

Metody numeryczne w fizyce

Laboratorium 10

Stacjonarne drgania podłużne sprężystego pręta opisane są równaniem:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -k^2u,$$

gdzie $u(x)$ – wychylenie z położenia równowagi, a wartościami własnymi są dopuszczalne wartości wektora falowego k . Wybierając odpowiednio układ współrzędnych można sprowadzić problem na odcinek jednostkowy. Dla pręta obustronnie umocowanego warunki brzegowe są następujące $u(0) = u(1) = 0$.

Równanie spełniają wartości własne $k_n^2 = (n\pi)^2$ i funkcje własne $u_n(x) = \sqrt{2} \sin k_n x$.

1. Przyjmując wybraną wartość parametru k , rozwiąż numerycznie zagadnienie początkowe dla warunków początkowych: $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. Wykreśl zależność $u(x)$.
Do rozwiązywania zagadnienie początkowego wykorzystaj solwer (np. `ode23`).
2. Napisz funkcję, która dla podanego k i ustalonych warunków początkowych, zwraca obliczoną wartość $u(1)$. Funkcja powinna rozwiązywać zagadnienie początkowe i zwracać obliczoną wartość $u(1)$.
3. Wyznacz kilka wartości k , dla których $u(1) = 0$. W tym celu wywołaj funkcję `fzero`, przekazując do niej jako argument funkcję z zadania 2.
4. Dla wyznaczonych wartości k , rozwiąż numerycznie zagadnienie początkowe i wykreśl zależności $u(x)$. Porównaj wyznaczone wartości własne i funkcje własne z rozwiązaniami analitycznymi.
Wskazówka: powtórz rozwiązanie zadania 1 dla wyznaczonych (wybranych) k .
5. Zastanów się, jak można skrócić czas obliczeń, korzystając z symetrii zagadnienia (pręt jest symetryczny względem punktu $x = 1/2$). Rozwiąż ponownie zadania 2, 3, 4, wprowadzając konieczne modyfikacje.
Wskazówka: rozważ, jakie są dwie klasy rozwiązań wynikające z symetrii zagadnienia oraz jakie warunki brzegowe spełniają.

6. Dla znanych (z wyrażeń analitycznych) wartości k , rozwiąż zagadnienie brzegowe i wykreśl zależności $u(x)$, wykorzystując funkcję **bvp4c()**. Porównaj wyznaczone funkcje z rozwiązaniami analitycznymi.
7. Ponownie rozwiąż zagadnienie brzegowe początkowe i wykreśl zależności $u(x)$, wykorzystując funkcję **bvp4c()**. Tym razem potraktuj zagadnienie jako zagadnienie własne. Porównaj wyznaczone wartości własne i funkcje własne z rozwiązaniami analitycznymi.

Karol Tarnowski
Wrocław, 2022