Politechnika Wrocławska

Metody numeryczne w fizyce

FZP002934wcL

rok akademicki 2020/21

semestr letni

Wykład 4

Karol Tarnowski

karol.tarnowski@pwr.edu.pl

L-1 p. 220

Plan wykładu

- Normy wektorów i macierzy
- Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych
  - Metoda Richardsona
  - Metoda Jacobiego

Na podstawie:

- D. Kincaid, W. Cheney, *Analiza numeryczna*

Normy wektorów i macierzy

Normy wektorów

W przestrzeni wektorowej V norma jest funkcją $\| \ \|$ określoną na V, o wartościach rzeczywistych nieujemnych, która ma trzy własności:

$$
\begin{aligned}
&\|x\| > 0 && \text{dla } x \neq 0,\ x \in V,\\
&\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| && \text{dla } \lambda \in R,\ x \in V,\\
&\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| && \text{dla } x, y \in V.
\end{aligned}
$$

Normy wektorów i macierzy

Normy wektorów

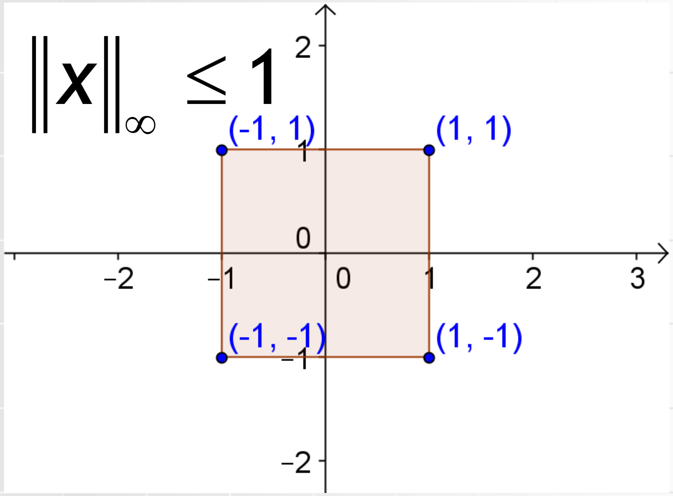
- norma euklidesowa (norma l_2) $$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$
- norma l_∞ $$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|,$$
- norma l_1 $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

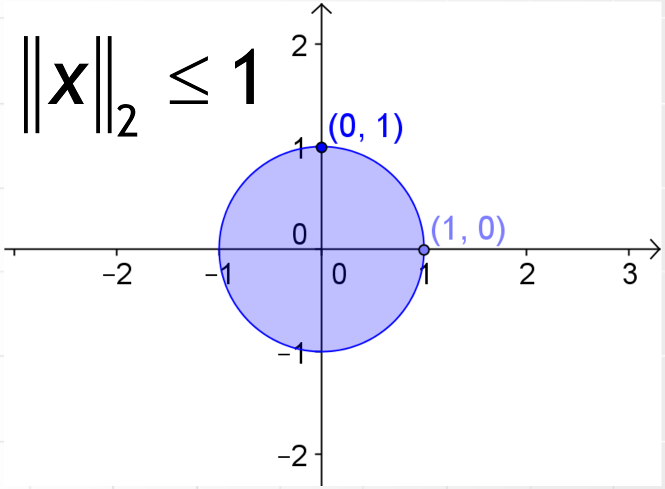
Politechnika Wrocławska

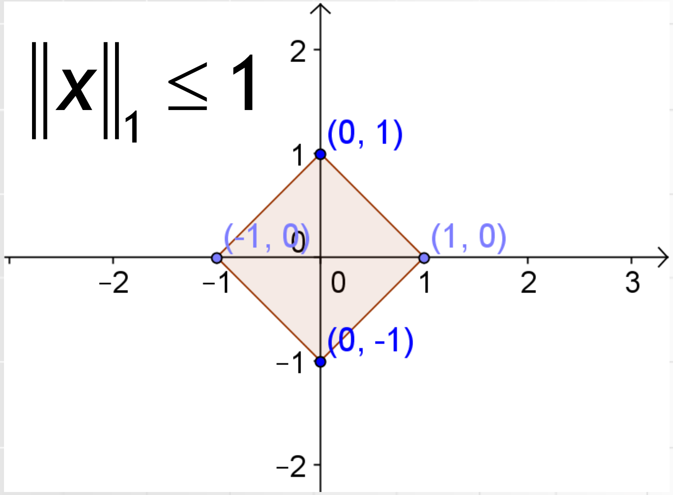
Normy wektorów i macierzy

Normy wektorów

$$\left\{ x : x \in R^2, \|x\| \le 1 \right\}$$







Normy wektorów i macierzy

Normy macierzy

- Dla ustalonej normy $\| \ \|$ wektora indukowana przez nią norma macierzy kwadratowej A stopnia n jest określona wzorem:

$$\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \left\{ \|Au\| : u \in R^n \right\}$$

Metody iteracyjne

Przykład

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 7x_1 &= 6x_2 + 3 \\ 9x_2 &= 8x_1 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{6}{7} x_2^{(k-1)} + \frac{3}{7} \\ x_2^{(k)} &= \frac{8}{9} x_1^{(k-1)} - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

metoda Jacobiego

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{6}{7} x_2^{(k-1)} + \frac{3}{7} \\ x_2^{(k)} &= \frac{8}{9} x_1^{(k)} - \frac{4}{9} \end{aligned}$$

metoda Gaussa-Seidela

Metody iteracyjne

Przykład

metoda Jacobiego

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0,00000	0,00000
10	0,14865	-0,19820
20	0,18682	-0,24909
30	0,19662	-0,26215
40	0,19913	-0,26551
50	0,19978	-0,26637

metoda Gaussa-Seidela

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
0	0,00000	0,00000
10	0,21978	-0,24909
20	0,20130	-0,26551
30	0,20009	-0,26659
40	0,20001	-0,26666
50	0,20000	-0,26667

$$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = -\frac{4}{15}$$

Metody iteracyjne

Ogólna metoda iteracyjna

- Układ równań $Ax = b$ można wyrazić w równoważnej postaci

$$Qx = (Q - A)x + b$$

- Sugeruje to proces iteracyjny

$$Qx^{(k)} = (Q - A)x^{(k-1)} + b$$

- W procesie generowany jest ciąg $\left\{x^{(k)}\right\}$

Metody iteracyjne

Ogólna metoda iteracyjna

- Zakładając nieosobliwość Q

$$x^{(k)} = \left(I - Q^{-1}A\right)x^{(k-1)} + Q^{-1}b$$

- Rozwiązanie dokładne spełnia równanie

$$x = \left(I - Q^{-1}A\right)x + Q^{-1}b$$

- Po odjęciu stronami

$$x^{(k)} - x = \left(I - Q^{-1}A\right)\left(x^{(k-1)} - x\right)$$

Metody iteracyjne

Ogólna metoda iteracyjna

- Dla dowolnej normy wektorowej i indukowanej nią normy macierzowej

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \le \left\| I - Q^{-1}A \right\| \left\| x^{(k-1)} - x \right\|$$

$$\left\| x^{(k)} - x \right\| \le \left\| I - Q^{-1}A \right\|^{k} \left\| x^{(0)} - x \right\|$$

- Jeśli $\left\| I - Q^{-1}A \right\| < 1$ to $\lim_{k\to\infty} \left\| x^{(k)} - x \right\| = 0$.

Metody iteracyjne
Metoda Richardsona

- W metodzie Richardsona $Q = I$, co daje

$$x^{(k)} = (I - A)\,x^{(k-1)} + b$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} + r^{(k-1)}$$

$$r^{(k-1)} = b - Ax^{(k-1)}$$

- Metoda jest zbieżna dla macierzy, dla których

$$\|I - A\| < 1$$

Metody iteracyjne

Metoda Jacobiego

- W metodzie Jacobiego Q jest macierzą przekątniową taką, że $q_{ii} = a_{ii}$.

- Metoda jest zbieżna dla macierzy dominujących przekątniowo

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Podsumowanie

- Normy wektorów i macierzy
  - normy wektorowe l_1, l_2, l_∞
  - normy macierzy indukowane normami wektorowymi
- Metody iteracyjne rozwiązywania układów równań liniowych
  - metoda Richardsona ($Q = I$)
  - metoda Jacobiego (Q - macierz zawierająca przekątną macierzy A)