# Metody numeryczne w fizyce

FZP002934wcL

rok akademicki 2020/21

semestr letni

# Wykład 9

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220

Politechnika Wrocławska

# Plan wykładu

- Zagadnienie początkowe – uzupełnienie
- Zagadnienie brzegowe
- Zagadnienie własne
- Metoda strzałów
- Funkcje Matlaba – **`bvp4c()`**, **`bvp5c()`**
- Metoda różnic skończonych

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*
- T. Pang, *Metody obliczeniowe w fizyce*

# Zagadnienie początkowe

Typowe zagadnienie początkowe opisane jest równaniem

$$\frac{du}{dx} = f\left(x, u\right), \quad u\left(x_0\right) = u^{(0)}.$$

W zagadnieniu początkowym może występować więcej zmiennych

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}\right), \quad \mathbf{u}\left(x_0\right) = \mathbf{u}^{(0)}.$$

# Zagadnienie początkowe

Zagadnienie początkowe rzędu drugiego

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x,u,u'\right), \quad u\left(x_0\right) = u^{(0)}, \quad u'\left(x_0\right) = u'^{(0)}$$

można zapisać jako zagadnienie początkowe rzędu pierwszego dla dwóch zmiennych

$$u_1 \equiv u, \quad u_2 \equiv u' \quad \begin{array}{ll} \dfrac{du_1}{dx} = u_2, & u_1\left(x_0\right) = u_1^{(0)}, \\ \dfrac{du_2}{dx} = f\left(x,u_1,u_2\right), & u_2\left(x_0\right) = u_2^{(0)}. \end{array}$$

Politechnika Wrocławska

# Zagadnienie początkowe

Zagadnienie początkowe rzędu pierwszego dla dwóch zmiennych

$$\frac{du_1}{dx} = u_2, \qquad u_1(x_0) = u_1^{(0)},$$

$$\frac{du_2}{dx} = f(x, u_1, u_2), \qquad u_2(x_0) = u_2^{(0)}.$$

można zapisać w postaci wektorowej

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ f(x, u_1, u_2) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1(x_0) \\ u_2(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{bmatrix}.$$

Politechnika Wrocławska

# Zagadnienie początkowe

Zagadnienie początkowe w postaci wektorowej

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ f\left(x, u_1, u_2\right) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1\left(x_0\right) \\ u_2\left(x_0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}\right), \qquad \mathbf{u}\left(x_0\right) = \mathbf{u}^{(0)}.$$

Politechnika Wrocławska

# Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu początkowym rzędu drugiego znamy wartości funkcji i jej pochodnej w punkcie początkowym

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x,u,u'\right), \quad u\left(x_0\right) = u^{(0)}, \quad u'\left(x_0\right) = u'^{(0)}.$$

Innym typem problemów są zagadnienia brzegowe, przykładowo

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x,u,u'\right), \quad u\left(x_0\right) = u^{(0)}, \quad u\left(x_1\right) = u^{(1)}.$$

# Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu brzegowym

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f\left(x,u,u'\right)$$

$$u'' = f\left(x,u,u'\right)$$

możemy dobrać tak układ współrzędnych, aby

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

# Zagadnienie brzegowe

W zagadnieniu brzegowym

$$u'' = f\left(x, u, u'\right)$$

możemy znać różne zestawy warunków brzegowych

$$u\left(0\right) = u^{(0)},\ u\left(1\right) = u^{(1)}; \qquad u\left(0\right) = u^{(0)},\ u'\left(1\right) = v^{(1)};$$

$$u'\left(0\right) = v^{(0)},\ u\left(1\right) = u^{(1)}; \qquad u'\left(0\right) = v^{(0)},\ u'\left(1\right) = v^{(1)}.$$

# Zagadnienie własne

W niektórych przypadkach w problemie pojawia się jeszcze parametr – wartość własna

$$u'' = f\left(x, u, u', \lambda\right).$$

# Zagadnienie własne

$$u'' = f\left(x, u, u', k\right)$$

Przykład: drgania podłużne sprężystego pręta.

$$u'' = -k^2 u$$

- pręt obustronnie umocowany

$$u\left(0\right) = 0 \qquad u\left(1\right) = 0$$

- pręt umocowany jednostronnie

$$u\left(0\right) = 0 \qquad u'\left(1\right) = 0$$

# Zagadnienie własne

## Rozwiązania analityczne dla pręta obustronnie umocowanego

$$u_n(x) = \sqrt{2}\sin(k_n x)$$

$$k_n^2 = (n\pi)^2$$

# Metoda strzałów

## Zagadnienie brzegowe

$$u'' = f\left(x, u, u'\right)$$

Stosując podstawienia $y_1 = u$ $y_2 = u'$

otrzymujemy

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f\left(x, y_1, y_2\right).$$

Załóżmy, że warunki brzegowe są postaci:

$$u\left(0\right) = u^{\left(0\right)}, \quad u\left(1\right) = u^{\left(1\right)}.$$

# Metoda strzałów

## Zagadnienie brzegowe

Wprowadźmy dodatkowy parametr $\delta$ i załóżmy, że

$$u'(0) = \delta.$$

Dla ustalonego $\delta$ jesteśmy w stanie rozwiązać zagadnienie początkowe znanymi metodami.

Rozwiązanie równania różniczkowego daje nam wartość funkcji na drugim brzegu przedziału

$$u_\delta(1).$$

$$F(\delta) = u_\delta(1) - u^{(1)}$$

# Metoda strzałów

## Zagadnienie brzegowe

Miejsca zerowego funkcji

$$F(\delta) = u_\delta(1) - u^{(1)}$$

poszukiwać możemy np. metodami:

- bisekcji,
- siecznych.

# Metoda strzałów

## Zagadnienie własne

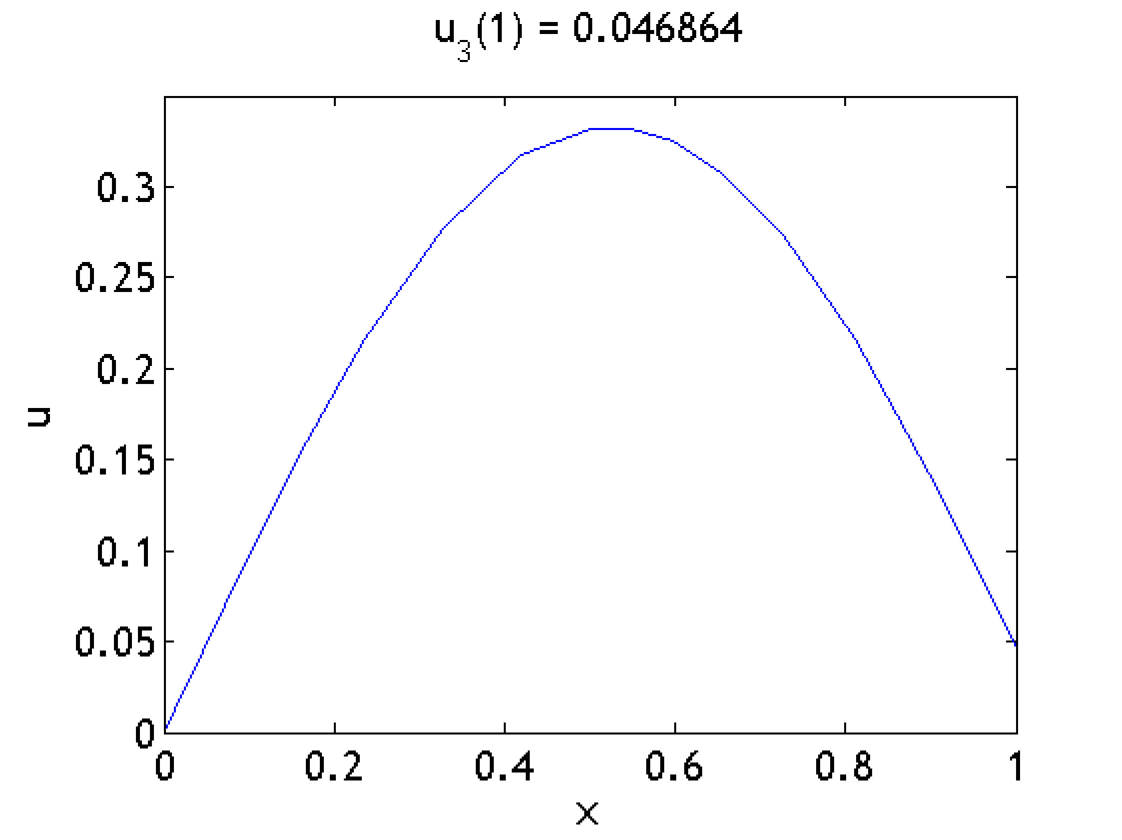
$$F(k) = u_k(1) - u^{(1)}$$

Metodę strzałów można także wykorzystać do rozwiązania zagadnienia własnego.

W tym przypadku dopasowujemy wartość własną zagadnienia.

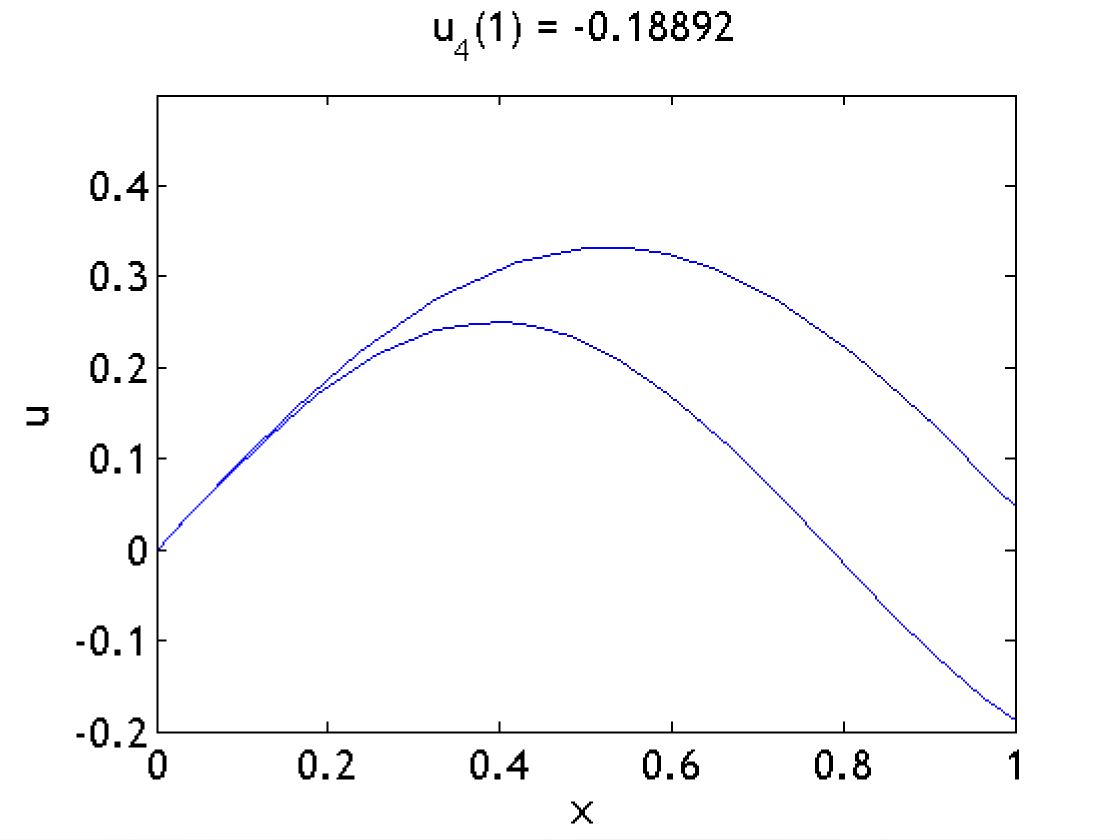
# Metoda strzałów

## Zagadnienie własne



# Metoda strzałów

## Zagadnienie własne



# Zagadnienie brzegowe

## Funkcje Matlaba

Do rozwiazywania zagadnienia brzegowego w środowisku Matlab można wykorzystać funkcje **`bvp4c()`**, **`bvp5c()`**, które wykorzystują metodę kolokacji.

https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/bvp4c.html

https://www.mathworks.com/help/matlab/math/solve-bvp-with-unknown-parameter.html

# Zagadnienie brzegowe

## Metoda różnic skończonych

$$u'' = -k^2 u$$

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = b,\ x_i = a + is,\ s = \frac{b-a}{n+1}.$$

$$u_i = u\left(x_i\right)$$

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{s^2} = -k^2 u_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1,\ldots,n$$

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -s^2 k^2 u_i,$$

# Zagadnienie brzegowe

## Metoda różnic skończonych

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = -s^2 k^2 u_i, \qquad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n$$

$$u_0 = 0, \; u_{n+1} = 0,$$

$$\mathbf{B}u = \lambda u.$$

# Podsumowanie (1)

- Zagadnienie początkowe

$$\frac{d}{dx}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2 \\ f\left(x, u_1, u_2\right) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} u_1\left(x_0\right) \\ u_2\left(x_0\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{(0)} \\ u_2^{(0)} \end{bmatrix},$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dx} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}\right), \qquad \mathbf{u}\left(x_0\right) = \mathbf{u}^{(0)}.$$

- Zagadnienie brzegowe

$$u'' = f\left(x, u, u'\right)$$

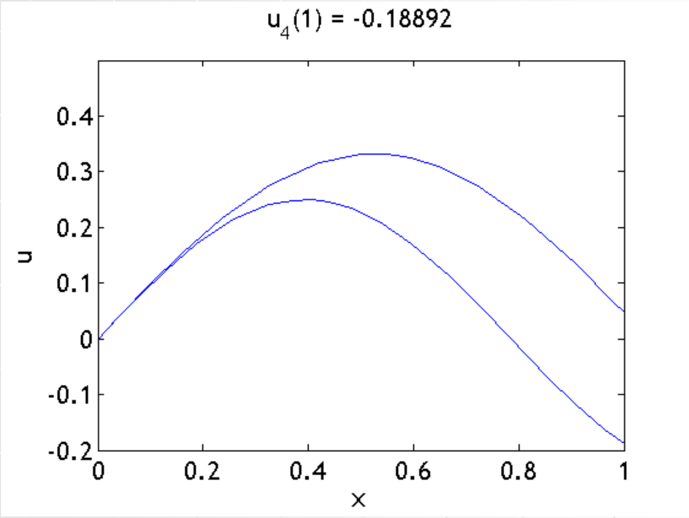
$$u(0) = u^{(0)},\ u(1) = u^{(1)} \text{ itp.}$$

# Podsumowanie (2)

- Zagadnienie własne

$$u'' = f\left(x, u, u', \lambda\right)$$

- Metoda strzałów



# Podsumowanie (3)

- **`bvp4c()`**

```
sol = bvp4c(odefun,bcfun,solinit)
```

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{s^2} = -k^2 u_i$$

- Metoda różnic skończonych

$$\mathbf{B}u = \lambda u.$$