU$$

$$Lz = Pb$$

$$Ux = z$$

- P - macierz permutacji (P powstaje z I poprzez przestawianie wierszy)

$$(P)_{ij} = \delta_{p_i j}$$



Podsumowanie (1)

- Metody wyznaczania miejsc zerowych
 - Metoda bisekcji
 - Metoda Newtona i metoda siecznych
- Zbieżność
- Notacja O i o



Podsumowanie (2)

- Układy równań liniowych
- Układy równań do łatwe rozwiązania
- Wyznaczanie rozkładów LU
- Eliminacja Gaussa