Politechnika Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

FZP002934wcL

rok akademicki 2020/21

semestr letni

Wykład 11

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220

Plan wykładu

- MathWorks, Documentation Center, Partial Differential Equation Toolbox
  http://www.mathworks.co.uk/help/pde/index.html

PDE Toolbox

- Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych z wykorzystaniem metody elementów skończonych
  - tworzenie geometrii
  - siatkowanie
  - warunki brzegowe
  - solwery równań różniczkowych
  - wizualizacja

PDE Toolbox

1. Określenie geometrii 2D.
2. Określenie warunków brzegowych.
3. Określenie współczynników równania.
4. Tworzenie siatki trójkątnej.
5. Rozwiązanie równania różniczkowego.
6. Wykreślenie rozwiązania.

Zagadnienia

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$d\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = \lambda du$$

$$-\nabla \cdot (c(u)\nabla u) + a(u)u = f(u)$$

Układy równań

$$
\begin{aligned}
-\nabla \cdot \left(c_{11} \nabla u_1 \right) - \nabla \cdot \left(c_{12} \nabla u_2 \right) + a_{11} u_1 + a_{12} u_2 = f_1 \\
-\nabla \cdot \left(c_{21} \nabla u_1 \right) - \nabla \cdot \left(c_{22} \nabla u_2 \right) + a_{21} u_1 + a_{22} u_2 = f_2
\end{aligned}
$$

Warunki brzegowe

- Dirichlet $hu = r$
- Neumann $\vec{n} \cdot \left(c \nabla u \right) + qu = g$

Przykład 1
Równanie Poissona

$$-\nabla^2 u = 1 \text{ na } \Omega$$

$$u = 0 \text{ na } \partial\Omega$$

Ω dysk jednostkowy

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{4}$$

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$c = 1$$

$$a = 0$$

$$f = 1$$

$$hu = r$$

$$h = 1$$

$$r = 0$$

Przykład 2
Rozpraszanie

- równanie falowe $$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 U = 0$$
- fale płaskie $$U(x,y,t) = u(x,y)\exp(-i\omega t)$$

$$-\omega^2 u - c^2 \nabla^2 u = 0$$

- równanie Helmholtza $$-\nabla^2 u - k^2 u = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Przykład 2
Rozpraszanie

- warunek brzegowy – fala padająca

$$V(x,y,t)=\exp\left(i\left(k\vec{a}\cdot\vec{x}-\omega t\right)\right)=v(x,y)\exp(-i\omega t)$$

$$v(x,y)=\exp\left(ik\vec{a}\cdot\vec{x}\right)$$

$$u=v+r$$

- na granicy obiektu $u=0$ $r=-v$
- na granicy obszaru obliczeniowego

$$\frac{\partial r}{\partial t}+c\vec{\xi}\cdot\nabla r=0 \qquad \vec{\xi}\cdot\nabla r-ikr=0$$

Przykład 2
Rozpraszanie

$$-\nabla^2 u - k^2 u = 0$$

$$-\nabla \cdot (c\nabla u) + au = f$$

$$k = 60 \qquad \lambda = \frac{2\pi}{60} \approx 0{,}1$$

$$c = 1$$

$$a = -k^2$$

$$f = 0$$

$$\vec{n} \cdot (c\nabla u) + qu = g$$

$$c = 1$$

$$q = -60i$$

$$g = 0$$

$$\boxed{\vec{\xi} \cdot \nabla r - ikr = 0}$$

$$hu = r$$

$$h = 1$$

$$\boxed{r = -v = -\exp(ik\vec{a} \cdot \vec{x})}$$

$$r = -v = -\exp(-60ix)$$