

Metody numeryczne w fizyce

FZP002934wcl

rok akademicki 2020/21

semestr letni

Wykład 5

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220



Plan wykładu

- Wielomian interpolujący
- Wzór interpolacyjny Newtona
- Wzór interpolacyjny Lagrange'a
- Ilorazy różnicowe
- Interpolacja Hermite'a
- Interpolacja funkcjami sklejanymi

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*



Wielomian interpolujący

Zadanie. Znaleźć wielomian p możliwie najniższego stopnia taki, że dla danych $n + 1$ punktów (x_i, y_i) jest $p(x_i) = y_i$ ($0 \leq i \leq n$).

Twierdzenie. Jeśli liczby x_0, x_1, \dots, x_n są parami różne to istnieje dokładnie jeden wielomian $p \in \Pi_n$ taki, że $p(x_i) = y_i$ ($0 \leq i \leq n$).



Wielomian interpolujący

Dowód - jednoznaczność

Założmy, że istnieją dwa wielomiany klasy Π_n interpolujące wartości y_i w węzłach x_i : $p_n(x)$ oraz $q_n(x)$.

Rozważmy wielomian $p_n(x) - q_n(x)$, który także należy do klasy Π_n .

Wielomiany należące do Π_n mogą zniknąć w co najwyżej n punktach, o ile nie znikają tożsamościowo.

Wielomian $p_n(x) - q_n(x)$ znika w $n+1$ punktach x_i dla $(0 \leq i \leq n)$, zatem $p_n(x) \equiv q_n(x)$.



Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

Istnienie - dla $n = 0$ wielomian stały $p_0(x) = y_0$ spełnia jedyny warunek interpolacyjny $p_0(x_0) = y_0$.

Założmy, że dla pewnego k istnieje wielomian p_{k-1} klasy Π_{k-1} taki, że $p_{k-1}(x_i) = y_i$ dla $(0 \leq i \leq k-1)$.

Wielomian $p_k(x)$ możemy zapisać jako

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}).$$



Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

Wielomian $p_k(x)$ możemy zapisać jako

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1}).$$

Stopień tego wielomianu nie przewyższa k .

Wielomian ten spełnia warunki interpolacyjne ($0 \leq i \leq k-1$). Pozostaje wyznaczyć c_k tak, żeby

$$p_k(x_k) = y_k.$$

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1}) = y_k.$$



Wielomian interpolujący

Dowód - istnienie

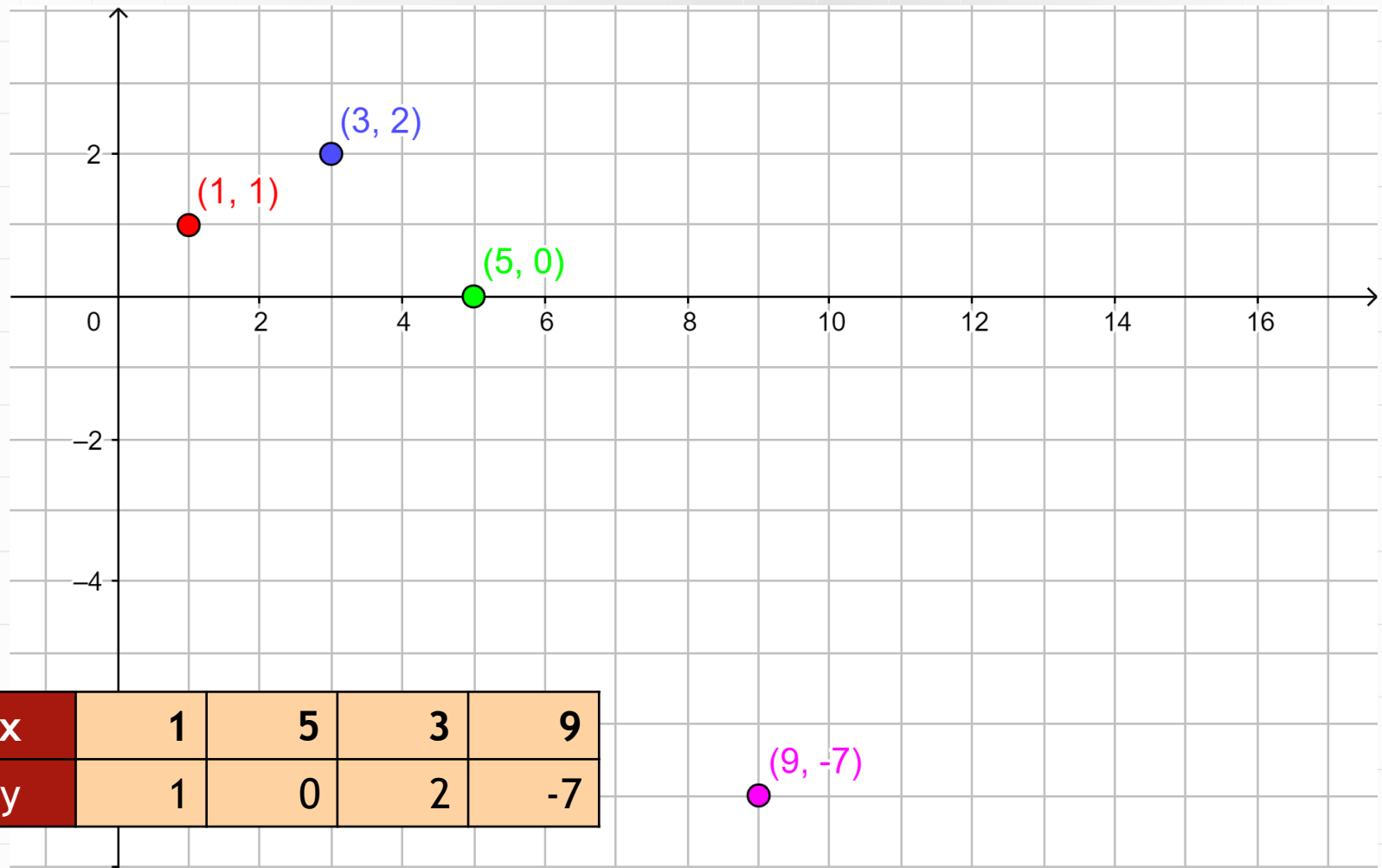
$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c_k(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1}) = y_k.$$

$$c_k = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})}$$

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^k \left(c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j) \right)$$

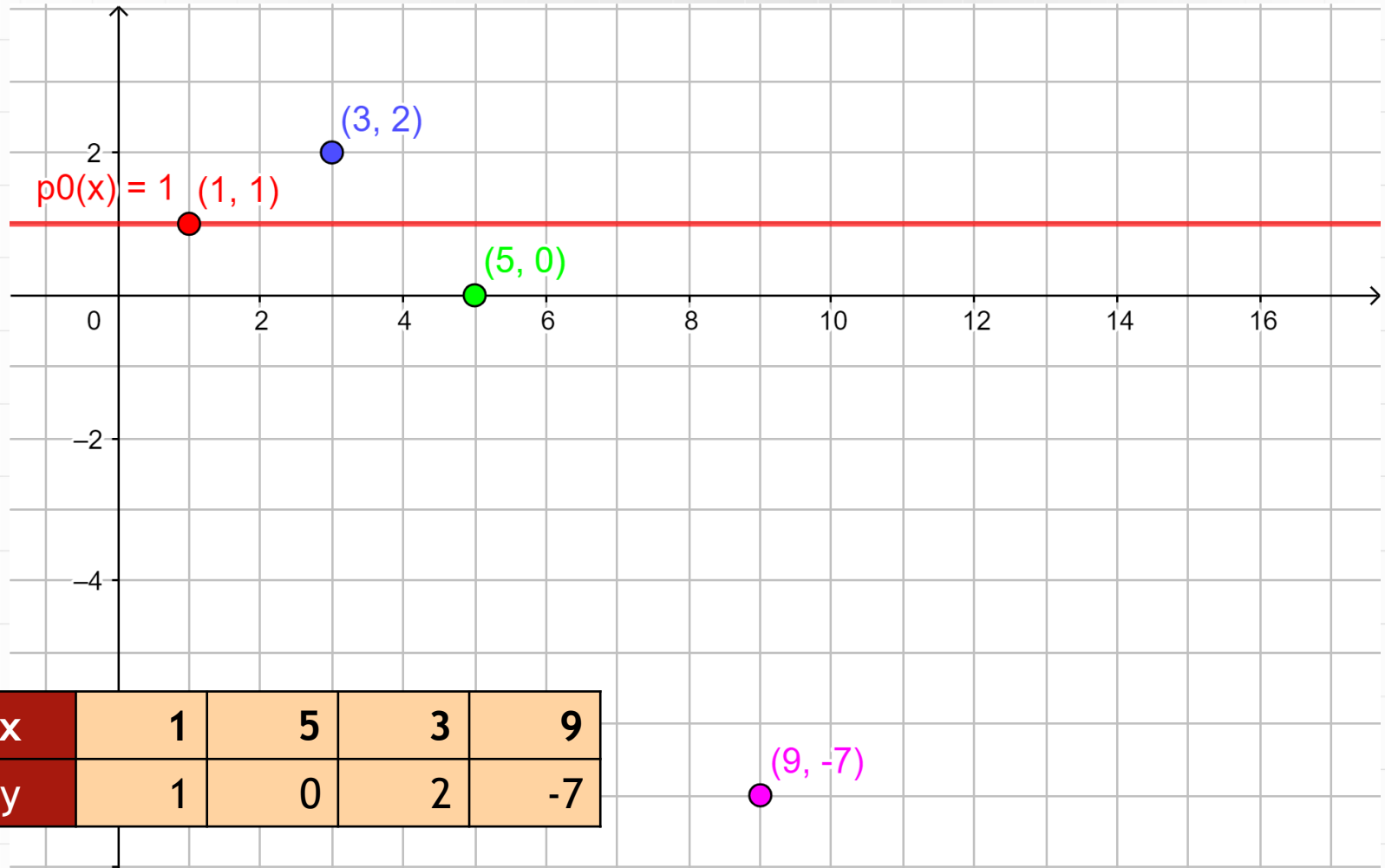
Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



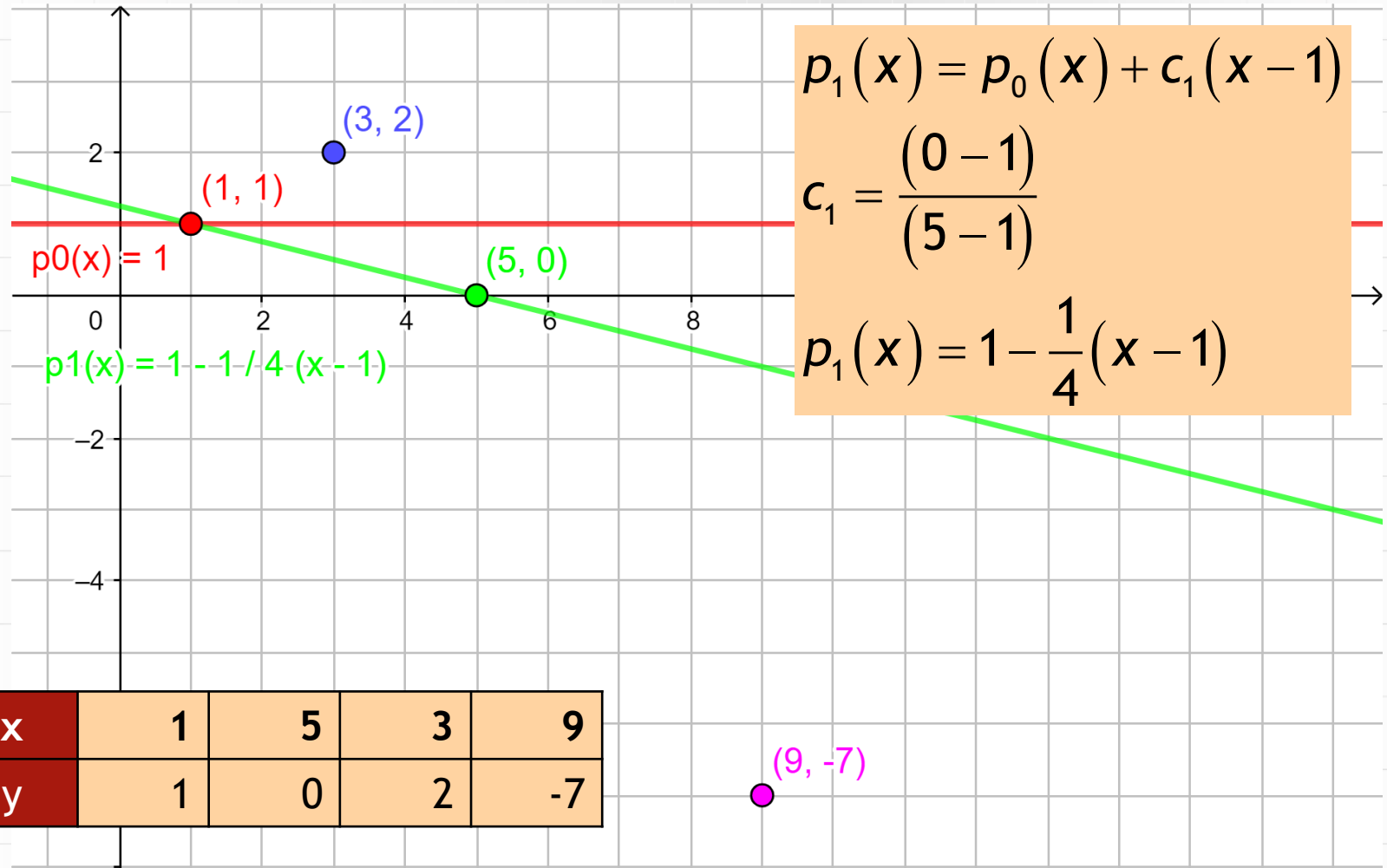
Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



Wzór interpolacyjny Newtona

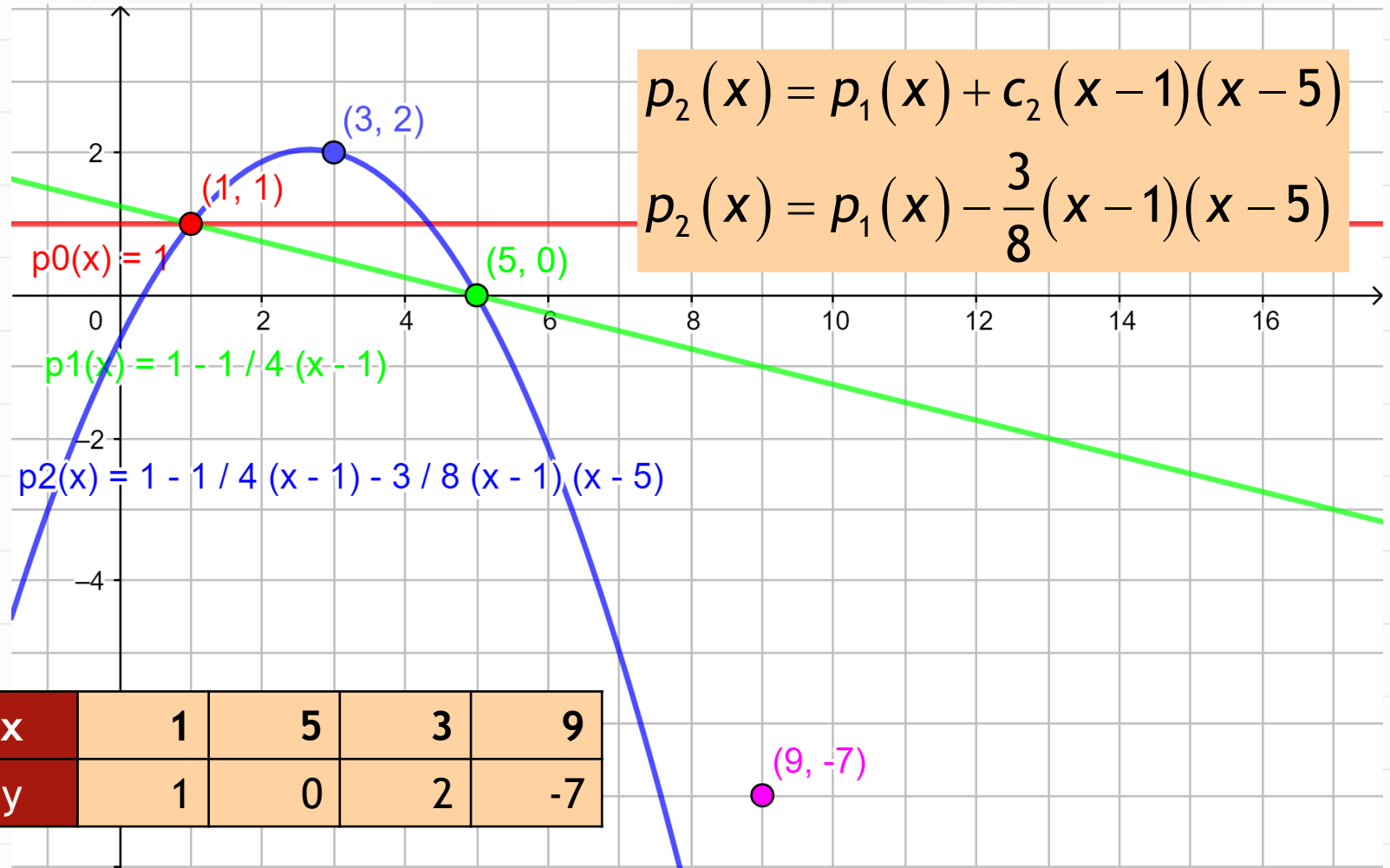
Przykład



x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

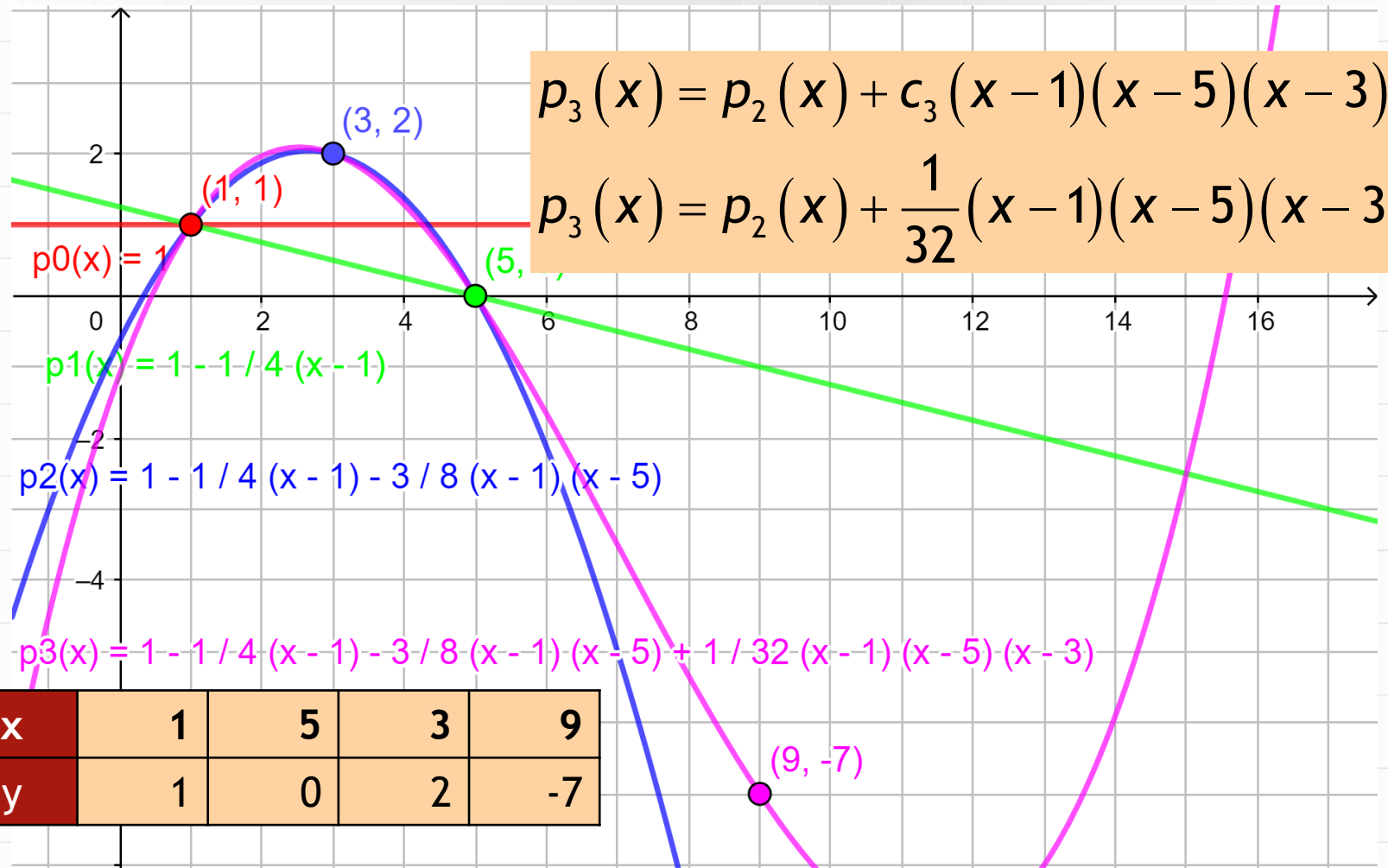
Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład



Wzór interpolacyjny Newtona

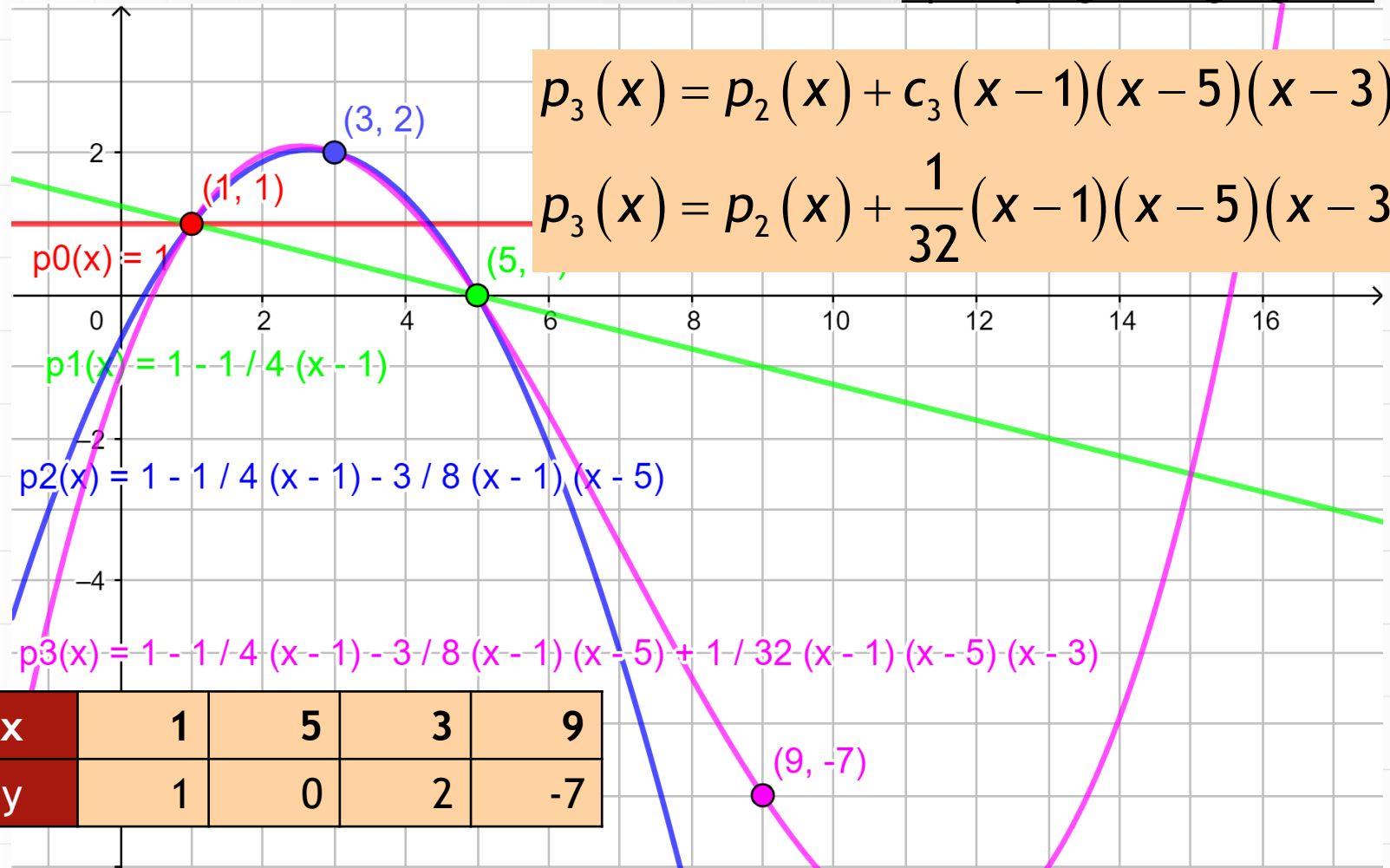
Przykład



Wzór interpolacyjny Newtona

Przykład

Aplet programu geogebra



$$p_3(x) = p_2(x) + c_3(x-1)(x-5)(x-3)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{1}{32}(x-1)(x-5)(x-3)$$

$$p_0(x) = 1$$

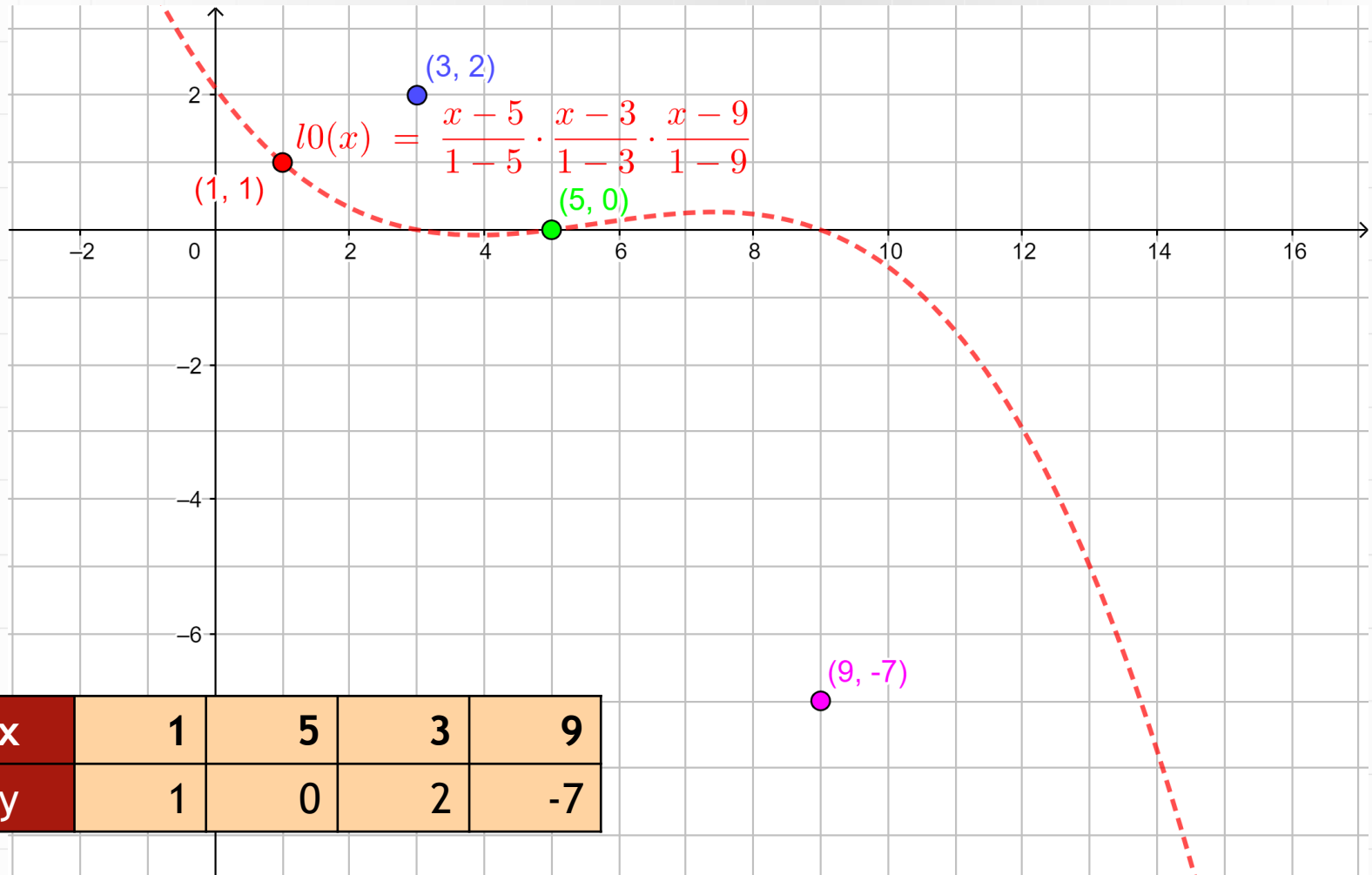
$$p_1(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-1)$$

$$p_2(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)(x-5)$$

$$p_3(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)(x-5) + \frac{1}{32}(x-1)(x-5)(x-3)$$

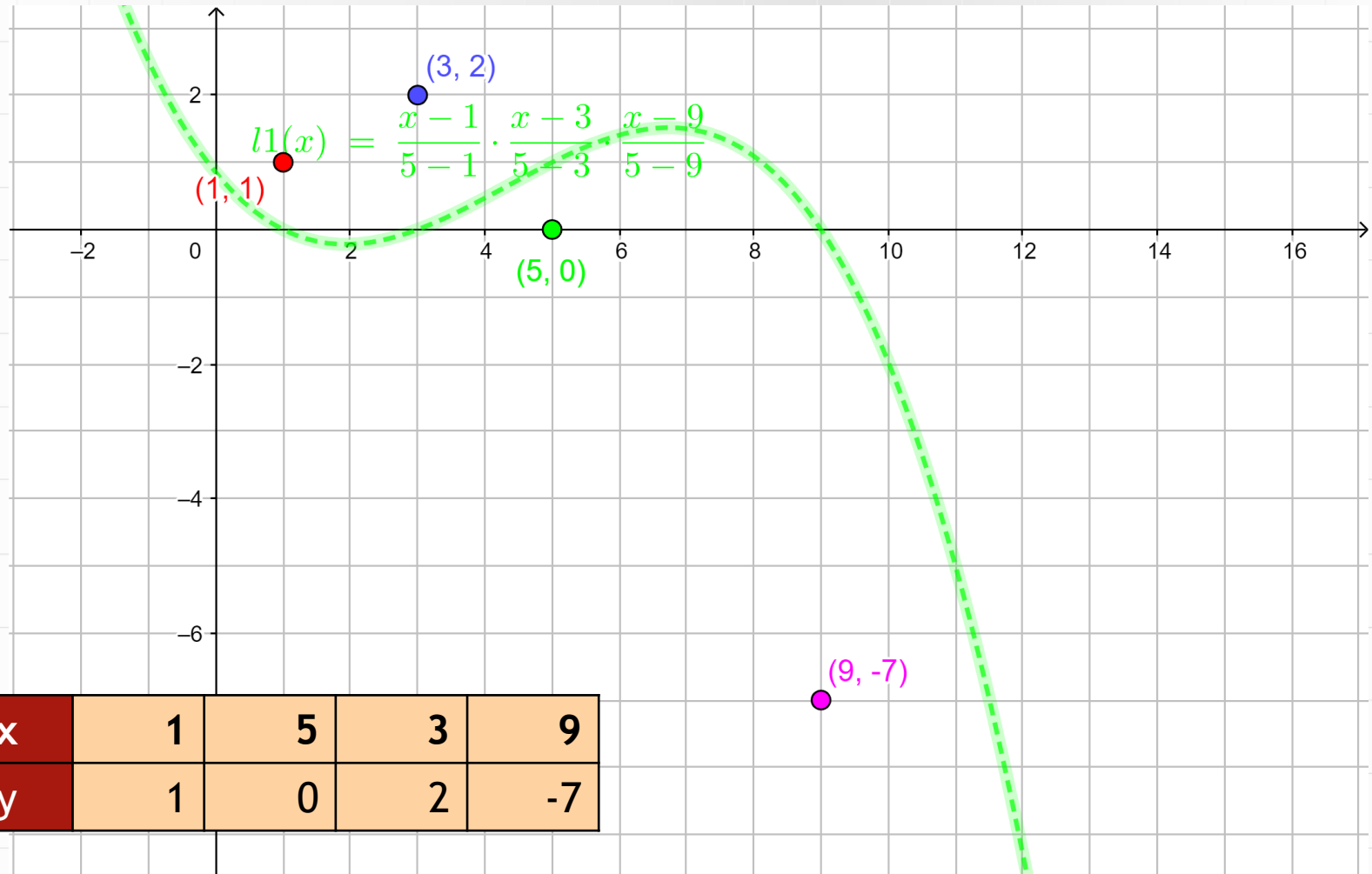
x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

Wzór interpolacyjny Lagrange'a

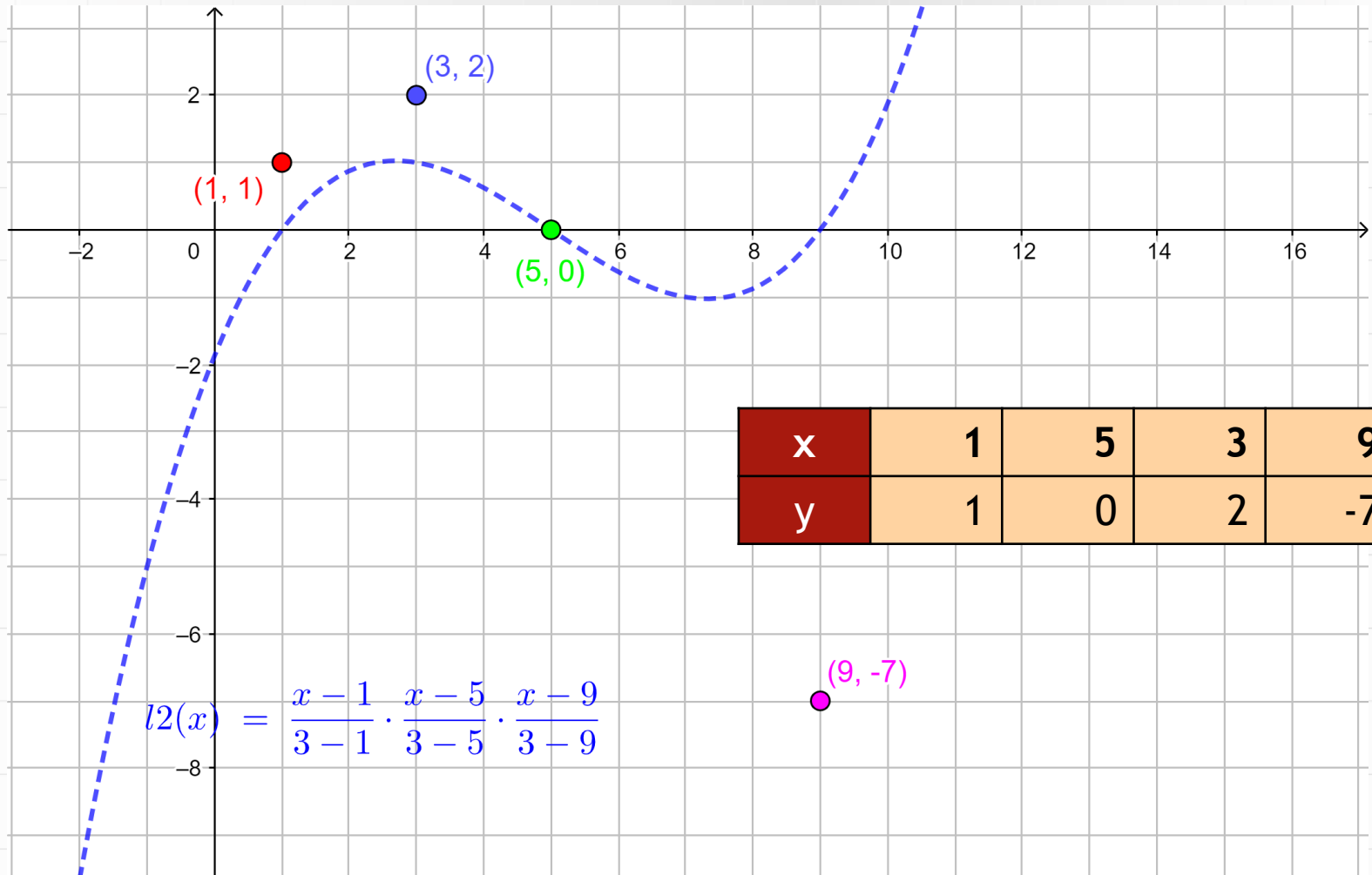


x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

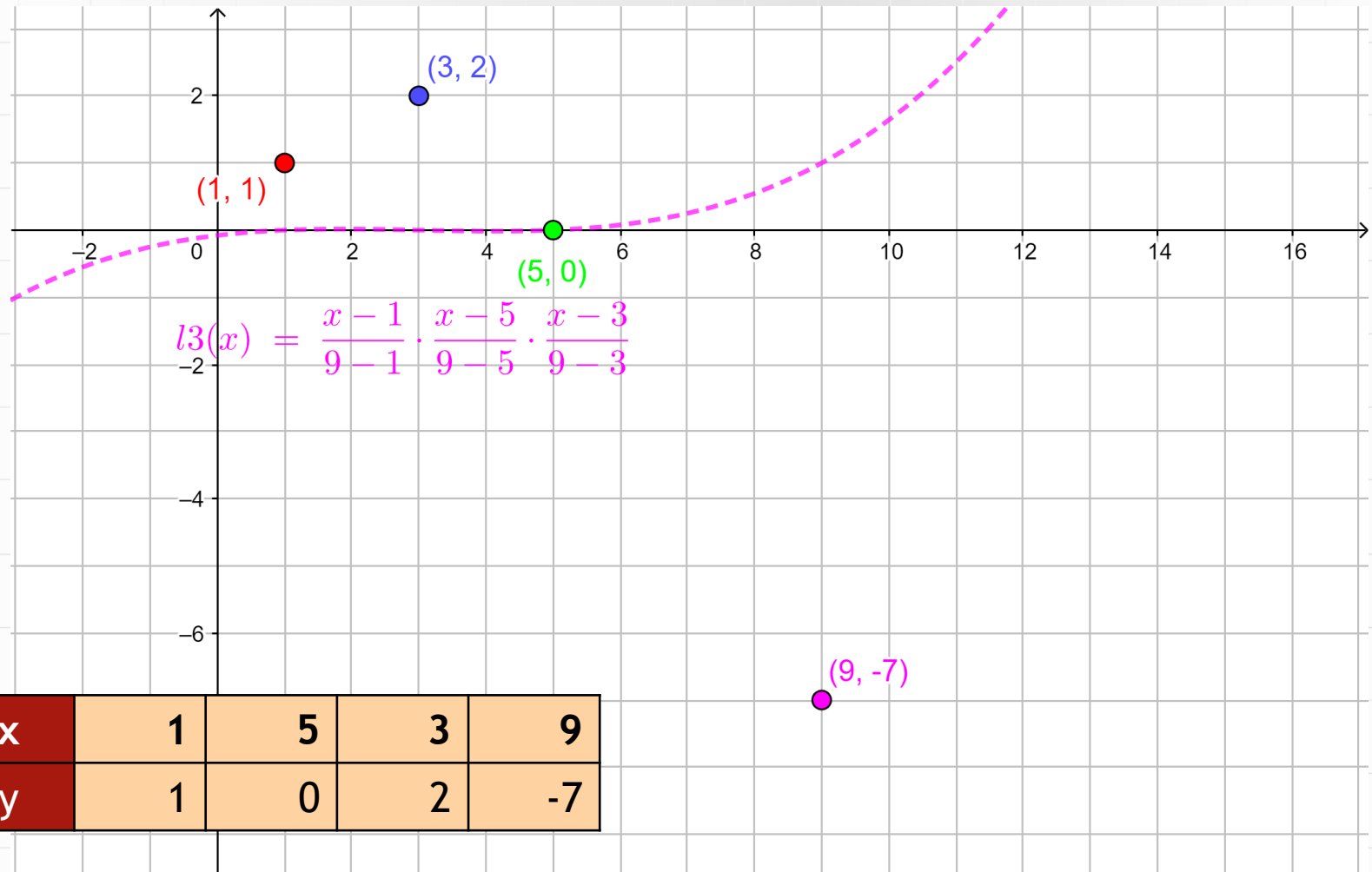
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



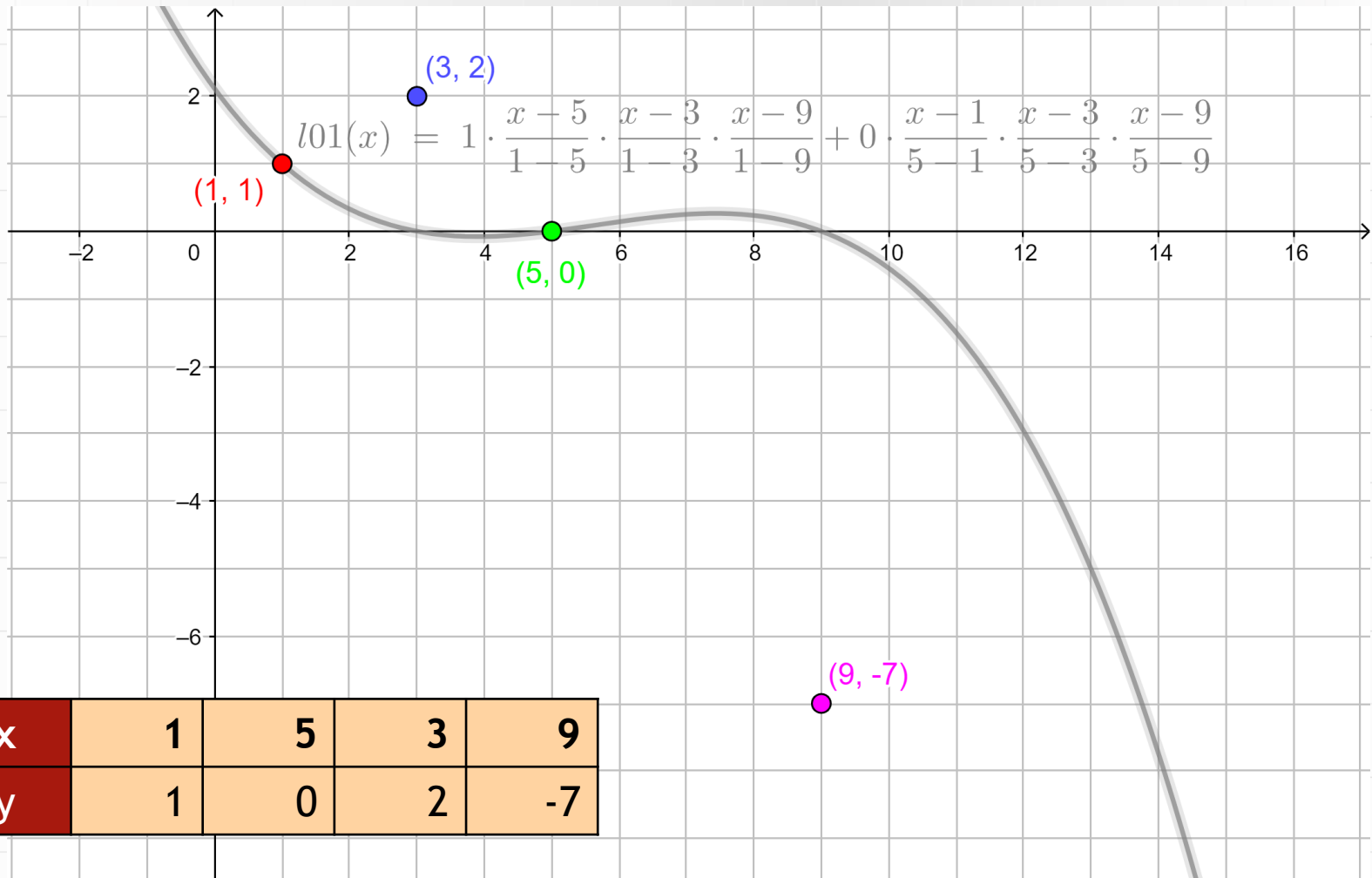
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



Wzór interpolacyjny Lagrange'a

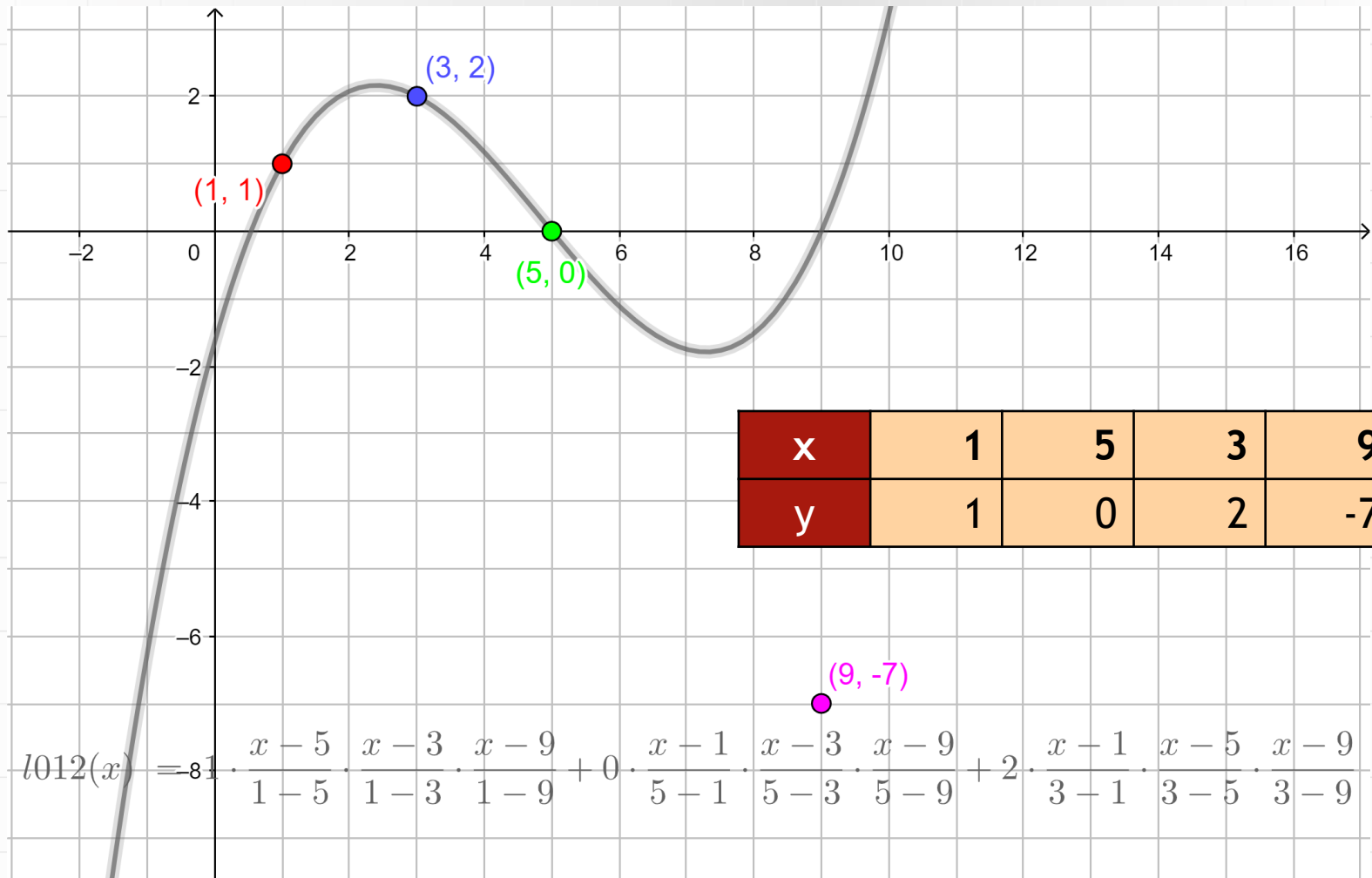


Wzór interpolacyjny Lagrange'a

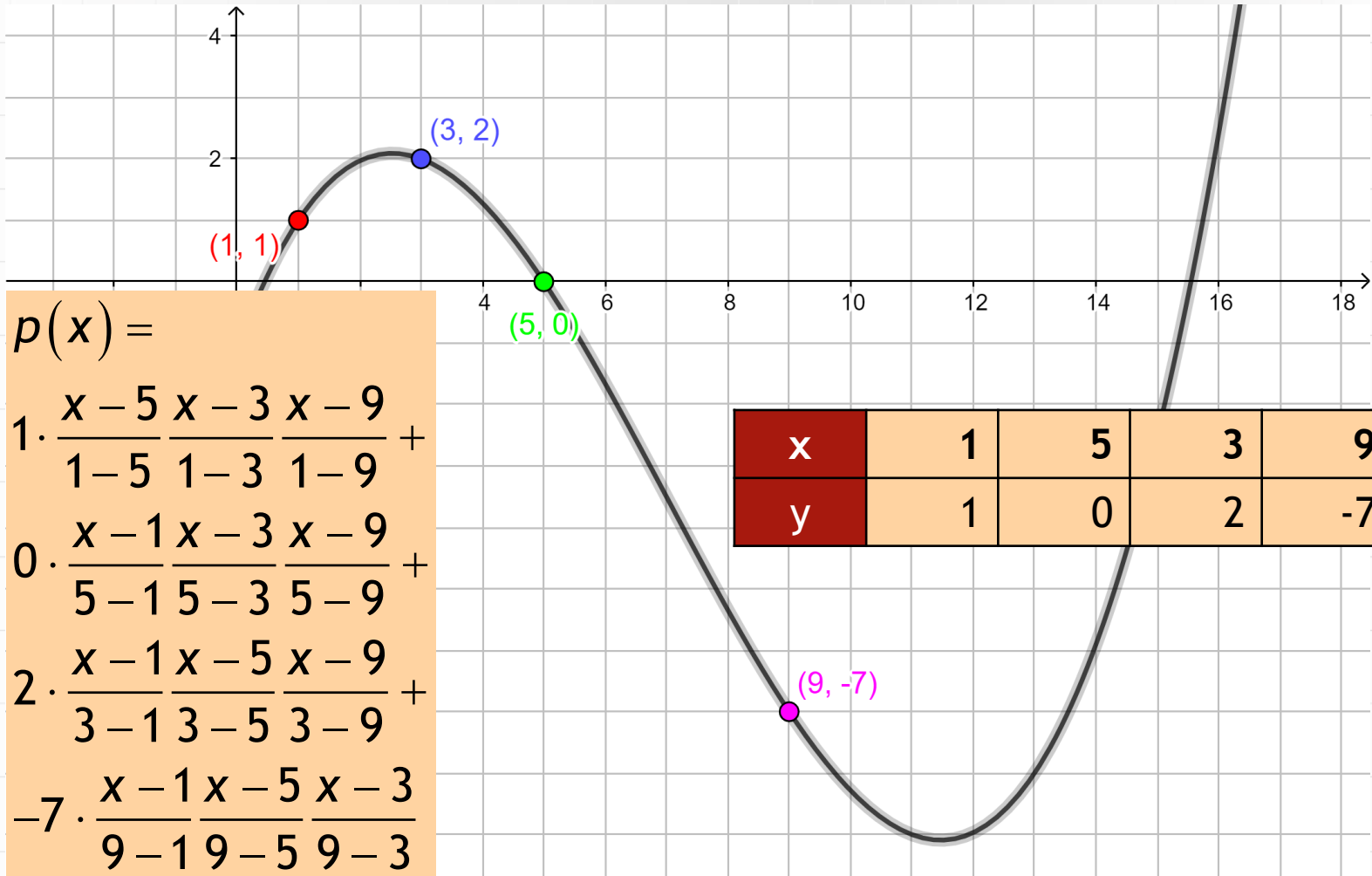


x	1	5	3	9
y	1	0	2	-7

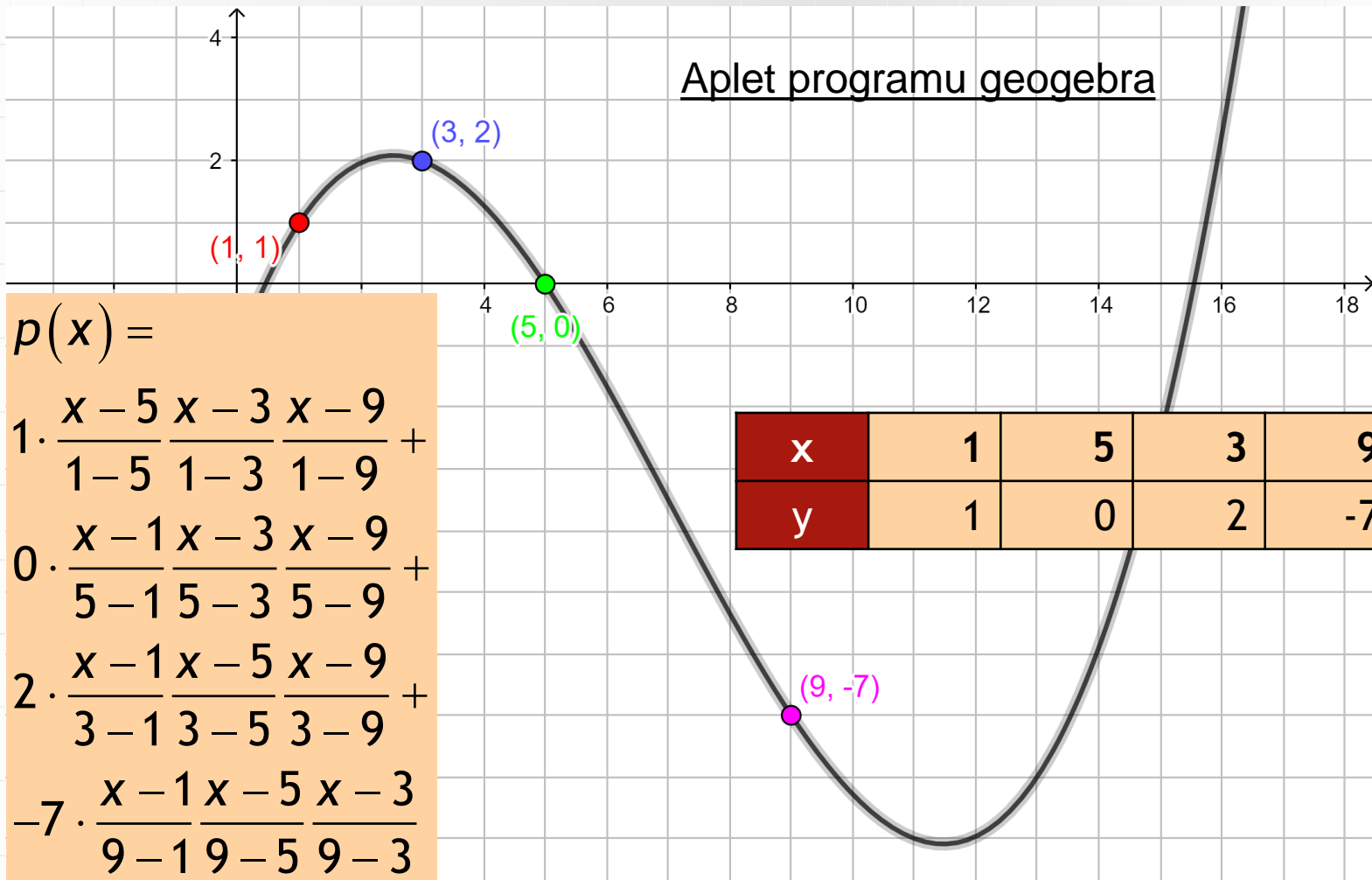
Wzór interpolacyjny Lagrange'a



Wzór interpolacyjny Lagrange'a



Wzór interpolacyjny Lagrange'a



Wzór interpolacyjny Lagrange'a

$$l_i(x) = c(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

$$l_i(x) = 1$$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad (0 \leq i \leq n)$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^n y_k l_k(x)$$



Iloraz różnicowy

Wielomian $p(x)$ klasy Π_n spełniający dla danej funkcji f warunki interpolacyjne

$$p(x_i) = f(x_i)$$

można wyrazić za pomocą wzoru Newtona:

$$p(x) = \sum_{k=0}^n c_k \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j).$$

Współczynniki c_k zależą tylko od węzłów x_0, x_1, \dots, x_k i wartości funkcji w tych węzłach.

$$c_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]$$

Jest to iloraz różnicowy rzędu k .



Iloraz różnicowy

- iloraz różnicowy rzędu zerowego

$$f[x_0] = f(x_0)$$

- iloraz różnicowy rzędu pierwszego

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$



Iloraz różnicowy

- ilorazy różnicowe spełniają zależność

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \dots, x_k] - f[x_0, x_1, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3]$		
x_3	$f[x_3]$			



Wzór interpolacyjny Newtona Iloraz różnicowy

1	1	-1/4	-3/8	1/32
5	0	-1	-1/8	
3	2	-3/2		
9	-7			

$$p_3(x) = 1 - \frac{1}{4}(x-1) - \frac{3}{8}(x-1)(x-5) + \frac{1}{32}(x-1)(x-5)(x-3)$$



Interpolacja wielomianowa

Ważne zagadnienia

- Dokładność interpolacji
- Wybór węzłów interpolacji
- Zbieżność wielomianów interpolacyjnych



Interpolacja Hermite'a

Uogólnienie interpolacji Newtona

Interpolacja Hermite'a, czyli interpolacja z węzłami wielokrotnymi. Szukamy wielomianu, który w węzłach ma dane nie tylko wartości, ale i pochodne.

Interpolacja Hermite'a

Przykład

Szukamy wielomianu p klasy Π_2 takiego, że

- $p(x_0) = c_{00}$, $p'(x_0) = c_{01}$, $p(x_1) = c_{10}$.
- Tablica ilorazów różnicowych ma wtedy postać:

x_0	c_{00}	c_{01}	c_{02}
x_0	c_{00}	c_{11}	
x_1	c_{10}		

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[x_0, x] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2$$

Interpolacja Hermite'a

Przykład 2

$$p(1) = 2, p'(1) = 3, p(2) = 6, p'(2) = 7, p''(2) = 8$$

$$f[x_0, x_0, \dots, x_0] = \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

1	2	3	1	2	-1
1	2	4	3	1	
2	6	7	4		
2	6	7			
2	6				

$$p(x) = 2 + 3(x - 1) + (x - 1)^2 + 2(x - 1)^2(x - 2) - 1(x - 1)^2(x - 2)^2$$



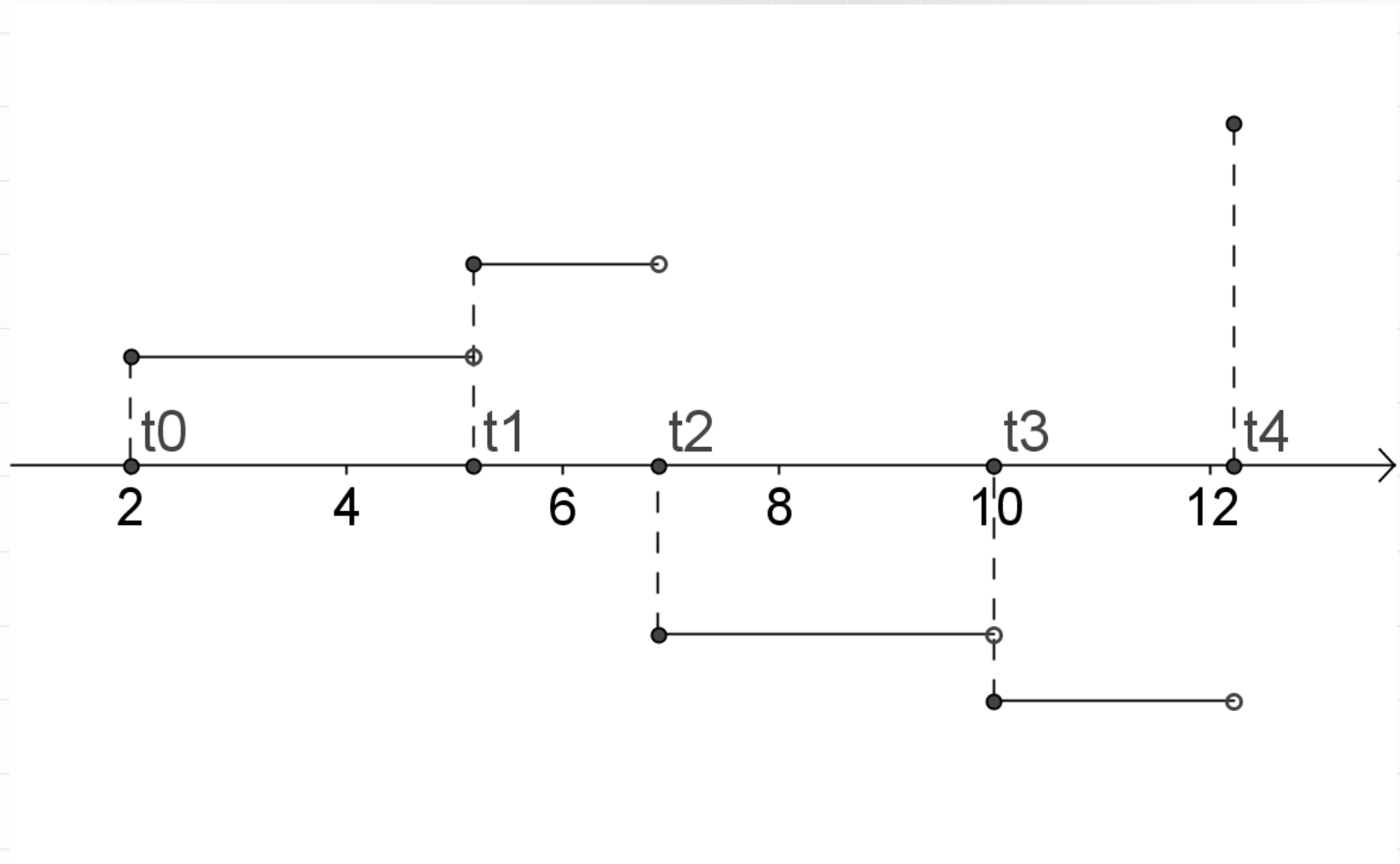
Interpolujące funkcje sklejjane

Zadanie. Mamy $n+1$ węzłów t_0, t_1, \dots, t_n takich, że $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ i znamy wartości w tych węzłach. Szukamy funkcji S , która:

- W każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1})$ ($0 \leq i \leq n - 1$) jest wielomianem klasy Π_k .
- Ma ciągłą $(k-1)$ -szą pochodną w przedziale $[t_0, t_n]$.
- Funkcję S nazywamy funkcją sklejjaną stopnia k .

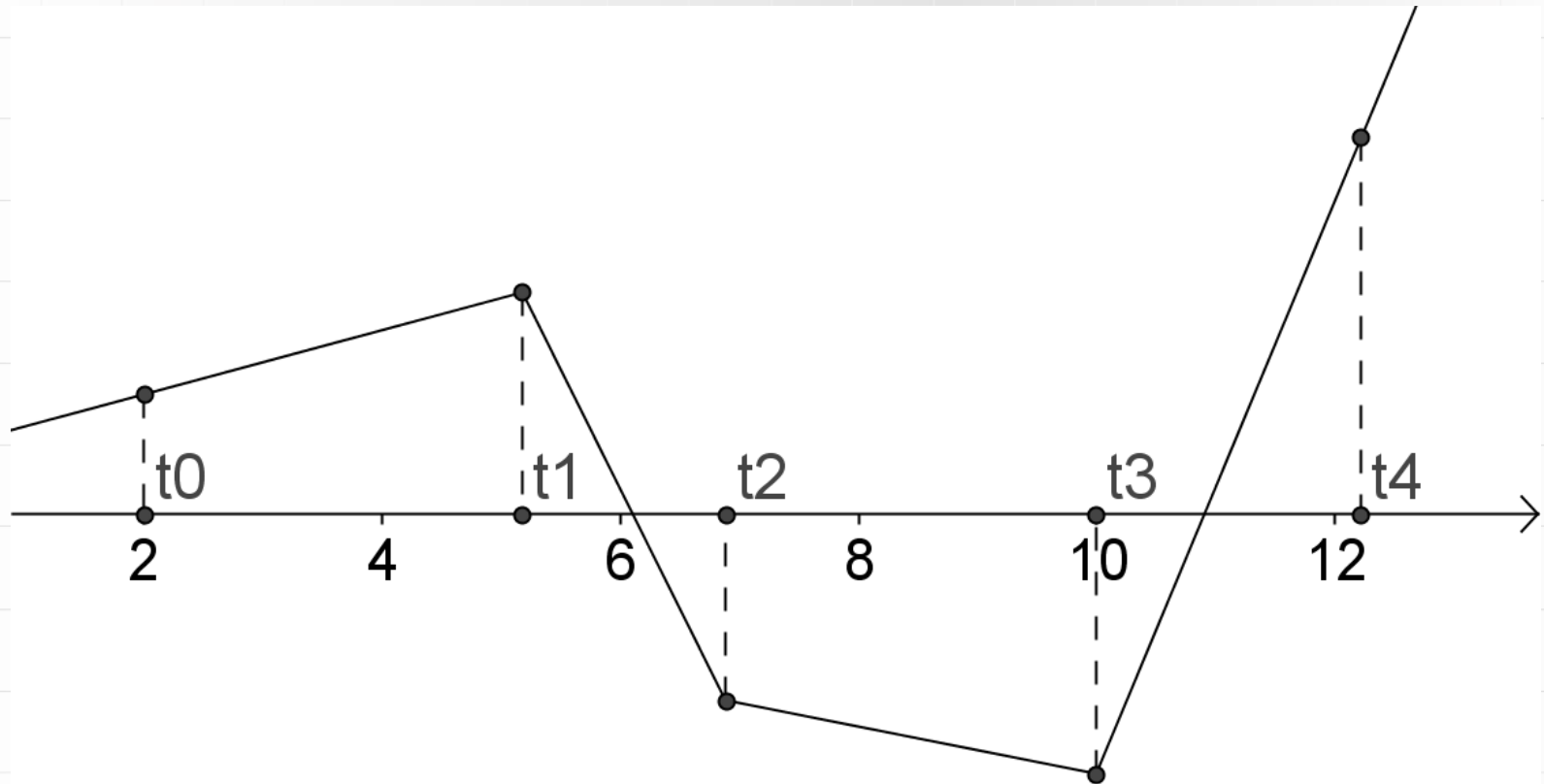
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 0



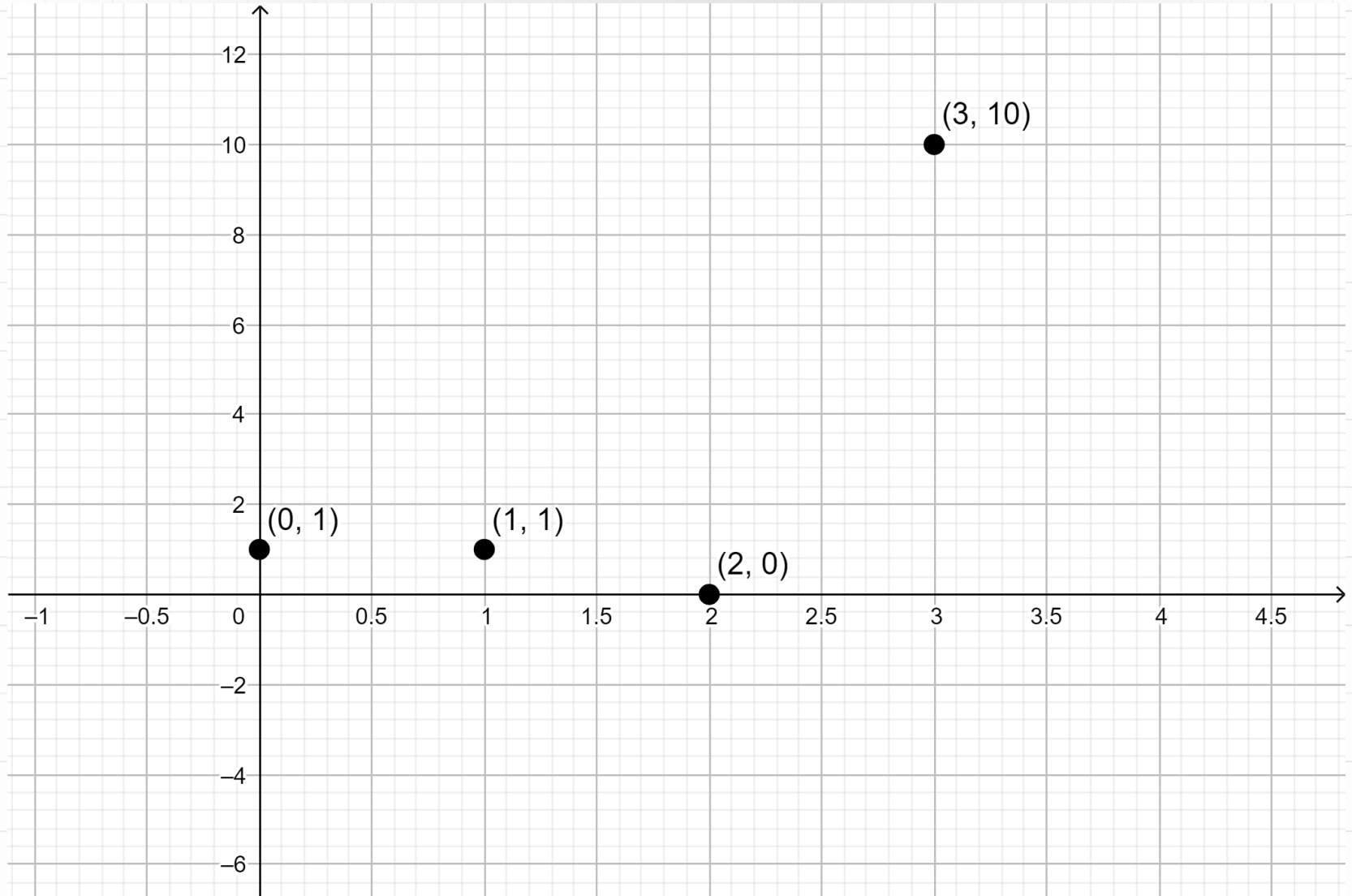
Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 1



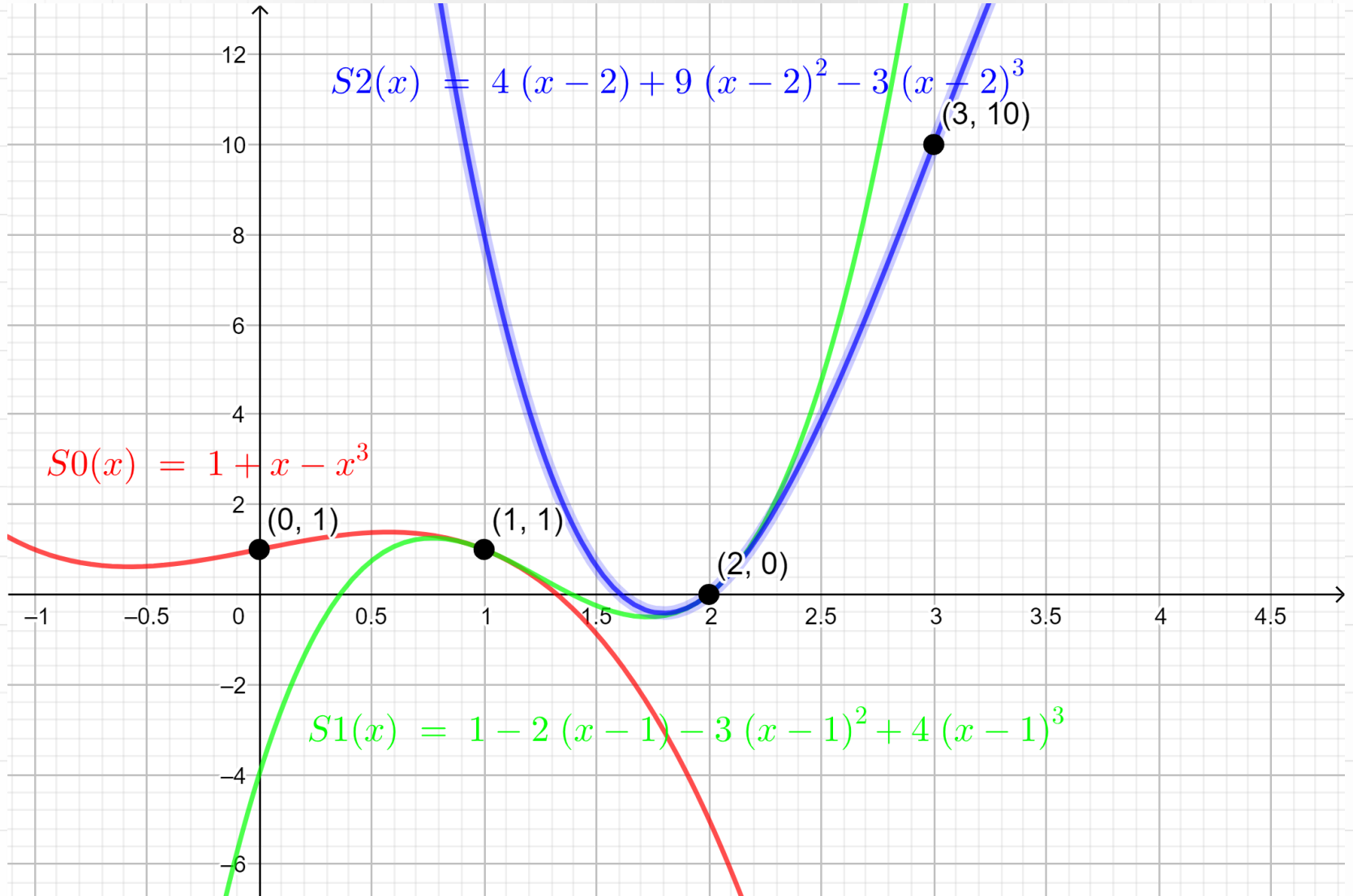
Interpolujące funkcje sklejjane

Funkcja sklejjana stopnia 3



Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3





Interpolujące funkcje sklejjane

Funkcja sklejjana stopnia 3

Szukamy takiej funkcji S , która:

- w danych węzłach t_i (dla $i = 0, 1, \dots, n$)
- ma dane wartości y_i ,
- w każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1})$ jest wielomianem S_i (dla $i = 0, 1, \dots, n - 1$) klasy Π_3 .

Wszystkie wielomiany mają łącznie $4n$ współczynników

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$$



Interpolujące funkcje sklejjane

Funkcja sklejjana stopnia 3

Wszystkie wielomiany mają łącznie $4n$ współczynników.

Warunki na współczynniki wynikają z:

- n warunków $S_i(t_i) = y_i$ ($i = 0, \dots, n-1$)
- n warunków $S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$ ($i = 0, \dots, n-1$)
- ciągłość pochodnej S' daje jeden warunek $S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i)$ ($i = 1, \dots, n-1$) w każdym węźle wewnętrznym (łącznie $n-1$)
- ciągłość drugiej pochodnej S'' daje $n-1$ warunków.

W sumie mamy $4n-2$ równań.



Interpolujące funkcje sklejjane

Funkcja sklejjana stopnia 3

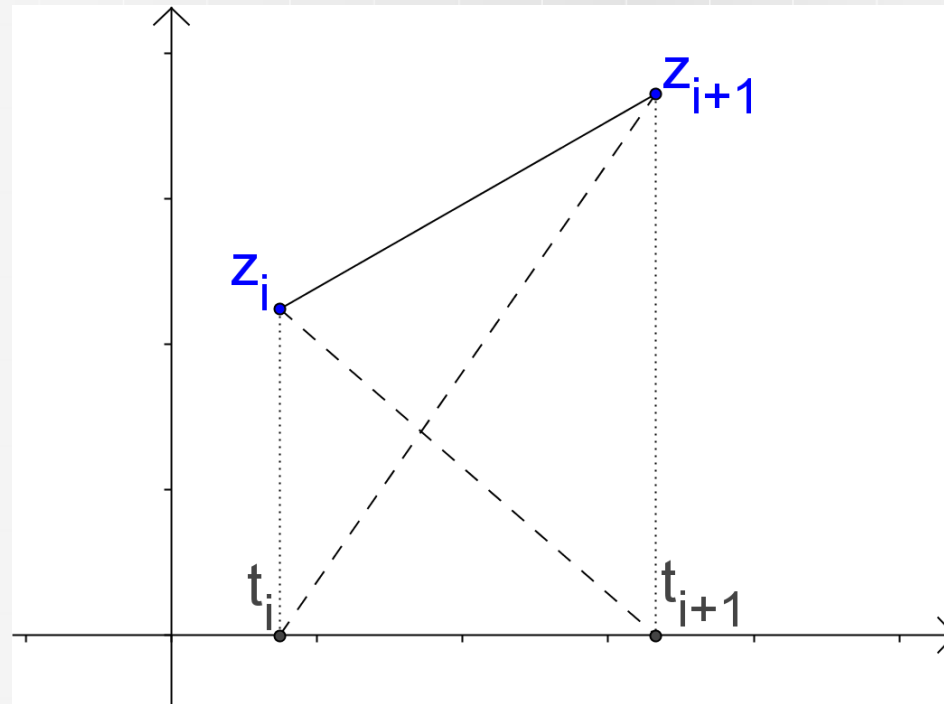
- $S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i$
- $S'_i(x) = 3a_i x^2 + 2b_i x + c_i$
- $S''_i(x) = 6a_i x + 2b_i$
- $S'''_i(x) = 6a_i$

- funkcja $S''_i(x)$ jest liniowa
- wykorzystując pomocnicze wielkości $z_i = S''_i(t_i)$

Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

$$S''_i(x) = \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - t_i) + \frac{z_i}{h_i}(t_{i+1} - x)$$



$$h_i = t_{i+1} - t_i$$



Interpolujące funkcje sklejjane

Funkcja sklejjana stopnia 3

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + C(x - t_i) + D(t_{i+1} - x)$$

Stałe całkowania C i D można wyznaczyć z warunków

$$S_i(t_i) = y_i \quad S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 + \frac{z_i}{6h_i}(t_{i+1} - x)^3 + \\ + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) (x - t_i) + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right) (t_{i+1} - x)$$



Interpolujące funkcje sklejane

Funkcja sklejana stopnia 3

Aby wyznaczyć wielkości z_i korzystamy z warunków

$$S'_{i-1}(t_i) = S'_i(t_i) \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

$$S'_i(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i} (x - t_i)^2 + \frac{z_i}{2h_i} (t_{i+1} - x)^2 + \\ + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right)$$



Interpolujące funkcje sklejjane

Funkcja sklejjana stopnia 3

$$S_i'(x) = \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 - \frac{z_i}{2h_i}(t_{i+1} - x)^2 +$$

$$+ \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{z_{i+1}h_i}{6} \right) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{z_i h_i}{6} \right)$$

$$S_i'(t_i) = -\frac{h_i}{3}z_i - \frac{h_i}{6}z_{i+1} - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

$$S_i'(t_{i+1}) = \frac{h_i}{3}z_{i+1} + \frac{h_i}{6}z_i - \frac{y_i}{h_i} + \frac{y_{i+1}}{h_i}$$

$$S_{i-1}'(t_i) = \frac{h_{i-1}}{3}z_i + \frac{h_{i-1}}{6}z_{i-1} - \frac{y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{y_i}{h_{i-1}}$$



Interpolujące funkcje sklejjane

Funkcja sklejjana stopnia 3

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i)z_i - \frac{6}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1})z_i$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & h_{n-3} & u_{n-2} & h_{n-2} & \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-2} \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$z_0 = 0, \quad z_n = 0$

$$u_i = 2(h_{i-1} + h_i), \quad b_i = \frac{6}{h_i}(y_{i+1} - y_i), \quad v_i = b_i - b_{i-1}$$



Interpolujące funkcje sklejjane

Funkcja sklejjana stopnia 3

$$S_i(x) = y_i + (x - t_i) \left(C_i + (x - t_i) (B_i + (x - t_i) A_i) \right)$$

$$A_i = \frac{1}{6h_i} (z_{i+1} - z_i)$$

$$B_i = \frac{z_i}{2}$$

$$C_i = -\frac{h_i}{6} (z_{i+1} + 2z_i) + \frac{1}{h_i} (y_{i+1} - y_i)$$



Podsumowanie (1)

- Wielomian interpolujący
 - jednoznaczność
 - istnienie
- Wzór interpolacyjny Newtona
 - przykład konstrukcji
- Wzór interpolacyjny Lagrange'a
 - przykład konstrukcji
 - wzór ogólny



Podsumowanie (2)

- Ilorazy różnicowe
 - wzór ogólny interpolacji Newtona
- Interpolacja Hermite'a
 - uogólnienie interpolacji Newtona
- Interpolacja funkcjami sklejanymi
 - wyznaczanie współczynników wielomianów