Politechnika Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

FZP002934wcL

rok akademicki 2020/21

semestr letni

Wykład 10

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220

Plan wykładu

- Równanie Laplace'a
- Metoda relaksacji
- Przykłady
- Równanie Poissona

Na podstawie:

- N. J. Giordano, H. Nakanishi, Computational Physics

Równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

$$V(x, y, z)$$

- metoda relaksacji

Dyskretyzacja pierwszej pochodnej

$$V(i,j,k) \equiv V(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{i,j,k} \approx \frac{V(i+1,j,k)-V(i,j,k)}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{i,j,k} \approx \frac{V(i,j,k)-V(i-1,j,k)}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{i,j,k} \approx \frac{V(i+1,j,k)-V(i-1,j,k)}{2\Delta x}$$

Dyskretyzacja drugiej pochodnej

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{i,j,k} \approx \frac{\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{i+1/2,j,k} - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{i-1/2,j,k}}{\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{i,j,k} \approx \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{V|_{i+1,j,k} - V|_{i,j,k}}{\Delta x} - \frac{V|_{i,j,k} - V|_{i-1,j,k}}{\Delta x}\right]$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{i,j,k} \approx \frac{V|_{i+1,j,k} - 2V|_{i,j,k} + V|_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2}$$

Równanie Laplace'a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

$$\frac{V\big|_{i+1,j,k}-2V\big|_{i,j,k}+V\big|_{i-1,j,k}}{(\Delta x)^2}+\frac{V\big|_{i,j+1,k}-2V\big|_{i,j,k}+V\big|_{i,j-1,k}}{(\Delta y)^2}+\frac{V\big|_{i,j,k+1}-2V\big|_{i,j,k}+V\big|_{i,j,k-1}}{(\Delta z)^2}=0$$

$$\frac{1}{6}\left[V\big|_{i+1,j,k}+V\big|_{i-1,j,k}+V\big|_{i,j+1,k}+V\big|_{i,j-1,k}+V\big|_{i,j,k+1}+V\big|_{i,j,k-1}\right]=V\big|_{i,j,k}$$

Równanie Laplace'a
Metoda relaksacji

$$V\big|_{i,j,k}^{0} \to V\big|_{i,j,k}^{1} \to V\big|_{i,j,k}^{2} \to \dots$$

$$\bar{V}(x,y,z,t)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2}\right)$$

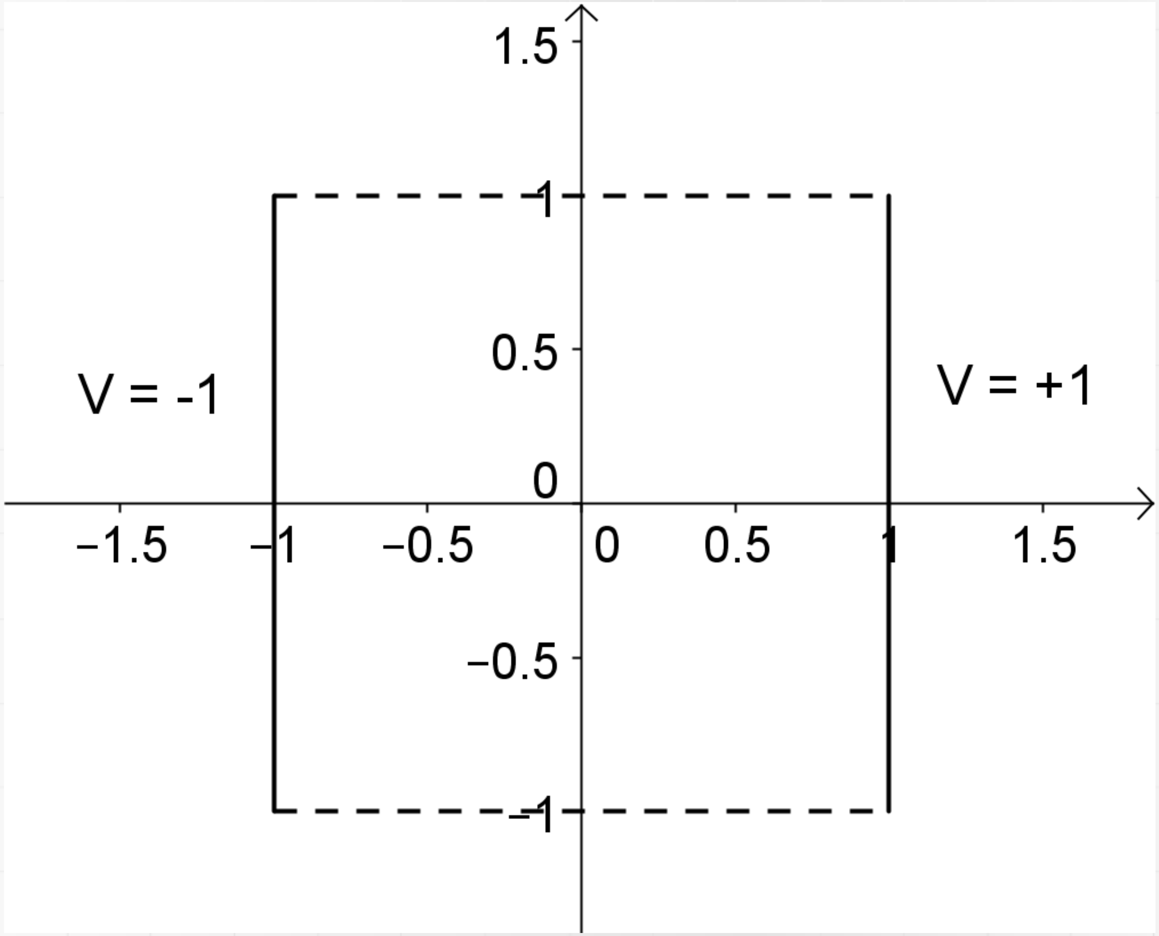
$$\bar{V}(x,y,z,0) \to \bar{V}(x,y,z,t \to \infty)$$

Równanie Laplace'a
Metoda Jacobiego

$$V\Big|_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}\left[V\Big|_{i+1,j}^{n} + V\Big|_{i-1,j}^{n} + V\Big|_{i,j+1}^{n} + V\Big|_{i,j-1}^{n} \right]$$

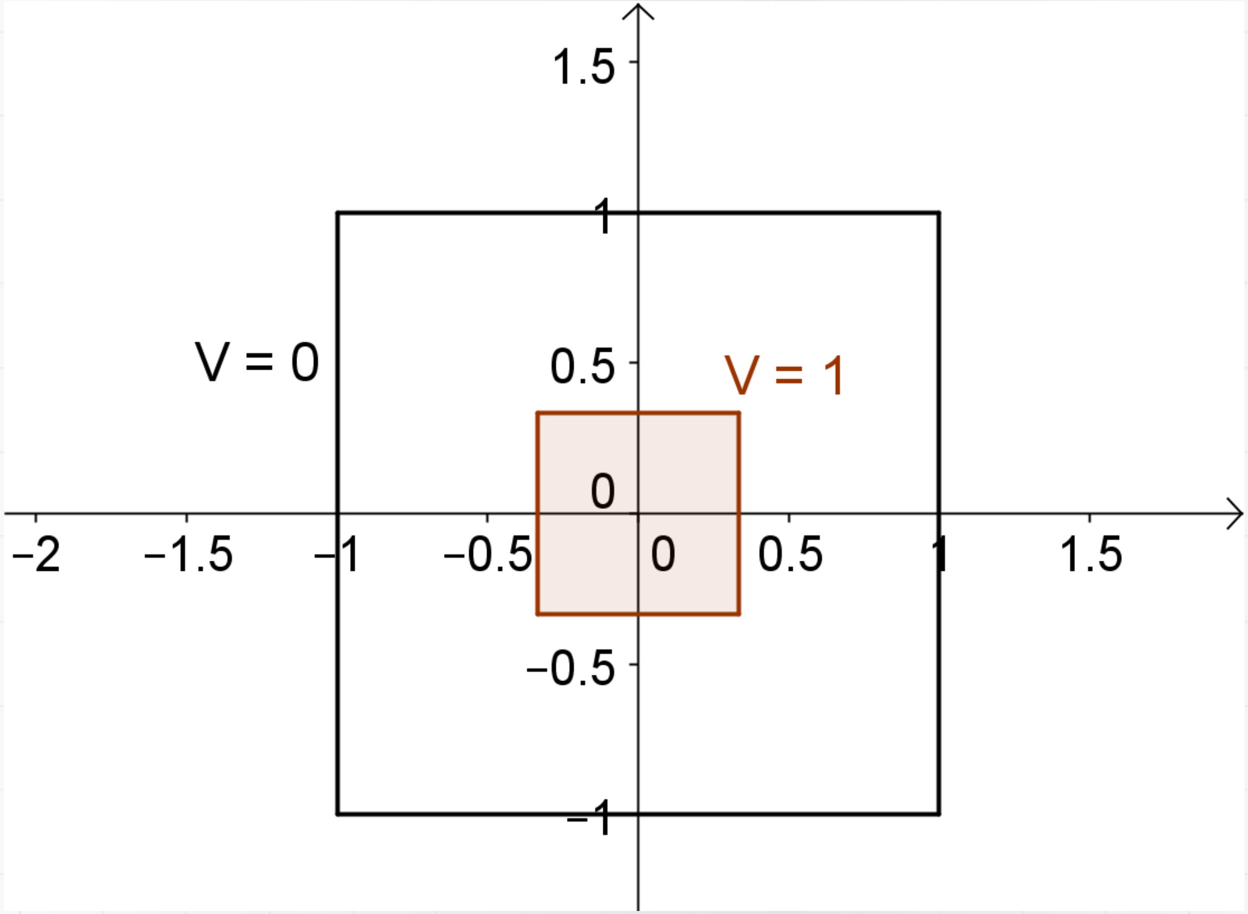
Równanie Laplace'a

Przykład 1. Potencjał między równoległymi płytkami



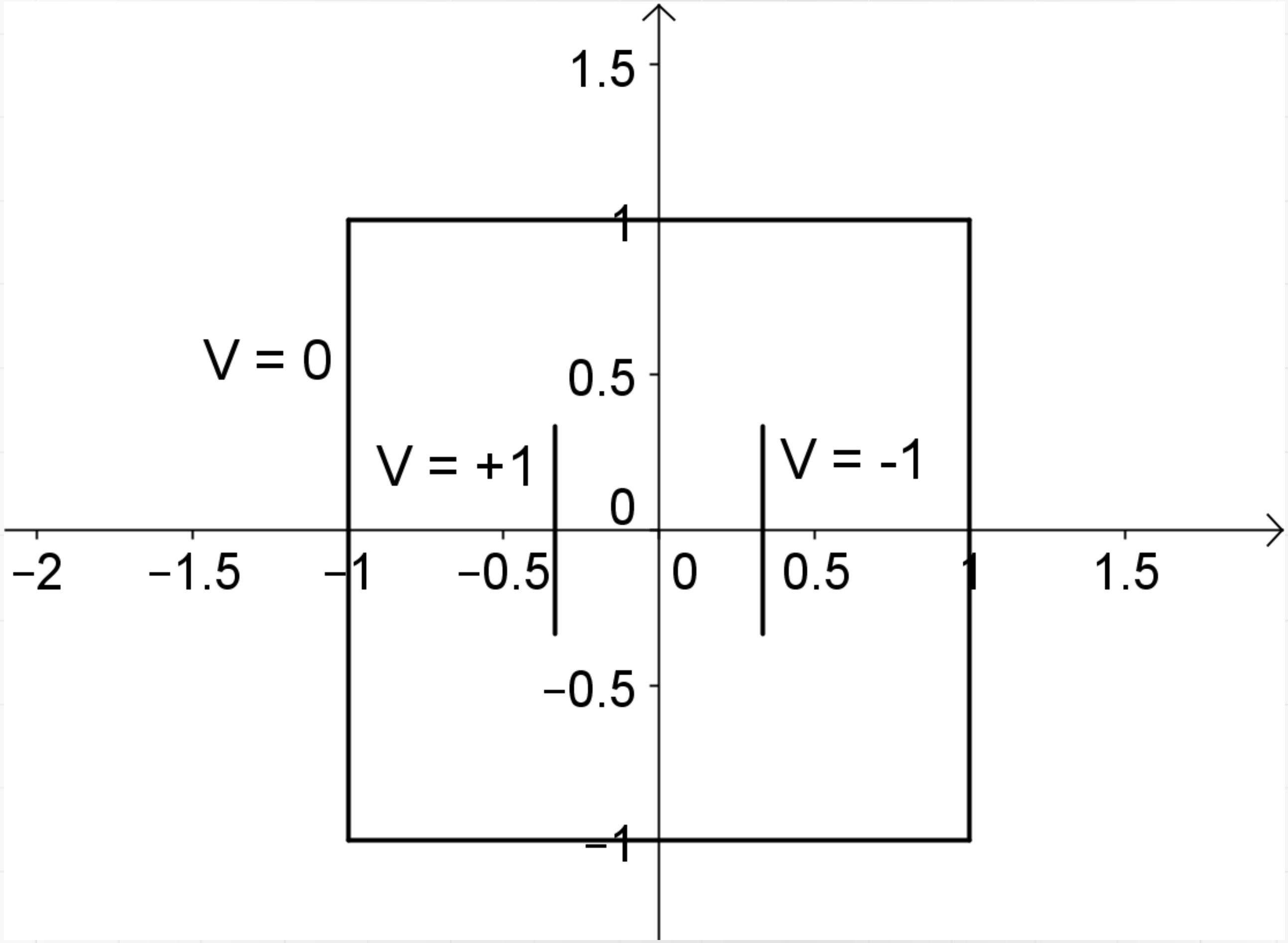
Równanie Laplace'a

Przykład 2.



Równanie Laplace'a

Przykład 3. Kondensator płaski



Równanie Laplace'a

- metoda Jacobiego

$$V\Big|_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}\left[V\Big|_{i+1,j}^{n} + V\Big|_{i-1,j}^{n} + V\Big|_{i,j+1}^{n} + V\Big|_{i,j-1}^{n} \right]$$

- metoda Gaussa-Seidla

$$V\Big|_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4}\left[V\Big|_{i+1,j}^{n} + V\Big|_{i-1,j}^{n+1} + V\Big|_{i,j+1}^{n} + V\Big|_{i,j-1}^{n+1} \right]$$

Równanie Laplace'a

Przykład 4. Ładunek punktowy

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$V\big|_{i,j,k}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} V\big|_{i+1,j,k}+V\big|_{i-1,j,k}+ \\ V\big|_{i,j+1,k}+V\big|_{i,j-1,k}+ \\ V\big|_{i,j,k+1}+V\big|_{i,j,k-1} \end{bmatrix}+\frac{\rho\big|_{i,j,k}\left(\Delta x\right)^2}{\varepsilon_0}$$

$$V\left(r\right)=\frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Podsumowanie

- Równanie Laplace’a
- Metoda relaksacji
- Przykłady
- Równanie Poissona