

PRACA DYPLOMOWA MAGISTERSKA

Analiza numeryczna rozkładu i propagacji
pola elektromagnetycznego
w metamateriałach metodą FDTD

Karol Lech Tarnowski

Opiekun: dr hab. inż. Włodzimierz Salejda, prof. PWr

słowa kluczowe:
metamateriały, FDTD, ujemne załamane,
ujemny współczynnik załamania światła,
równania Maxwella,
propagacja światła spolaryzowanego

krótkie streszczenie:

W pracy przedstawiono podstawowe informacje o metamateriałach, podsumowanie dotychczasowych osiągnięć autora dotyczących metamateriałów oraz metodę FDTD. Pracę zamyka przedstawienie wyników symulacji oraz wyciągniętych na ich podstawie wniosków.

Rodzicom i Bratu

*z podziękowaniem za opiekę dla
dra hab. inż. Włodzimierza Salejdy, profesora PWr*

Spis treści

1. Wstęp	7
1.1. Cel pracy	7
2. Metamateriały	8
2.1. Definicja	8
2.2. Ośrodki z ujemnym współczynnikiem załamania	8
2.2.1. Równania Maxwella	8
2.2.2. Równania materiałowe	9
2.2.3. Współczynnik załamania	9
2.2.4. Odkrywca i prekursorzy	10
2.3. Fale elektromagnetyczne	11
2.3.1. Warunki ciągłości	11
2.3.2. Prawo Snelliusa	11
2.3.3. Współczynniki Fresnela	12
2.4. Potwierdzenie eksperymentalne	14
2.4.1. Ujemna przenikalność elektryczna	14
2.4.2. Ujemna przenikalność magnetyczna	15
2.4.3. Ujemny współczynnik załamania	16
2.5. Zastosowania	17
2.5.1. Idealna soczewka	17
2.5.2. Niewidzialne okrycie	17
2.6. Terminologia	19
3. Transmisja światła przez supersieci optyczne	21
3.1. Supersieci aperiodyczne	21
3.2. Formalizm macierzy przejścia	22
3.3. Wybrane wyniki	23
4. Metoda FDTD	26
4.1. Algorytm Yee	26
4.1.1. Równania Maxwella	27
4.1.2. Siatka Yee i dyskretyzacja pochodnej	28
4.1.3. Charakterystyka metody	33
4.1.4. Dyspersja numeryczna	34
4.2. Źródła promieniowania	37
4.2.1. Źródła twarde	37
4.2.2. Źródła miękkie	38
4.3. Warunki brzegowe	38
4.3.1. Warstwy idealnie dopasowane	39

4.4.	Dyspersja	41
4.4.1.	Modele	41
4.4.2.	Pomocnicze równania różniczkowe	42
5.	Wybrane wyniki modelowania numerycznego	44
5.1.	Wyniki modelowania jednowymiarowego	44
5.1.1.	Odbicie impulsu	46
5.1.2.	Propagacja fali	46
5.1.3.	Wektor Poyntinga	48
5.1.4.	Prędkość grupowa	51
5.1.5.	Ujemna prędkość fazowa	52
5.1.6.	Podsumowanie	52
5.2.	Wyniki modelowania dwuwymiarowego	53
5.2.1.	Idealna soczewka	53
5.2.2.	Metamateriał o dużej wartości bezwzględnej współczynnika załamania	57
5.2.3.	Metamateriał o małej wartości bezwzględnej współczynnika załamania	60
5.2.4.	Podsumowanie	62
6.	Podsumowanie	63

Rozdział 1.

Wstęp

Sztucznie projektowane metamateriały wykazują niezwykle właściwości elektromagnetyczne. W szczególności umożliwiają tworzenie materiałów o ujemnej wartości współczynnika załamania i stwarzają zupełnie nowe perspektywy operowania promieniowaniem elektromagnetycznym [1].

Metamateriały o ujemnym współczynniku załamania, mogą przyczynić się do stworzenia supersoczewek zdolnych do obrazowania obiektów z precyzją większą niż długość fali. Innymi zastosowaniami mogą być anteny o polepszonych właściwościach, optyczna nanolitografia oraz niewidzialne okrycia.

Przedrostek *meta-*, który został wykorzystany do stworzenia słowa *metamateriał*, pochodzi z języka greckiego i oznacza coś *ponad*. Zatem *metamateriały*, to *ponad-materiały* wykazujące nowe, nie występujące w naturze właściwości.

Możliwość ujemnego załamania światła została przewidziana przez Wiesielago [2], lecz dopiero przełom XX i XXI wieku przyniósł wyteżone prace mające na celu teoretyczne i eksperymentalne potwierdzenie lub obalenie tezy Wiesielago. Byliśmy, i w dalszym ciągu jesteśmy, świadkami „przepisywania” dziewiętnastowiecznych równań elektromagnetyzmu.

Jednym z narzędzi pomocnych przy teoretycznych rozważaniach dotyczących metamateriałów są symulacje komputerowe, a wśród nich metoda przyrostów skończonych FDTD (Finite-Differences Time-Domain).

1.1. Cel pracy

Celem pracy było zbadanie właściwości przestrzennego rozkładu pola magnetycznego i elektrycznego fali elektromagnetycznej (FEM) propagującej w metamateriałach oraz transmisji światła spolaryzowanego przez struktury wielowarstwowe zawierające metamateriały.

Podstawy teoretyczne [3, 4] dotyczące metamateriałów przedstawiono w Rozdziale 2. Kolejny rozdział zawiera podsumowanie dotychczasowych osiągnięć autora z zakresu badania właściwości propagacji światła w strukturach zawierających metamateriały. Metoda przyrostów skończonych, która w ramach wykonywania pracy została zaimplementowana, ze wszystkimi omowionymi elementami została opisana w Rozdziale 4. Pracę zamyka przedstawienie wyników symulacji oraz wyciągniętych na ich podstawie wniosków (Rozdział 5.).

Rozdział 2.

Metamateriały

Niniejszy rozdział zawiera podstawowe informacje o metamateriałach wykazujących zjawisko ujemnego załamania światła i został przygotowany w oparciu o monografię [3, 4].

2.1. Definicja

Metamateriałami, w najszerszym znaczeniu tego słowa, nazywa się wytworzone przez człowieka, efektywnie jednorodne materiały, które wykazują nietrywialne właściwości w oddziaływaniu z polem elektromagnetycznym.

Materiał można uważać za jednorodny, gdy zjawiska załamania światła przeważają nad rozproszeniem i dyfrakcją na elementach struktury. Warunek ten jest spełniony, gdy długość fali elektromagnetycznej (FEM) oddziałującej z metamateriałem (λ) jest znacząco większa od wymiarów charakteryzujących strukturę (d). Jako praktyczną regułę („rule of thumb”) podaje się warunek $d < \lambda/4$, wtedy to fala elektromagnetyczna „nie zauważa” szczegółów struktury, co pozwala traktować ją jako jednorodny materiał.

Dla przedziału widma promieniowania elektromagnetycznego, dla którego długość fali spełnia podany warunek można wprowadzić efektywne przenikalności, elektryczną (ϵ) i magnetyczną (μ), których wartości zależą od struktury materiału.

2.2. Ośrodki z ujemnym współczynnikiem załamania

Możliwość przyjmowania ujemnych wartości przez współczynnik załamania jest konsekwencją równań Maxwella [2].

2.2.1. Równania Maxwella

Zjawiska klasycznej elektrodynamiki ujmują równania Maxwella [3, 5–8]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} - \vec{K}, \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \nabla \times \vec{H} - \vec{J}, \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho_e, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= \rho_m,\end{aligned}\tag{2.1}$$

gdzie:

- \vec{E} – natężenie pola elektrycznego [V/m],
- \vec{D} – indukcja elektryczna [C/m²],
- \vec{H} – natężenie pola magnetycznego [A/m],
- \vec{B} – indukcja magnetyczna [Wb/m²],
- \vec{J} – gęstość strumienia elektrycznego [A/m²],
- \vec{K} – gęstość strumienia magnetycznego [V/m²],
- ρ_e – gęstość ładunku elektrycznego [C/m³],
- ρ_m – gęstość ładunku magnetycznego [Wb/m³].

Gęstość strumienia magnetycznego i gęstość ładunku magnetycznego, to wielkości pomocnicze, które wprowadza się dla pełnej symetrii równań.

2.2.2. Równania materiałowe

Związki między wektorami indukcji, a odpowiednimi składowymi pola nazywane są równaniami materiałowymi¹

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}, \\ \vec{B} &= \mu_r \mu_0 \vec{H},\end{aligned}\tag{2.2}$$

gdzie:

- $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ [F/m] – przenikalność elektryczna próżni,
- ε_r – względna przenikalność elektryczna ośrodka,
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m] – przenikalność magnetyczna próżni,
- μ_r – względna przenikalność magnetyczna ośrodka.

2.2.3. Współczynnik załamania

Współczynnik załamania spełnia następującą relację:

$$n^2 = \varepsilon_r \mu_r,\tag{2.3}$$

zatem jego wartość określona jest przez równanie

$$n = \pm \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}.\tag{2.4}$$

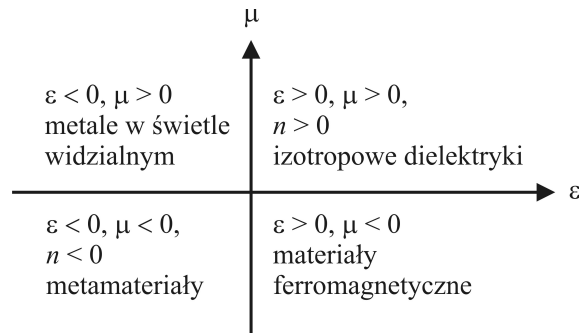
Podstawiając do równań Maxwella (2.1) falę płaską postaci:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right], \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_0 \exp \left[i \left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} \right) \right],\end{aligned}\tag{2.5}$$

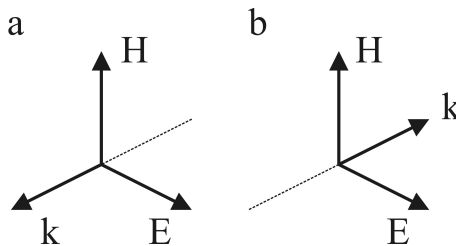
o wektorze falowym $\vec{k} = \frac{n\omega}{c} \hat{k}$, otrzymujemy następujące zależności:

$$\begin{aligned}\frac{n}{\mu_r \mu_0 c} \hat{k} \times \vec{E} &= \vec{H}, \\ \frac{n}{\varepsilon_r \varepsilon_0 c} \hat{k} \times \vec{H} &= -\vec{E},\end{aligned}\tag{2.6}$$

¹Równania te są prawdziwe dla ośrodków jednorodnych i niedyspersyjnych.



Rysunek 2.1. Współczynnik załamania w zależności od przenikalności elektrycznej i magnetycznej



Rysunek 2.2. Wzajemne ułożenie wektorów \vec{k} , \vec{E} , \vec{H} ; a – w ośrodku o dodatnim współczynniku załamania; b – w ośrodku o ujemnym współczynniku załamania

Wynika z nich, że propagacja FEM jest możliwa gdy spełnione są następujące warunki:

- $\varepsilon_r > 0 \wedge \mu_r > 0 \Rightarrow n > 0$,
- $\varepsilon_r < 0 \wedge \mu_r < 0 \Rightarrow n < 0$.

W pozostałych dwu, gdy znaki przenikalności są przeciwne, propagacja fali nie jest możliwa. Rysunek 2.1. przedstawia wszystkie cztery warianty przyjmowania znaków przez parę (ε_r, μ_r) .

Konsekwencjami posiadania przez materiał ujemnej wartości współczynnika załamania są, między innymi, ujemne załamanie światła oraz ujemna wartość prędkości fazowej FEM rozchodzącej się w tym ośrodku. Wektory \vec{k} , \vec{E} , \vec{H} tworzą w ośrodkach o ujemnym współczynniku załamania trójkę lewoskrętną, w odróżnieniu od trójki prawoskrętnej dla „tradycyjnych” ośrodków. Obie sytuacje przedstawione są na Rysunku 2.2.

2.2.4. Odkrywca i prekursorzy

Pierwszymi systematycznymi badaniami teoretycznymi nad metamateriałami były dokonania Wiktora Wiesielago. W roku 1967 rozważał on w artykule [2] istnienie „materiałów z jednocześnie ujemnymi wartościami ε i μ ”. Tamże, zaproponował nazywanie takich materiałów ośrodkami lewoskrętnymi, ze względu na lewoskrętność trójki wektorów \vec{k} , \vec{E} , \vec{H} (patrz Rysunek 2.2.).

Wiesielago przewidział, między innymi, następujące zjawiska związane z metamateriałami:

1. Silną dyspersję.
2. Ujemne załamanie światła.
3. Odwzorowanie punktowego źródła, w punktowy obraz przez metamateriałową płytkę płasko-równoległą.

Wiesielago nie był jednak pierwszym, który rozważał istnienie ujemnego załamania.

W artykule [9], Tretyakov wymienia odnalezione wzmianki wiążące się z metamateriałmi.

Wśród wspomnianych znajdują się prace Mandelshtama z 1944 i 1945 roku, Sivukina z 1957, Silina z 1959, a nawet Lamba z 1904, gdzie rozważa on fikcyjne jednowymiarowe struktury, w których fala propaguje się z ujemną prędkością fazową.

Podobnie przedstawia się historia wykonania metamateriału. Struktury o ujemnej przenikalności elektrycznej oraz inne, wykazujące ujemną przenikalność magnetyczną były znane na długo przed systematycznymi badaniami Pendry'ego [10,11]. Ich połączenie dało strukturę o ujemnym współczynniku załamania [12,13].

2.3. Fale elektromagnetyczne w metamateriałach

2.3.1. Warunki ciągłości

Równania Maxwella (2.1), które są podstawowymi równaniami elektromagnetyzmu, leżą u początku wszelkich bardziej specyficznych rozważań w tej dziedzinie. Także warunki ciągłości pól na granicy ośrodków wyprowadza się z tych zależności. Dodatkowe założenie, że jednym z ośrodków jest metamateriał, nie wpływa na wyprowadzenie warunków ciągłości, zatem także w tym wypadku spełnione są poniższe zależności:

$$\begin{aligned}
 \hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \rho_{es}, \\
 \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= \rho_{ms}, \\
 \hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= -\vec{K}_s, \\
 \hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{J}_s,
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

gdzie ρ_{es} , ρ_{ms} są powierzchniowymi gęstościami ładunków elektrycznego i magnetycznego na granicy ośrodków, a \hat{n} jednostkowym wektorem normalnym do powierzchni.

Z równań tych wynika, że przy braku ładunków ($\rho_{es} = \rho_{ms} = 0$) oraz przy braku prądów ($\vec{K}_s = \vec{J}_s = 0$) ciągłe są normalne składowe wektorów indukcji

$$\begin{aligned}
 D_{1n} &= D_{2n}, \\
 B_{1n} &= B_{2n}
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

oraz styczne składowe wektorów pola elektromagnetycznego

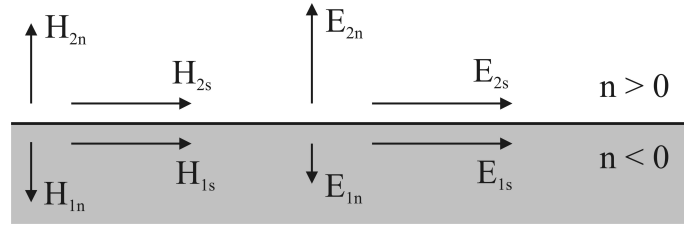
$$\begin{aligned}
 E_{1s} &= E_{2s}, \\
 H_{1s} &= H_{2s}.
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Zauważmy, że składowe styczne pola elektromagnetycznego nie zależą od parametrów materiałowych, więc są ciągle niezależnie od ich wartości. Natomiast składowe normalne pola mogą zmieniać zwrot i długość w zależności od wartości ε i μ (przy założeniu, że równania materiałowe (2.2) są spełnione).

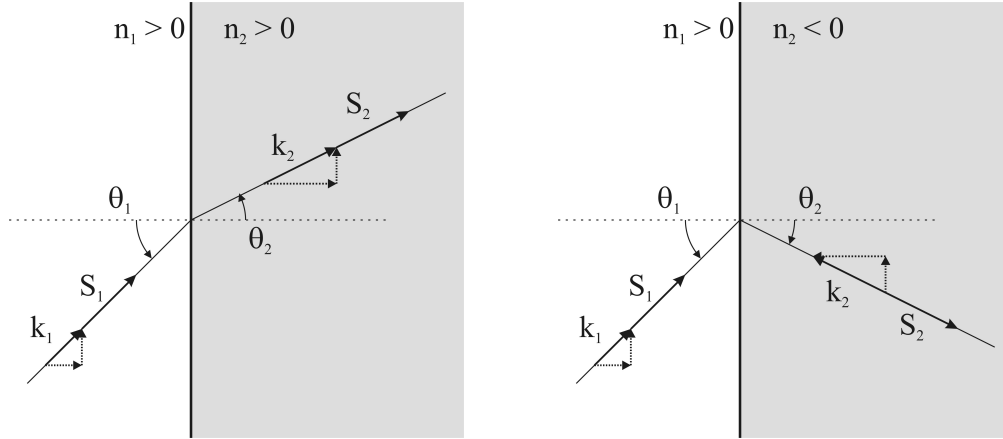
Wektory pola elektrycznego i magnetycznego na granicy ośrodków prawo- i lewoskrętnego zostały przedstawione schematycznie na Rysunku 2.3.

2.3.2. Prawo Snelliusa

Prawo Snelliusa opisuje ilościowo zjawisko załamania światła na granicy ośrodków. Można je wyprowadzić, korzystając z równań Maxwella, a bezpośrednio z warunków ciągłości rozpatrywanych powyżej (pełne wyprowadzenie można znaleźć w [5, 8]).



Rysunek 2.3. Warunki ciągłości na granicy ośrodków prawo- i lewoskrętnego


 Rysunek 2.4. Załamanie promienia na granicy dwu ośrodków. k – wektor falowy, S – wektor Poyntinga, θ – kąt padania (załamania)

Rozważając dwa ośrodki i promień przechodzący z pierwszego do drugiego, mamy zgodnie z oznaczeniami na Rysunku 2.4.

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2. \quad (2.10)$$

Łatwo zauważyć, że gdy współczynniki załamania będą różniły się znakiem, to kąt załamania będzie ujemny, co odpowiada sytuacji, w której promień załamany znajduje się po tej samej stronie normalnej, co promień padający.

2.3.3. Współczynniki Fresnela

Zjawiska odbicia i transmisji FEM opisywane są ilościowo przez współczynniki Fresnela. Wyrażają się one następującymi formułami [3, 5–7, 14]:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{\eta_2 \cos \theta_2 - \eta_1 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1}, \\ t_{\parallel} &= \frac{2\eta_2 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_2 + \eta_1 \cos \theta_1}, \\ r_{\perp} &= \frac{\eta_2 \cos \theta_1 - \eta_1 \cos \theta_2}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2}, \\ t_{\perp} &= \frac{2\eta_2 \cos \theta_1}{\eta_2 \cos \theta_1 + \eta_1 \cos \theta_2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Symbol \parallel oznacza polaryzację fali padającej, dla której pole elektryczne jest równoległe do płaszczyzny padania (bywa nazywana polaryzacją E, TM, p), natomiast \perp oznacza

polaryzację fali padającej, dla której pole elektryczne jest prostopadłe do płaszczyzny padania (bywa nazywana polaryzacją M, TE, s).

Wielkość η_i ($i = 1, 2$) nazywana jest impedancją ośrodka i wyraża się wzorem

$$\eta_i = \sqrt{\frac{\mu_i}{\varepsilon_i}}, \quad (2.12)$$

natomiast θ_1 i θ_2 to odpowiednio kąt padania i załamania.

Równe, co do wartości bezwzględnej, współczynniki załamania

Jeśli założymy następującą relację pomiędzy współczynnikami załamania

$$n_1 = |n_2|, \quad (2.13)$$

to z prawa Snelliusa (2.10) otrzymujemy

$$\theta_1 = |\theta_2| \Rightarrow \cos \theta_1 = \cos \theta_2. \quad (2.14)$$

Współczynniki Fresnela przestają zależeć od polaryzacji i przyjmują postać

$$\begin{aligned} r &= \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}, \\ t &= \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Równe impedancje

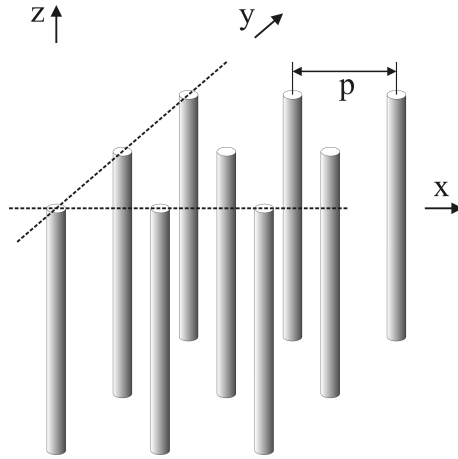
Jeżeli założymy równość impedancji, to współczynniki Fresnela przyjmą następujące postaci:

$$\begin{aligned} r_{\parallel} &= \frac{\cos \theta_2 - \cos \theta_1}{\cos \theta_2 + \cos \theta_1}, \\ t_{\parallel} &= \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_2 + \cos \theta_1}, \\ r_{\perp} &= \frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}, \\ t_{\perp} &= \frac{2 \cos \theta_1}{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Idealna soczewka

Dla idealnej soczewki pożądanym jest zminimalizowanie odbicia, co może być osiągnięte przez dopasowanie impedancji ośrodków. Połączenie warunków dotyczących impedancji i współczynnika załamania pokazuje, że w celu stworzenia idealnej soczewki przenikalności elektryczna i magnetyczna muszą zostać dobrane bardzo starannie, co ilustrują następujące równości:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 \mu_1 &= \varepsilon_2 \mu_2 \\ \frac{\mu_1}{\varepsilon_1} &= \frac{\mu_2}{\varepsilon_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \pm \varepsilon_2 \\ \mu_1 &= \pm \mu_2 \end{aligned} \right\}. \quad (2.17)$$



Rysunek 2.5. Struktura cienkich drutów (TW) wykazująca ujemną przenikalność elektryczną dla $\vec{E} \parallel z$ [3, 11]

2.4. Potwierdzenie eksperymentalne

Od prac Wiesielago minęło ponad 30 lat, nim po raz pierwszy potwierdzono eksperymentalnie ujemne załamanie FEM. Struktura zaproponowana przez Smitha [12] była połączeniem dwu propozycji Pendry’ego [10, 11].

2.4.1. Ujemna przenikalność elektryczna

Układ cienkich drutów metalicznych (TW – thin wire), przedstawiony na Rysunku 2.5. może wykazywać ujemną wartość przenikalności elektrycznej, gdy składowa pola elektrycznego FEM jest równoległa do osi drutów² ($\vec{E} \parallel z$), zgodnie z dyspersją opisaną następującą zależnością:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(\omega) &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + i\omega\gamma} \\ &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 + \gamma^2} + i \frac{\gamma\omega_{pe}^2}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

gdzie częstość plazmowa

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{2\pi c^2}{p^2 \ln \frac{p}{a}}} \quad (2.19)$$

oraz współczynnik tłumienia

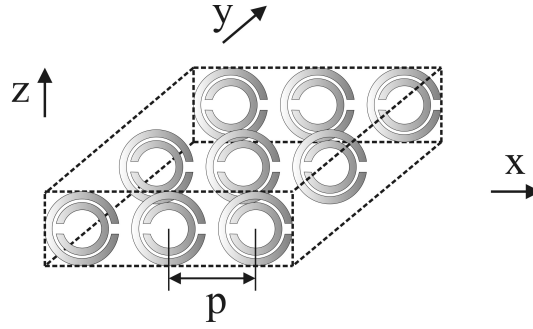
$$\gamma = \frac{\varepsilon_0}{\pi\sigma} \left(\frac{p\omega_{pe}}{a} \right)^2 \quad (2.20)$$

wyrażają się przez następujące wielkości rozpatrywanego układu:

- p – rozmiar komórki elementarnej struktury,
- a – średnica drutu,
- σ – przewodnictwo metalu.

Łatwo pokazać, że dla częstości spełniających warunek $\omega^2 < \omega_{pe}^2 - \gamma^2$ zachodzi nierówność $\text{Re}(\varepsilon_r) < 0$. W przypadku bezstratnym ($\gamma = 0$) warunek $\omega < \omega_{pe}$ zapewnia ujemną wartości przenikalności elektrycznej.

²Gdy pole elektryczne jest idealnie równoległe maksimum efektu jest osiągnięte, gdy pole jest prostopadle efekt nie pojawia się.



Rysunek 2.6. Struktura rozszczepionych rezonatorów kołowych (SRR) wykazująca ujemną przenikalność magnetyczną dla $\vec{H} \perp y$ [3, 15]

Przenikalność magnetyczna struktury z Rysunku 2.5. jest równa przenikalności magnetycznej próżni, ponieważ nie zawiera ona materiałów magnetycznych i nie jest w niej generowany żaden moment magnetyczny.

2.4.2. Ujemna przenikalność magnetyczna

Strukturą wykazującą ujemną wartość przenikalności magnetycznej jest układ metalicznych rozszczepionych rezonatorów kołowych (SRR – split-ring resonator) przedstawionych na Rysunku 2.6. Jeżeli padająca FEM ma składową magnetyczną prostopadłą do płaszczyzny rezonatorów ($\vec{H} \parallel y$) to przenikalność magnetyczna wykazuje dyspersję opisywaną zależnością

$$\begin{aligned} \mu_r &= 1 - \frac{F\omega^2}{\omega^2 - \omega_{0m}^2 + i\omega\gamma} \\ &= 1 - \frac{F\omega^2(\omega^2 - \omega_{0m}^2)}{(\omega^2 - \omega_{0m}^2)^2 + (\omega\gamma)^2} + i \frac{F\omega^2\gamma}{(\omega^2 - \omega_{0m}^2)^2 + (\omega\gamma)^2}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

gdzie parametr

$$F = \pi \left(\frac{a}{p} \right)^2, \quad (2.22)$$

określa siłę rezonansu, częstość rezonansu magnetycznego wynosi

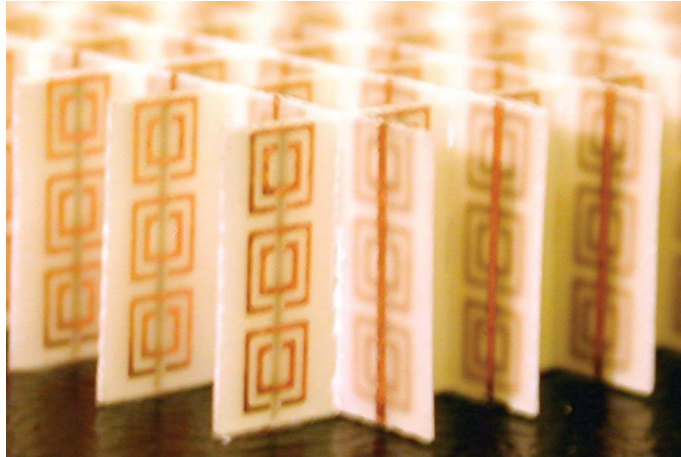
$$\omega_{0m} = c \sqrt{\frac{3p}{\pi \ln \left(\frac{2wa^3}{\delta} \right)}}, \quad (2.23)$$

a współczynnik tłumienia jest równy

$$\gamma = \frac{2pR'}{a\mu_0}. \quad (2.24)$$

Wielkości te wyrażają się przez następujące parametry rozważanego układu:

- a – wewnętrzny promień mniejszego pierścienia,
- p – rozmiar komórki elementarnej struktury,
- w – szerokość pierścieni,
- δ – odległość pomiędzy pierścieniami,
- R' – oporność metalu na jednostkę długości.



Rysunek 2.7. Metamateriał opisany w [13], wykazujący ujemny współczynnik załamania w zakresie mikrofal

Godnym uwagi jest fakt, że powyżej przedstawiony układ zawierający SRR, posiada odpowiedź magnetyczną wyłącznie dzięki ich strukturze wewnętrznej.

Rozważając zależność dyspersyjną (2.21) możemy pokazać, że w przypadku bezstratnym ($\gamma = 0$) przenikalność magnetyczna jest mniejsza od zera dla częstości z przedziału $\left(\omega_{0m}, \frac{\omega_{0m}}{\sqrt{1-F}}\right)$. W przypadku ogólnym ($\gamma \neq 0$) mogą istnieć takie wartości częstości, dla których $\text{Re}(\mu_r) < 0$.

2.4.3. Ujemny współczynnik załamania

W pracy [12] Smith przedstawił pierwszy eksperymentalny metamateriał lewoskrętny. Przeprowadził on proste rozumowanie. Jeżeli zaprojektujemy struktury zbudowane z TW i SRR tak, by dla określonego zakresu częstotliwości przenikalności były ujemne, to w tym zakresie otrzymamy:

- dla struktury TW – niewielką transmisję ($\epsilon < 0, \mu > 0$),
- dla struktury SRR – niewielką transmisję ($\epsilon > 0, \mu < 0$),
- dla połączonych struktur TW i SRR – znaczącą transmisję ($\epsilon < 0, \mu < 0$).

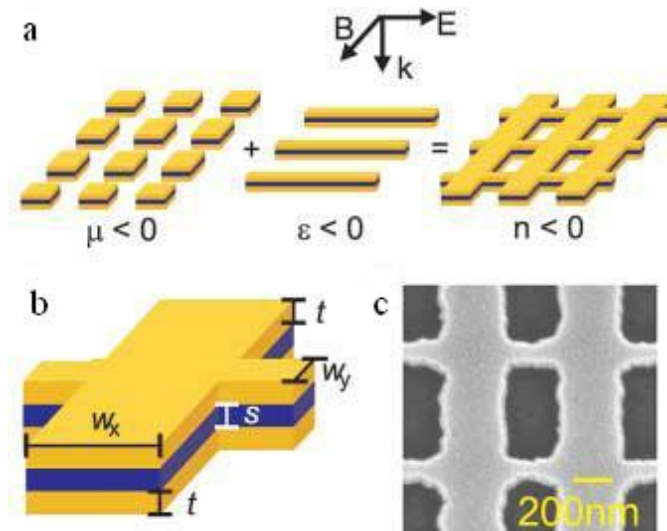
Dokonany pomiar w obszarze o ujemnych przenikalnościach potwierdził pojawienie się pasma transmisji.

Słabym punktem powyższych rozważań był brak uwzględnienia oddziaływania pomiędzy drutami i rezonatorami w materiale kompozytowym.

W późniejszej pracy [13] zaprezentowano strukturę wykazującą ujemną wartość współczynnika załamania w dwu wymiarach (Rysunek 2.7.) oraz wykonany z niej pryzmat. Potwierdzono eksperymentalnie, że fala załamana pojawia się po „ujemnej” stronie normalnej.

Wyczerpujący opis metamateriałów zawierających TW i SRR można znaleźć w pracy [16].

Obecnie podejmowane są liczne próby stworzenia innych struktur o ujemnym współczynniku załamania, a także przejścia w stronę światła widzialnego [17,18]. Oczekuje się, że zaprezentowane powyżej struktury powinny, po przeskalowaniu do mniejszych wymiarów, zachowywać swoje właściwości. Jednakże, wykonanie efektywnie jednorodnych struktur dla FEM o długościach optycznych (rzędu setek nanometrów) jest trudne technologicznie. Istotnymi okazują się być efekty sprężenia pomiędzy właściwościami elektrycznymi



Rysunek 2.8. Struktura z artykułu [20]; a – schemat metamateriału i polaryzacja fali padającej; b – parametry: $t = 25$ nm, $s = 35$ nm, $w_x = 307$ nm, $w_y = 100$ nm, wymiar komórki elementarnej $a = 600$ nm, grubość metamateriału $d = 2t + s = 85$ nm; c – obraz z góry w mikrografii elektronowej

i magnetycznymi [19].

Przykłady innych struktur wykazujących ujemny współczynnik załamania przedstawione są na Rysunkach 2.8. i 2.9.

Potwierdzenie eksperymentalne ujemnego załamania w widzialnym zakresie widma elektromagnetycznego przedstawione jest w artykule [22].

2.5. Zastosowania

Przed fizyką fazy skondensowanej, inżynierią materiałową oraz zaawansowanymi technologiami otwierają się możliwości projektowania i otrzymywania nowych ośrodków kompozytowych. Niniejszy podrozdział przedstawia możliwe zastosowania metamateriałów.

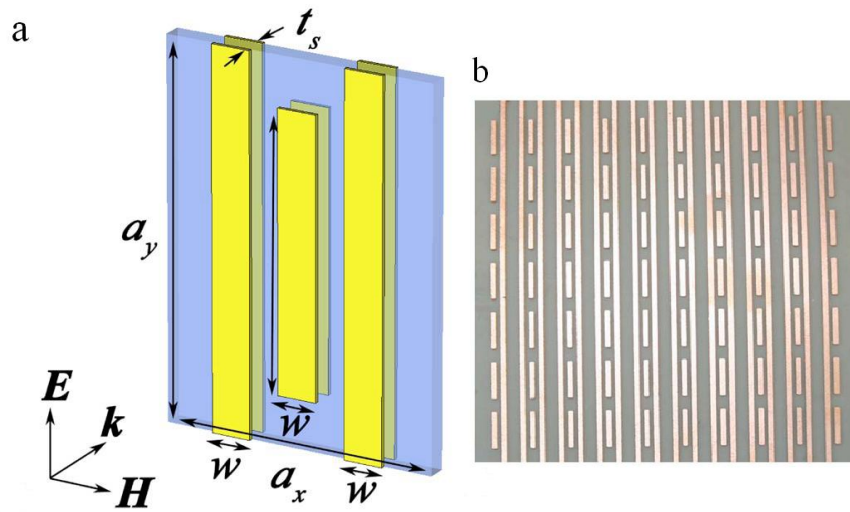
2.5.1. Idealna soczewka

Rozpatrując przypadek płytki płasko-równoległej wykonanej z metamateriału o współczynniku załamania $n_l < 0$, oraz umieszczonej w ośrodku o współczynniku załamania $n_r > 0$, można skorzystać z prawa Snella. Łatwo możemy zauważyć (Rysunek 2.10.), że jeżeli $n_r = -n_l$, to płytka ta będzie idealną soczewką o dwu ogniskach (przy założeniu, że grubość płytki d , jest większa od odległości obiektu od niej l). Jedno z nich położone jest wewnątrz płytki, natomiast drugie na zewnątrz. Przypadek, gdy $d < l$ przedstawiony jest na Rysunku 2.11.

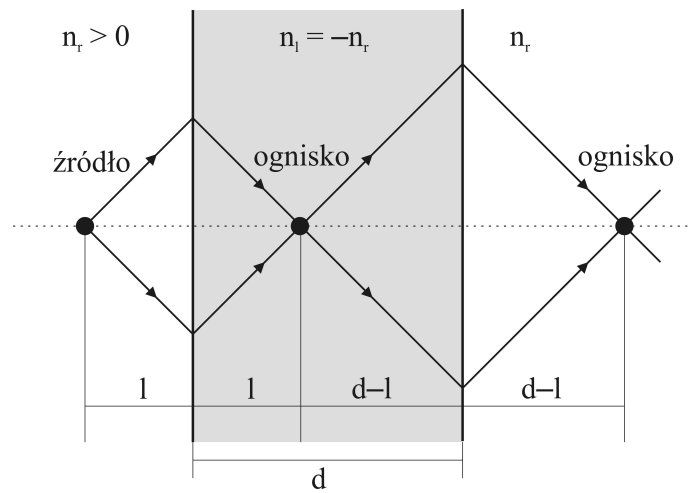
W tym kontekście nazwa „idealna soczewka” odnosi się tylko do właściwości współczynnika załamania. Czynniki, które będą ograniczać idealne obrazowanie przez soczewkę są dyspersja współczynnika załamania, odbicie na granicy ośrodków oraz absorpcja. Jednakże, taka soczewka pozwala przekroczyć granice dyfrakcyjne tradycyjnych soczewek [23].

2.5.2. Niewidzialne okrycie

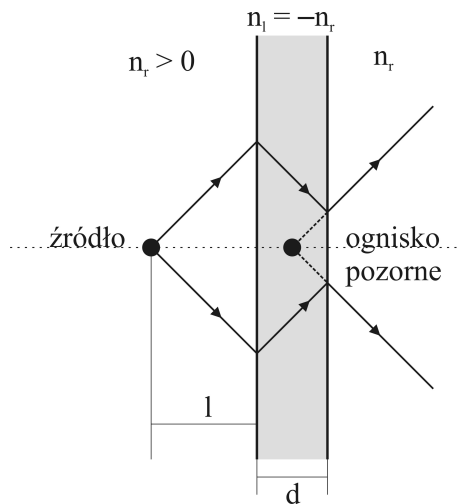
W pracy [24] pokazano jak zaprojektować okrycie dowolnego obiektu przed polem elektromagnetycznym. Wykonanie takiej powłoki wymaga uzyskania zadanego przestrzennego



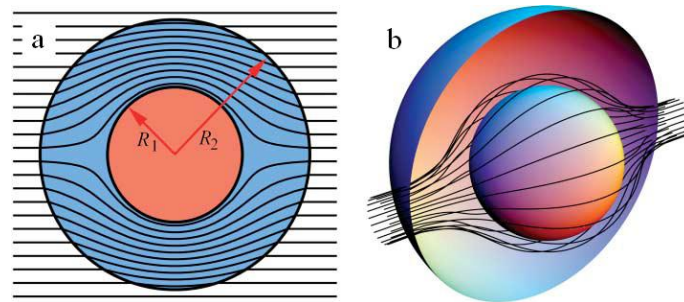
Rysunek 2.9. Struktura z artykułu [21]; a – komórka elementarna i polaryzacja fali padającej, $a_x = 7$ mm, $a_y = 9$ mm, $w = 1$ mm, długość krótszych drutów 7 mm, $t_s = 254 \mu\text{m}$, grubość warstw miedzi $10 \mu\text{m}$; b – zdjęcie układu



Rysunek 2.10. Bieg promieni w przypadku idealnej soczewki. Grubość soczewki d jest większa od odległości obiektu od niej l



Rysunek 2.11. Bieg promieni w przypadku idealnej soczewki. Grubość soczewki d jest mniejsza od odległości obiektu od niej l



Rysunek 2.12. Bieg promieni w niewidzialnym okryciu zaproponowanym w [24]; a – przekrój; b – widok trójwymiarowy

rozkładu wartości przenikalności elektrycznej i magnetycznej. Techniki stosowane przy konstrukcji metamateriałów mogą być wykorzystane w tym celu. Ukrycie obiektu przed polem elektromagnetycznym przedstawione jest poglądowo na Rysunku 2.12.

2.6. Terminologia

Dotychczas nie wykrystalizowało się spójne nazewnictwo. Poniżej przedstawiono kilka używanych nazw z ich zaletami i wadami.

- *Ośrodki lewoskrętne* (left-handed materials, LH) – nazwa zaproponowana przez Wiesielago, odwołująca się do lewoskrętnego układu wektorów \vec{k} , \vec{E} , \vec{H} , jako najbardziej podstawowej własności omawianych struktur. Uniwersalna dla przypadków jedno-, dwu-, i trójwymiarowych, jednakże, pokrywająca się z nazwą materiałów chiralnych.
- *Podwójnie ujemne* (double-negative, DNG) – nie jest możliwa wcześniej wymieniona pomyłka, lecz nie jest sprecyzowane jaka wielkość jest ujemna.
- *Materiały o ujemnym współczynniku załamania* (negative-refractive index, NRI) – termin właściwy w przypadku struktur dwu- i trójwymiarowych, podkreślający efektywna jednorodność materiałów. W przypadku jednowymiarowym, przy braku kątów padania/załamania traci sens.

- *Ośrodek Wiesielago* (Veselago medium) – nazwa oddająca uznanie Wiesielago, lecz nie niosąca informacji o właściwościach.
- *Metamateriały* – termin używany najczęściej w odniesieniu do materiałów o ujemnym współczynniku załamania, lecz mieszczący w sobie całą także różnorodność materiałów o nietrywialnych własnościach, wynikających z ich struktury.

Rozdział 3.

Transmisja światła spolaryzowanego przez supersieci optyczne

Celem niniejszego rozdziału jest krótkie przedstawienie dotychczasowych osiągnięć autora, w badaniu transmitancji i fotonicznej struktury pasmowej supersieci zawierających metamateriały [25–30]. Poniżej opisano zasady konstrukcji jednowymiarowych supersieci aperiodycznych. Następnie zaprezentowano formalizm macierzy przejścia wykorzystywany w obliczeniach numerycznych właściwości transmisyjnych supersieci. Przedstawiono także metodę obliczania fotonicznej struktury pasmowej. Rozdział zamknięty jest wybranymi wynikami.

3.1. Supersieci aperiodyczne

Rozważane w wyżej wymienionych pracach były supersieci dwuskładnikowe. Na strukturę wielowarstwową składały się dwa rodzaje warstw materiałów jednorodnych i izotropowych oznaczane jako A i B, ułożone w ściśle deterministyczny sposób. Parametrami charakteryzującymi j -tą warstwę były:

- d_j – grubość,
- ε_j – względna przenikalność elektryczna,
- μ_j – względna przenikalności magnetyczna,

gdzie $j = A, B$.

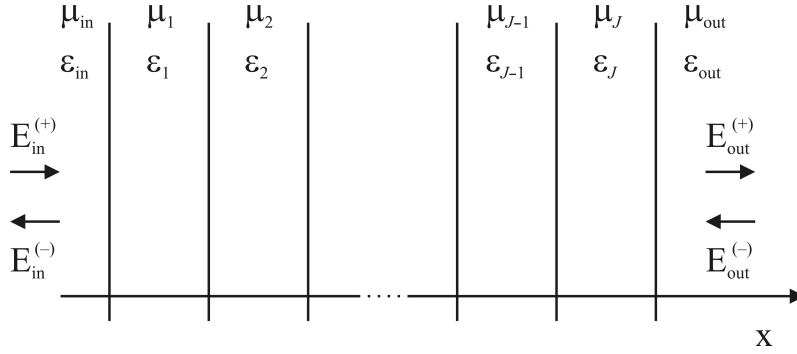
Porządek warstw w strukturze opisany jest łańcuchem S_L , gdzie indeks $L = 0, 1, 2, \dots$ odpowiada numerowi pokolenia. Kolejne łańcuchy konstruowane są przy użyciu formuł rekurencyjnych [31], w których znak „ \cdot ” oznacza konkatenację łańcuchów, a wykładnik krotność powtórzenia łańcucha. Zależności te przybierają dla poszczególnych supersieci następującą postać:

- uogólniona supersieć Fibonacciego

$$\begin{aligned} S_0 &= B, & S_1 &= A, \\ S_{L+1} &= S_L^M \cdot S_{L-1}^N; \end{aligned} \tag{3.1}$$

- uogólniona supersieć Thue-Morse’a

$$\begin{aligned} S_0 &= A, & S'_0 &= B, \\ S_{L+1} &= S_L^M \cdot S_L'^N, & S'_{L+1} &= S_L'^N \cdot S_L^M; \end{aligned} \tag{3.2}$$



Rysunek 3.1. Struktura wielowarstwowa; każda z J warstw jest opisana przez grubość d_j , przenikalność elektryczną ϵ_j oraz magnetyczną μ_j , formalizm macierzy przejścia wiąże amplitudy fali płaskiej w półprzestrzeniach oznaczonych indeksami „in” oraz „out”

– supersieć o podwójnym okresie

$$S_0 = B, \quad S_1 = BA, \quad (3.3)$$

$$S_{L+1} = S_L \cdot S_{L-1}^2;$$

– supersieć Rudin-Shapiro

$$S_0 = S'_0 = A, \quad S''_0 = S'''_0 = B, \quad (3.4)$$

$$S_{L+1} = S_L \cdot S'_L, \quad S''_{L+1} = S_L \cdot S''_L,$$

$$S'''_{L+1} = S''_L \cdot S'_L, \quad S''''_{L+1} = S''_L \cdot S''_L.$$

3.2. Formalizm macierzy przejścia

Właściwości transmitancji struktur aperiodycznych można badać przy wykorzystaniu formalizmu macierzy przejścia [32–34]. Wynika on z rozpatrzenia warunków ciągłości (Rozdział 2.3.1.) na granicach poszczególnych warstw struktury wielowarstwowej (Rysunek 3.1.).

Formalizm macierzy przejścia wiąże amplitudy płaskiej fali elektromagnetycznej przed i za strukturą wielowarstwową

$$\begin{bmatrix} E_{in}^{(+)} \\ E_{in}^{(-)} \end{bmatrix} = D_{in,1} \left[\prod_{j=1}^J P_j D_{j,j+1} \right] \begin{bmatrix} E_{out}^{(+)} \\ E_{out}^{(-)} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} E_{out}^{(+)} \\ E_{out}^{(-)} \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

gdzie:

- $E_{in}^{(+)}$ – amplituda FEM w lewej półprzestrzeni, poruszającej się w prawo,
- $E_{in}^{(-)}$ – amplituda FEM w lewej półprzestrzeni, poruszającej się w lewo,
- $E_{out}^{(+)}$ – amplituda FEM w prawej półprzestrzeni, poruszającej się w prawo,
- $E_{out}^{(-)}$ – amplituda FEM w prawej półprzestrzeni, poruszającej się w lewo,
- Γ – macierz charakterystyczna struktury,
- P_j – macierz propagacji w j -tej warstwie

$$P_j = \begin{bmatrix} e^{i\phi_j} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi_j} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

– ϕ_j – droga optyczna w j -tej warstwie

$$\phi_j = d_j n_j \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta_j, \quad (3.7)$$

- λ – długość fali w próżni,
- θ_j – kąt padania fali w warstwie j ,
- $D_{j,j+1}$ – macierz przejścia między warstwą j , a $j+1$

$$D_{j,j+1} = \frac{1}{t_{j,j+1}} \begin{bmatrix} 1 & r_{j,j+1} \\ r_{j,j+1} & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

– $r_{j,j+1}, t_{j,j+1}$ – współczynniki Fresnela (2.11).

Przy użyciu formalizmu macierzy przejścia można obliczać transmitancję (\mathcal{T}), refleksję (\mathcal{R}), a także absorpcję (\mathcal{A}) dla płaskiej fali elektromagnetycznej przy zadanych jej długości w próżni (λ), kącie padania θ_{in} i polaryzacji [25–28].

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \left| \frac{1}{\Gamma_{11}} \right|^2 \det \Gamma \\ \mathcal{R} &= \left| \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{11}} \right|^2 \\ \mathcal{A} &= 1 - (\mathcal{T} + \mathcal{A}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Zakładając periodyczne warunki brzegowe

$$\vec{E}(x+d) = \vec{E}e^{iqd}, \quad \vec{H}(x+d) = \vec{H}e^{iqd}, \quad (3.10)$$

gdzie q jest liczbą falową z pierwszej strefy Brillouina $\left(-\frac{\pi}{d} \leq q < \frac{\pi}{d}\right)$, a $d = \sum_j d_j$ jest grubością całej struktury, można wyrażenie (3.5), potraktować jako zagadnienie własne

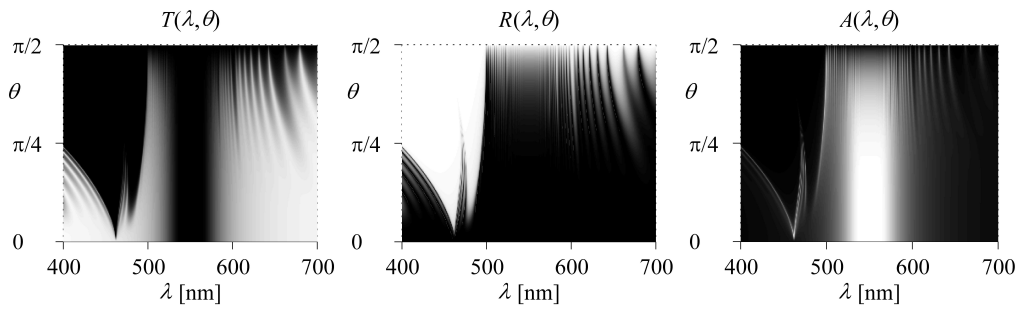
$$\begin{bmatrix} E_{\text{in}}^{(+)} \\ E_{\text{in}}^{(-)} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} E_{\text{out}}^{(+)} \\ E_{\text{out}}^{(-)} \end{bmatrix} = e^{-iqd} \begin{bmatrix} E_{\text{out}}^{(+)} \\ E_{\text{out}}^{(-)} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Wartość $\gamma = e^{-iqd}$ musi być wartością własną macierzy przejścia Γ , dla pewnej rzeczywistej wartości q . Ponieważ macierz Γ jest unimodularna, warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia rzeczywistego q jest $|\text{Tr}(\Gamma)| \leq 2$. Z zależności $\cos(qd) = \frac{\text{Tr}(\Gamma)}{2}$ możemy wyznaczyć krzywą dyspersji $q(\omega)$ i na jej podstawie wyznaczać prędkość grupową, gęstość stanów oraz efektywny współczynnik załamania [29, 30].

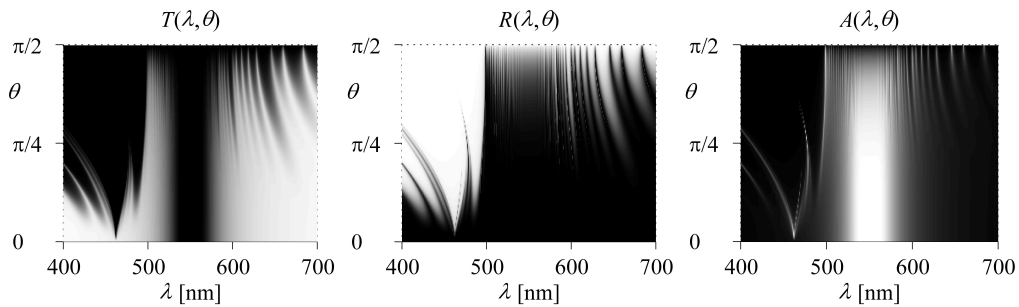
3.3. Wybrane wyniki

Na Rysunkach 3.2., 3.3. znajdują się wykresy zaczerpnięte z pracy [27]. Badania w niej zaprezentowane można podsumować następującymi stwierdzeniami:

1. W obszarze, gdzie dla pojedynczej warstwy metamateriału pojawia się całkowite wewnętrzne odbicie, zaobserwowano pasma transmisji.
2. Dla wystarczająco cienkich warstw metamateriału występuje zjawisko tunelowania.
3. Wraz ze wzrostem grubości pojedynczej warstwy metamateriałowej absorpcja staje się coraz większa, a szerokość pasma absorpcji wzrasta. Jednocześnie pasma transmisji i odbicia zwiężają się, a ich liczba rośnie.



Rysunek 3.2. Transmitancja, reflektancja i absorpcja przez supersieć periodyczną ($L = 6$), składającą się z warstw o ujemnym i dodatnim współczynniku załamania, przedstawione w funkcji długości padającej fali i jej kąta padania [27]



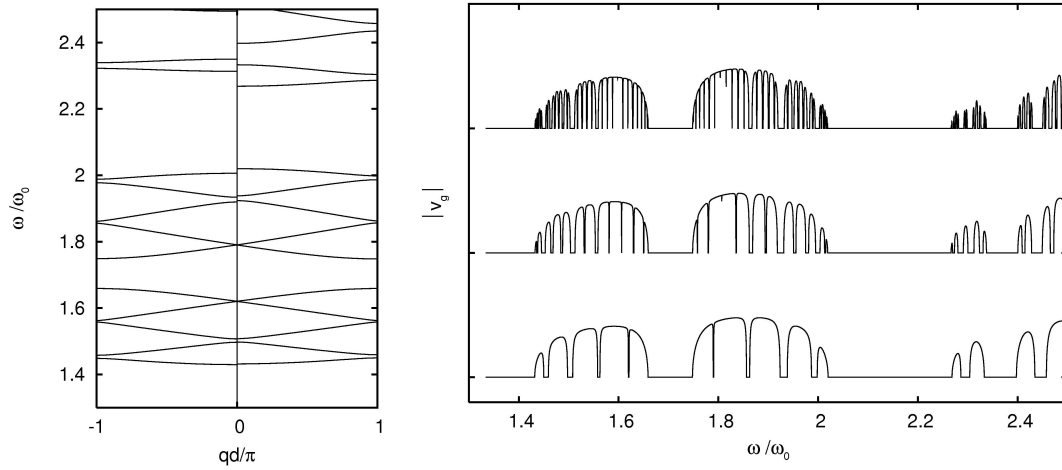
Rysunek 3.3. Transmitancja, reflektancja i absorpcja przez supersieć typu Fibonacciego ($M = 1$, $N = 1$, $L = 6$), składającą się z warstw o ujemnym i dodatnim współczynniku załamania, przedstawione w funkcji długości padającej fali i jej kąta padania [27]

4. Położenie pasm transmisji w badanym obszarze zależy od:

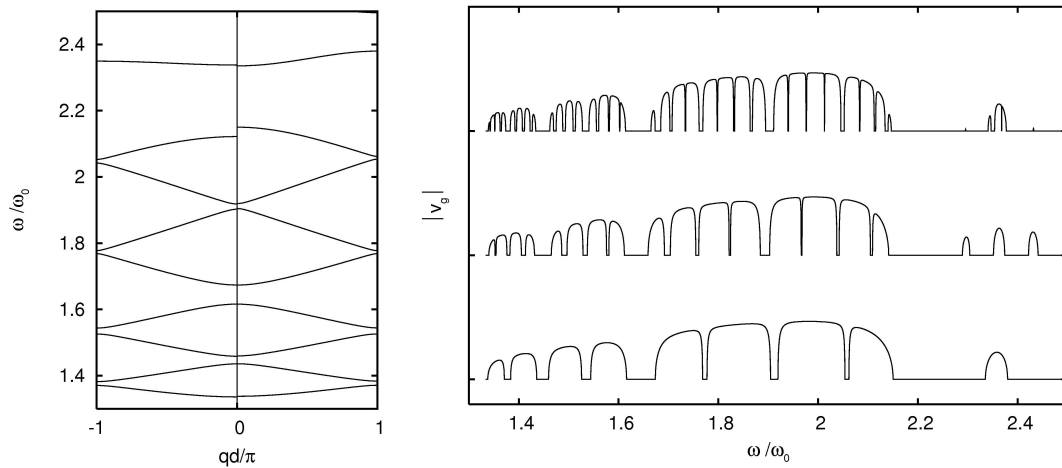
- grubości warstw,
- współczynnika załamania ośrodków zewnętrznych – dla wystarczająco dużych kątów padania nie obserwujemy transmisji, przy czym niska transmisja związana jest albo z wysoką absorpcją, albo z wysoką reflektancją.

Rysunki 3.4., 3.5. pochodzą z artykułu [30]. Porównując krzywe z trzech kolejnych pokoleń, stwierdzono dla wszystkich czterech badanych typów sieci aperiodycznych zwiększenie się liczby coraz węższych pasm i przerw. Samopodobna struktura kolejnych wykresów opisana jest prawem potęgowym [14].

Podsumowując, przedstawione podejście może znaleźć swoje zastosowanie w projektowaniu urządzeń optycznych zbudowanych z warstw materiałów lewo- i prawoskrętnych.



Rysunek 3.4. Fotoniczna struktura pasmowa uogólnionej supersieci Fibonacciego ($M = 2$, $N = 1$, $L = 4$), po lewej polaryzacja p, po prawej polaryzacja s; prękość grupowa w zależności od częstotliwości, polaryzacja s, $L = 4$ (dół), $L = 5$ (środek), $L = 6$ (góra) [30]



Rysunek 3.5. Fotoniczna struktura pasmowa supersieci o podwójnym okresie ($L = 3$), po lewej polaryzacja p, po prawej polaryzacja s; prękość grupowa w zależności od częstotliwości, polaryzacja s, $L = 3$ (dół), $L = 4$ (środek), $L = 5$ (góra) [30]

Rozdział 4.

Metoda przyrostów skończonych (FDTD)

W niniejszym rozdziale przedstawiona będzie metoda przyrostów skończonych (FDTD – Finite-Differences Time-Domain) [35]. Jest to algorytm numeryczny używany do rozwiązywania równań Maxwella uwzględniający zależność pola elektromagnetycznego od współrzędnych przestrzennych i czasu. Po raz pierwszy ich dyskretyzację i metodę rozwiązywania wprost, zaprezentował Yee [36] w 1966 roku. Zaproponowany wtedy algorytm, jest rdzeniem wszystkich obecnie używanych metod numerycznych tej klasy. Jednakże, w latach sześćdziesiątych artykuł Yee przeszedł bez większego echa.

Następnie w 1975 roku pomysł Yee został przypomniany i uzupełniony o kryteria stabilności dla przypadków jedno-, dwu- i trójwymiarowego przez Taflove'a [37]. Obecnie używaną powszechnie nazwę „Finite-Difference Time-Domain” algorytm otrzymał w 1980 roku [38]. Od tego czasu, dzięki systematycznemu rozwijaniu, poszerzyły się znacznie jego możliwości. Liczne prace przyczyniły się do dokładnego zbadania właściwości numerycznych i stałego zmniejszania niedokładności oraz coraz wierniejszego modelowania właściwości różnych materiałów.

Podstawowymi zaletami metody FDTD są: jej proste wynikanie z równań Maxwella oraz wysoka dokładność i dobrze zrozumiane źródła błędów. Ponadto FDTD, jako algorytm działający w przestrzeni czasowej, w naturalny sposób traktuje wszelkie procesy związane z włączaniem sygnału oraz nieliniowe odpowiedzi badanych układów. Prócz tego, jedyną częścią algorytmu określającą analizowaną strukturę jest siatka i parametry materiałowe określone na niej, zatem przejście do innego problemu nie wymaga, żadnej, potencjalnie złożonej ingerencji w równania opisujące układ.

Kolejne podrozdziały mają na celu przedstawić podstawowy algorytm Yee, numeryczne źródła promieniowania, warunki brzegowe oraz sposób modelowania dyspersji.

4.1. Algorytm Yee

W celu wyprowadzenia algorytmu Yee należy rozpatrzyć równania Maxwella (2.1). Następnie zastosować w nich przybliżenie pochodnej funkcji ilorazem różnicowym [39, 40]. Przybliżenia tego dokonuje się na siatce Yee, która jest kluczowym elementem algorytmu numerycznego.

4.1.1. Równania Maxwella

Trzy wymiary

Równania Maxwella w przestrzeni pozbawionej ładunków przyjmują dla trzech wymiarów postać

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} - \vec{K}, \\ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \nabla \times \vec{H} - \vec{J}\end{aligned}\quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{D} &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0.\end{aligned}\quad (4.2)$$

Wielkości \vec{J} i \vec{K} mogą być traktowane jako niezależne źródła energii pola elektromagnetycznego, odpowiednio dla składowych \vec{E} i \vec{H} . Jednocześnie możemy uwzględnić absorpcję energii pól i jej zamianę na ciepło poprzez równania:

$$\begin{aligned}\vec{J} &= \vec{J}_z + \sigma_e \vec{E}, \\ \vec{K} &= \vec{K}_z + \sigma_h \vec{H},\end{aligned}\quad (4.3)$$

gdzie:

- σ_e – konduktywność elektryczna [S/m],
- σ_h – równoważnik strat magnetycznych [Ω /m],
- \vec{J}_z – źródło strumienia elektrycznego,
- \vec{K}_z – źródło strumienia magnetycznego.

Po uwzględnieniu równań (4.3) oraz zależności materiałowych (2.2) pierwsze dwa równania (4.1) rozpisane na poszczególne składowe przestrzenne przyjmują postać (w przypadku materiałów liniowych, izotropowych, niedispersyjnych i absorbujących):

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - (K_{zx} + \sigma_h H_x) \right], \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - (K_{zy} + \sigma_h H_y) \right], \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - (K_{zz} + \sigma_h H_z) \right];\end{aligned}\quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - (J_{zx} + \sigma E_x) \right], \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_{zy} + \sigma E_y) \right], \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (J_{zz} + \sigma E_z) \right].\end{aligned}\quad (4.5)$$

Układ sześciu sprzężonych cząstkowych równań różniczkowych stanowi podstawę algorytmu FDTD. Nie zakłada on wprost relacji opisanych prawami Gaussa, ponieważ można je wyprowadzić z powyższych. Jednocześnie rozmieszczenie przestrzenne wektorów na siatce związane z dyskretyzacją równań musi gwarantować spełnienie praw Gaussa.

Dwa wymiary

Zakładając niezmienniczość układu w kierunku osi z , redukujemy równania (4.4) i (4.5) do postaci, w której otrzymujemy dwa niezależne od siebie, układy trzech równań sprzężonych. Jeden z nich odpowiada sytuacji, w której składowe pola magnetycznego są prostopadłe do wyróżnionego kierunku (mod TM_z):

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left[-\frac{\partial E_z}{\partial y} - (K_{zx} + \sigma_h H_x) \right], \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - (K_{zy} + \sigma_h H_y) \right], \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - (J_{zz} + \sigma_e E_z) \right].\end{aligned}\quad (4.6)$$

W wypadku modu TE_z prostopadłe do osi z jest pole elektryczne i równania mają następującą postać:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_z}{\partial y} - (J_{zx} + \sigma_e E_x) \right], \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_{zy} + \sigma_e E_y) \right], \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - (K_{zz} + \sigma_h H_z) \right].\end{aligned}\quad (4.7)$$

Jeden wymiar

Kontynuując upraszczanie przez założenie niezmienniczości w kierunku osi y otrzymujemy z równania (4.6) dla modu TM_z , układ dwu sprzężonych równań postaci¹:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{\partial E_z}{\partial x} - (K_{zy} + \sigma_h H_y) \right], \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - (J_{zz} + \sigma_e E_z) \right].\end{aligned}\quad (4.8)$$

Analogicznie można postąpić z modem TE_z , co prowadzi do układu równań sprzężonych²:

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[-\frac{\partial H_z}{\partial x} - (J_{zy} + \sigma_e E_y) \right], \\ \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{1}{\mu} \left[-\frac{\partial E_y}{\partial x} - (K_{zz} + \sigma_h H_z) \right].\end{aligned}\quad (4.9)$$

4.1.2. Siatka Yee i dyskretyzacja pochodnej

Powyżej przedstawione równania Maxwella są równaniami różniczkowymi cząstkowymi pierwszego stopnia. W celu ich rozwiązania numerycznego musimy operator różniczkowania zastąpić odpowiednim ilorazem różnicowym.

Wielkości fizyczne rozpatrywane tutaj są funkcjami zmiennych przestrzennych (x, y, z) oraz zmiennej czasowej (t) . Wartości będziemy rozpatrywać na dyskretnej siatce przestrzennej³ o kroku Δ_s i w dyskretnych chwilach, które dzieli czas Δ_t . Punktem początkowym siatki jest $\vec{r}_0 = (0, 0, 0)$, natomiast chwilą początkową $t_0 = 0$.

¹Dodatkowo zakładamy, że $H_x = 0$ dla $t = 0$ oraz stale $K_{zx} = 0$.

²Dodatkowo zakładamy, że $E_x = 0$ dla $t = 0$ oraz stale $J_{zx} = 0$.

³W ogólności krok w różnych kierunkach może być różny $\Delta x \neq \Delta y \neq \Delta z \neq \Delta x$, lecz w rozpatrywanych wypadkach $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta_s$.

Dla uproszczenia przyjmuje się następujące oznaczenia:

– punkt w przestrzeni

$$\vec{r}_{i,j,k} = (i \cdot \Delta_s, j \cdot \Delta_s, k \cdot \Delta_s), \quad (4.10)$$

– chwila czasu

$$t_n = n \cdot \Delta_t, \quad (4.11)$$

– wartość $u(\vec{r}, t)$ w chwili t_n w punkcie $\vec{r}_{i,j,k}$ będziemy zapisywać w postaci

$$u(\vec{r}_{i,j,k}, t_n) = u_{i,j,k}^n. \quad (4.12)$$

W dalszej części pracy stwierdzenie „chwila n ,” należy rozumieć jako chwila t_n ; natomiast „punkt (i, j, k) ,” jako punkt $\vec{r}_{i,j,k}$.

Przyjęto także konwencję, w której indeksy dolne oznaczają współrzędne przestrzenne, natomiast indeks górny oznacza czas. Stosując te oznaczenia można zapisać następujące wyrażenia:

– dla pochodnych cząstkowych względem zmiennych przestrzennych:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j,k}^n &= \frac{u_{i+1/2,j,k}^n - u_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta_s} + O[(\Delta_s)^2], \\ \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{i,j,k}^n &= \frac{u_{i,j+1/2,k}^n - u_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta_s} + O[(\Delta_s)^2], \\ \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{i,j,k}^n &= \frac{u_{i,j,k+1/2}^n - u_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta_s} + O[(\Delta_s)^2], \end{aligned} \quad (4.13)$$

– dla pochodnej cząstkowej względem czasu

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j,k}^n = \frac{u_{i,j,k}^{n+1/2} - u_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta_t} + O[(\Delta_t)^2], \quad (4.14)$$

gdzie $O[(\Delta_s)^2]$ i $O[(\Delta_t)^2]$ są resztami zapisanymi przy użyciu skróconej notacji.

Siatka Yee w jednym wymiarze

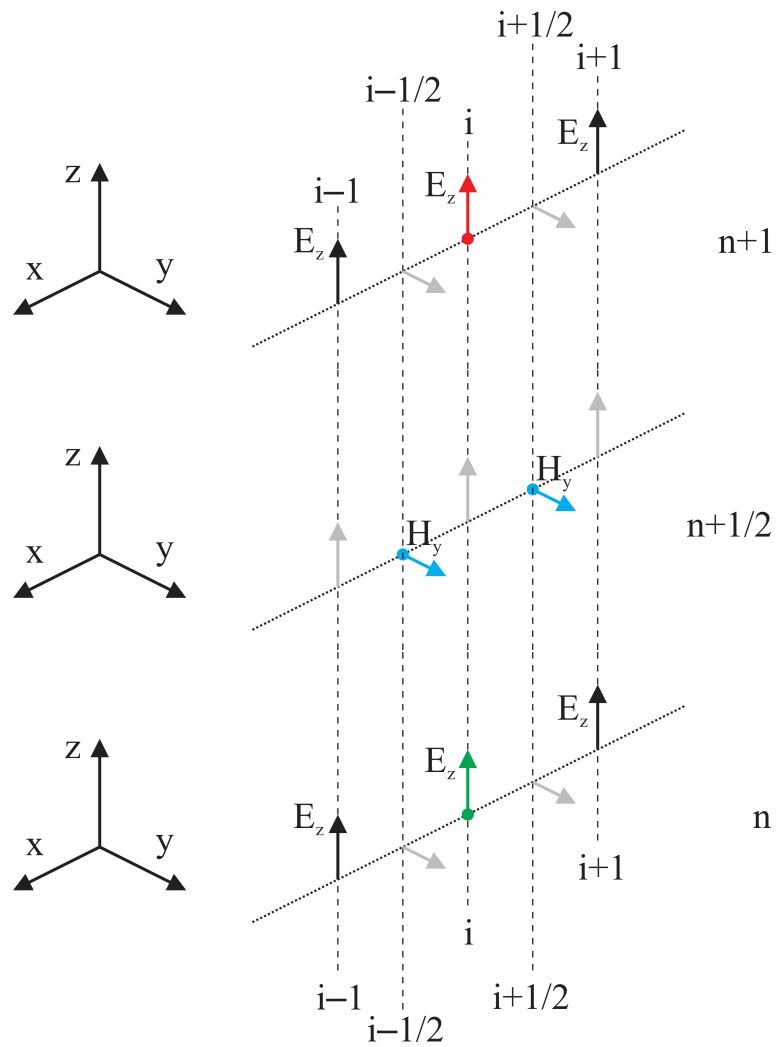
Cechą charakterystyczną siatki Yee jest rozsuniecie składowych pola elektromagnetycznego. W celu obliczenia wartości pola w danym punkcie korzystamy z jego wartości w tym miejscu w poprzednim kroku czasowym, oraz z wartości dualnego (magnetycznego lub elektrycznego) pola w sąsiednich punktach pół kroku czasowego wcześniej. Rysunek 4.1. przedstawia siatkę Yee w jednym wymiarze w trzech chwilach czasu ($n, n + 1/2, n + 1$).

Mając zatem początkowy rozkład pola⁴ możemy obliczać ewolucję czasową jego wartości.

Zapisując układ równań (4.8) na siatce Yee w postaci dyskretnej otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{H_y|_{i+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i+1/2}^{n-1/2}}{\Delta_t} &= \frac{1}{\mu|_{i+1/2}^n} \left[\frac{E_z|_{i+1}^n - E_z|_i^n}{\Delta_s} + \right. \\ &\quad \left. - \sigma_h|_{i+1/2}^n H_y|_{i+1/2}^n \right], \\ \frac{E_z|_i^{n+1} - E_z|_i^n}{\Delta_t} &= \frac{1}{\varepsilon|_i^{n+1/2}} \left[\frac{H_y|_{i+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta_s} + \right. \\ &\quad \left. - \sigma_e|_i^{n+1/2} E_z|_i^{n+1/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

⁴Rozkład pola elektrycznego w t_0 i rozkład pola magnetycznego w $t_{1/2}$.



Rysunek 4.1. Siatka Yee dla przypadku jednowymiarowego w trzech kolejnych chwilach (n , $n+1/2$, $n+1$). Wartość $E_z|_i^{n+1}$ (kolor czerwony) obliczana jest na podstawie wartości $E_z|_i^n$ (kolor zielony) oraz $H_y|_{i+1/2}^{n+1/2}$ i $H_y|_{i-1/2}^{n+1/2}$ (kolor niebieski).

We wzorach (4.15) pojawiają się wartości pola elektrycznego w punktach o współrzędnych całkowitych (i , $i + 1$) oraz pola magnetycznego w punktach o współrzędnych połówkowych ($i - 1/2$, $i + 1/2$). Aby do podobnej zależności doprowadzić dla zmiennej czasowej zastosować należy następujące uśrednienia:

$$\begin{aligned} H_y|_{i+1/2}^n &= \frac{H_y|_{i+1/2}^{n+1/2} + H_y|_{i+1/2}^{n-1/2}}{2}, \\ E_z|_i^{n+1/2} &= \frac{E_z|_i^{n+1} + E_z|_i^n}{2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Po podstawieniu zależności (4.16) do (4.15) i prostych przekształceniach otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} H_y|_{i+1/2}^{n+1/2} &= C_{hh}|_{i+1/2}^n H_y|_{i+1/2}^{n-1/2} + C_{he}|_{i+1/2}^n (E_z|_{i+1}^n - E_z|_i^n), \\ E_z|_i^{n+1} &= C_{ee}|_i^{n+1/2} E_z|_i^n + C_{eh}|_i^{n+1/2} (H_y|_{i+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2}^{n+1/2}), \end{aligned} \quad (4.17)$$

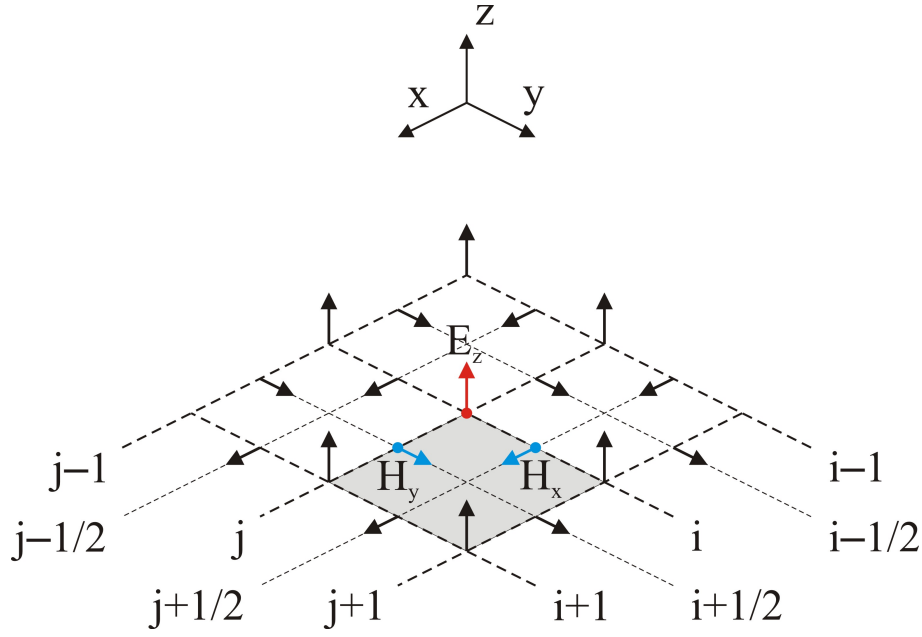
gdzie:

$$\begin{aligned} C_{hh}|_{i+1/2}^n &= \left(1 - \frac{\sigma_h|_{i+1/2}^n \Delta t}{2 \mu|_{i+1/2}^n}\right) / \left(1 + \frac{\sigma_h|_{i+1/2}^n \Delta t}{2 \mu|_{i+1/2}^n}\right), \\ C_{he}|_{i+1/2}^n &= \left(\frac{\Delta t}{\mu|_{i+1/2}^n \Delta_s}\right) / \left(1 + \frac{\sigma_h|_{i+1/2}^n \Delta t}{2 \mu|_{i+1/2}^n}\right), \\ C_{ee}|_i^{n+1/2} &= \left(1 - \frac{\sigma_e|_i^{n+1/2} \Delta t}{2 \varepsilon|_i^{n+1/2}}\right) / \left(1 + \frac{\sigma_e|_i^{n+1/2} \Delta t}{2 \varepsilon|_i^{n+1/2}}\right), \\ C_{eh}|_i^{n+1/2} &= \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon|_i^{n+1/2} \Delta_s}\right) / \left(1 + \frac{\sigma_e|_i^{n+1/2} \Delta t}{2 \varepsilon|_i^{n+1/2}}\right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Siatka Yee w dwóch i trzech wymiarach

Rysunek 4.2. prezentuje siatkę w dwu wymiarach, natomiast Rysunek 4.3. przedstawia komórkę elementarną trójwymiarowej siatki Yee.

Sposób wyprowadzenia równań jest analogiczny dla dwóch i trzech wymiarów.



Rysunek 4.2. Siatka Yee dla przypadku dwuwymiarowego (mod TM_z). Zaznaczono komórkę elementarną (kolor szary) i obliczane w niej wartości: $E_z|_{i,j}^n$ dla chwil całkowitych (kolor czerwony) oraz $H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ i $H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ dla chwil półkowych (kolor niebieski)

Prowadzi on do następujących formuł:

– dla przypadku dwuwymiarowego (mod TM_z)

$$\begin{aligned}
 H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} &= C_{hh}|_{i,j+1/2}^n H_x|_{i,j+1/2}^{n-1/2} + \\
 &+ C_{he}|_{i,j+1/2}^n \left(\begin{array}{c} E_z|_{i,j}^n - E_z|_{i,j+1}^n + \\ - K_{zx}|_{i,j+1/2}^n \Delta_s \end{array} \right), \\
 H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} &= C_{hh}|_{i+1/2,j}^n H_y|_{i+1/2,j}^{n-1/2} + \\
 &+ C_{he}|_{i+1/2,j}^n \left(\begin{array}{c} E_z|_{i+1,j}^n - E_z|_{i,j}^n + \\ - K_{zy}|_{i+1/2,j}^n \Delta_s \end{array} \right), \\
 E_z|_{i,j}^{n+1} &= C_{ee}|_{i,j}^{n+1/2} E_z|_{i,j}^n + \\
 &+ C_{eh}|_{i,j}^{n+1/2} \left(\begin{array}{c} H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j}^{n+1/2} + \\ + H_x|_{i,j-1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} + \\ - J_{zz}|_{i,j}^{n+1/2} \Delta_s \end{array} \right);
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

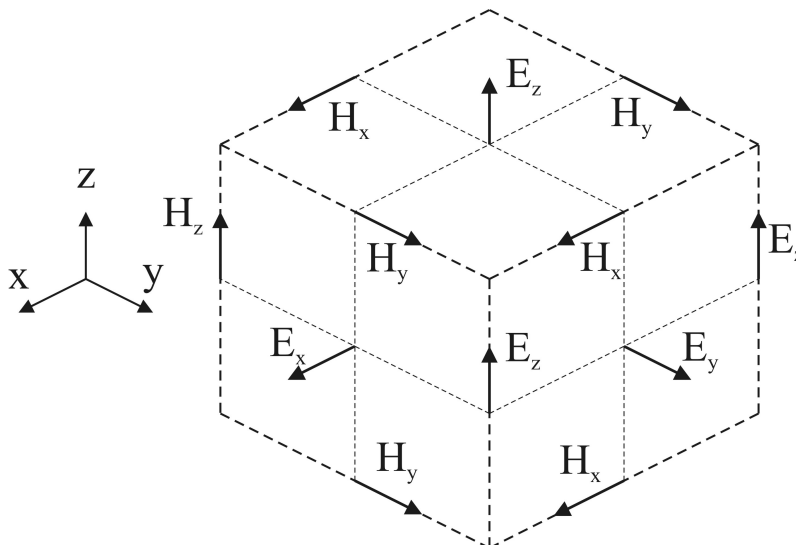
– dla przypadku trójwymiarowego

$$\begin{aligned}
H_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} &= C_{hh}|_{i+1/2,j,k}^n H_x|_{i+1/2,j,k}^{n-1/2} + \\
&+ C_{he}|_{i+1/2,j,k}^n \left(\begin{array}{c} E_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n - E_y|_{i+1/2,j,k-1/2}^n + \\ + E_z|_{i+1/2,j-1/2,k}^n - E_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n + \\ - K_{zx}|_{i+1/2,j,k}^n \Delta_s \end{array} \right), \\
H_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} &= C_{hh}|_{i,j+1/2,k}^n H_y|_{i,j+1/2,k}^{n-1/2} + \\
&+ C_{he}|_{i,j+1/2,k}^n \left(\begin{array}{c} E_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n - E_z|_{i-1/2,j+1/2,k}^n + \\ + E_x|_{i,j+1/2,k-1/2}^n - E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^n + \\ - K_{zy}|_{i,j+1/2,k}^n \Delta_s \end{array} \right), \\
H_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} &= C_{hh}|_{i,j,k+1/2}^n H_z|_{i,j,k+1/2}^{n-1/2} + \\
&+ C_{he}|_{i,j,k+1/2}^n \left(\begin{array}{c} E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^n - E_x|_{i,j-1/2,k+1/2}^n + \\ + E_y|_{i-1/2,j,k+1/2}^n - E_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n + \\ - K_{zx}|_{i,j,k+1/2}^n \Delta_s \end{array} \right), \\
E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1} &= C_{ee}|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} E_x|_{i,j+1/2,k+1/2}^n + \\
&+ C_{eh}|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \left(\begin{array}{c} H_z|_{i,j+1,k+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} + \\ + H_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_y|_{i,j+1/2,k+1}^{n+1/2} + \\ - J_{zx}|_{i,j+1/2,k+1/2}^{n+1/2} \Delta_s \end{array} \right), \\
E_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1} &= C_{ee}|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} E_y|_{i+1/2,j,k+1/2}^n + \\
&+ C_{eh}|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} \left(\begin{array}{c} H_x|_{i+1/2,j,k+1}^{n+1/2} - H_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} + \\ + H_z|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_z|_{i+1,j,k+1/2}^{n+1/2} + \\ - J_{zy}|_{i+1/2,j,k+1/2}^{n+1/2} \Delta_s \end{array} \right), \\
E_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1} &= C_{ee}|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} E_z|_{i+1/2,j+1/2,k}^n + \\
&+ C_{eh}|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} \left(\begin{array}{c} H_y|_{i+1,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_y|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} + \\ + H_x|_{i+1/2,j,k}^{n+1/2} - H_x|_{i+1/2,j+1,k}^{n+1/2} + \\ - J_{zx}|_{i+1/2,j+1/2,k}^{n+1/2} \Delta_s \end{array} \right).
\end{aligned} \tag{4.20}$$

4.1.3. Charakterystyka metody

Algorytm Yee, w przeciwieństwie do metod opartych na równaniu falowym, oblicza wartości \vec{E} i \vec{H} jednocześnie. Zatem można go stosować do ilościowego opisu oddziaływania pola elektromagnetycznego dla szerokiej gamy struktur.

Charakterystyczną cechą algorytmu Yee jest obliczanie składowych elektrycznych pola na zmianę ze składowymi magnetycznymi. Na podstawie znanych wartości \vec{E} obliczane są wartości \vec{H} , które z kolei służą do obliczenia wartości \vec{E} ; jest to mechanizm „żabiego skoku” (ang. leap-frog).



Rysunek 4.3. Komórka elementarna siatki Yee dla trzech wymiarów

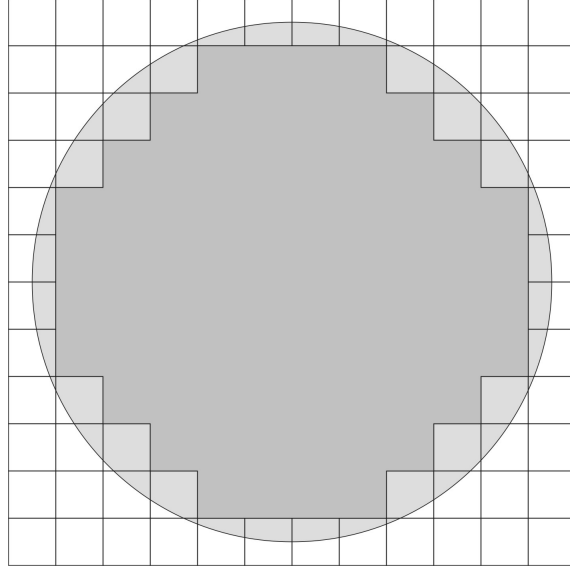
W celu modelowania danej struktury należy „udekorować” siatkę pożądanymi wartościami ε , μ , σ_e oraz σ_h . Jest to jedyny wymagany zabieg, gdyż warunki ciągłości są bezpośrednio wpisane w siatkę. Jednakże, ponieważ siatka jest prostokątna, następuje przybliżenie kształtów struktury. Prowadzi to do niedokładności w obliczeniach, które można zmniejszyć przez zagęszczanie siatki. Przykładowe przybliżenie kołowego przekroju na siatce kwadratowej przedstawione jest na Rysunku 4.4.

4.1.4. Dyspersja numeryczna

Rozwiązywanie równań Maxwella metodą FDTD jest obarczone określonymi błędami. Bardzo dobrze efekt ten można zaobserwować rozważając propagację monochromatycznej fali płaskiej w próżni. Można się spodziewać, że rozwiązywanie izotropowego zagadnienia na siatce posiadającej wyróżnione kierunki może doprowadzić do pewnych niefizycznych własności rozwiązania. Okazuje się, że faktycznie fala propagująca na dyskretnej siatce, zachowuje się tak, jakby rozchodziła się w pewnym „numerycznym eterze” o pewnej dyspersji i anizotropii.

Może to powodować różne artefakty, na przykład poszerzanie się impulsów i niedokładne interferowanie fal wielokrotnie odbitych.

Rozważmy przypadek układu dwuwymiarowego, który łatwo zredukować do jednego wymiaru oraz uogólnić do trzech. Wychodząc z równań (4.6) i zapisując je dla jednorodnego ($\mu = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$) nieabsorbującego ($\sigma_e = \sigma_h = 0$) materiału, a następnie



Rysunek 4.4. Efekt przybliżenia kołowego przekroju na dwuwymiarowej siatce kwadratowej

dyskretyzując otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 \frac{H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j+1/2}^{n-1/2}}{\Delta_t} &= -\frac{1}{\mu} \left(\frac{E_z|_{i,j+1}^n - E_z|_{i,j}^n}{\Delta_s} \right), \\
 \frac{H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i+1/2,j}^{n-1/2}}{\Delta_t} &= \frac{1}{\mu} \left(\frac{E_z|_{i+1,j}^n - E_z|_{i,j}^n}{\Delta_s} \right), \\
 \frac{E_z|_{i,j}^{n+1} - E_z|_{i,j}^n}{\Delta_t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j}^{n+1/2}}{\Delta_s} + \right. \\
 &\quad \left. - \frac{H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta_s} \right).
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Podstawiając do równań (4.21) rozwiązanie próbne postaci:

$$\begin{aligned}
 E_z|_{I,J}^n &= E_{z0} e^{i(\tilde{\omega}n\Delta_t - \tilde{k}_x I \Delta_s - \tilde{k}_y J \Delta)}, \\
 H_x|_{I,J}^n &= H_{x0} e^{i(\tilde{\omega}n\Delta_t - \tilde{k}_x I \Delta_s - \tilde{k}_y J \Delta)}, \\
 H_y|_{I,J}^n &= H_{y0} e^{i(\tilde{\omega}n\Delta_t - \tilde{k}_x I \Delta_s - \tilde{k}_y J \Delta)},
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

gdzie \tilde{k}_x i \tilde{k}_y są odpowiednio składowymi x i y numerycznego wektora falowego, a $\tilde{\omega}$ jest częstością fali, a następnie eliminując amplitudy otrzymujemy relację dyspersyjną:

$$\left[\frac{1}{c\Delta_t} \sin\left(\frac{\tilde{\omega}\Delta_t}{2}\right) \right]^2 = \left[\frac{1}{\Delta_s} \sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta_s}{2}\right) \right]^2 + \left[\frac{1}{\Delta_s} \sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta_s}{2}\right) \right]^2. \tag{4.23}$$

Przechodząc do przypadku granicznego ($\Delta_s \rightarrow 0$ oraz $\Delta_t \rightarrow 0$) otrzymujemy relację dyspersyjną dla jednorodnego ośrodka bezstratnego:

$$\left(\frac{\tilde{\omega}}{c}\right)^2 = \tilde{k}_x^2 + \tilde{k}_y^2. \tag{4.24}$$

Stabilność numeryczna

Wyznaczając z równania (4.23) częstość fali otrzymujemy wyrażenie

$$\tilde{\omega} = \frac{2}{\Delta t} \arcsin(\xi), \quad (4.25)$$

gdzie

$$\xi = \frac{c\Delta t}{\Delta_s} \sqrt{\sin^2\left(\frac{\tilde{k}_x \Delta_s}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\tilde{k}_y \Delta_s}{2}\right)}. \quad (4.26)$$

Łatwo zauważyć, że dla zakresu $0 \leq \xi \leq 1$, wielkość $\tilde{\omega}$ jest czysto rzeczywista. Natomiast dla $\xi > 1$ częstość jest urojona, zatem wraz z propagacją fali zmienia się jej amplituda. Korzystając z relacji

$$\arcsin(\xi) = -i \ln\left(i\xi + \sqrt{1 - \xi^2}\right) \quad (4.27)$$

można $\tilde{\omega}$ wyrazić przez część rzeczywistą i urojoną:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\text{re}} &= \frac{\pi}{\Delta t}, \\ \tilde{\omega}_{\text{im}} &= -\frac{2}{\Delta t} \ln\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Po wstawieniu zależności (4.28) do próbnego rozwiązania (4.22) zauważyć można, że jego amplitudowa część będzie rosła w nieograniczony sposób.

Zatem warunkiem na stabilność metody jest nierówność

$$\xi \leq 1. \quad (4.29)$$

Rozważając maksymalną możliwą wartość ξ , oznaczoną jako ξ_{max} , mamy:

$$\xi \leq \xi_{\text{max}} = \frac{c\Delta t}{\Delta_s} \sqrt{1 + 1} \leq 1. \quad (4.30)$$

Oznaczając wielkość $\frac{c\Delta t}{\Delta_s}$ jako S możemy zapisać dla przypadku dwuwymiarowego

$$S_{2D} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.31)$$

Podobnie można rozważyć przypadki jedno- i trójwymiarowy, co doprowadzi do warunków stabilności

$$\begin{aligned} S_{1D} &\leq 1, \\ S_{3D} &\leq \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Anizotropia numeryczna

Przy użyciu wielkości $N_\lambda = \frac{\lambda}{\Delta_s}$ określającej liczbę węzłów siatki na jednej długości fali oraz wcześniej zdefiniowanej wielkości $S = \frac{c\Delta t}{\Delta_s}$, relację dyspersyjną (4.23) można przepisać w postaci:

$$\frac{1}{S^2} \sin^2\left(\frac{\pi S}{N_\lambda}\right) = \sin^2\left(\frac{\Delta_s \cdot \tilde{k} \cos \phi}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta_s \cdot \tilde{k} \sin \phi}{2}\right), \quad (4.33)$$

Łatwo zauważyć, że w zależności od kąta rozchodzenia się fali (ϕ) otrzymujemy różne zależności. Wyrażenia na długość wektora falowego i prędkość fazową dla dwu najprostszych przypadków przybierają postać:

$$\begin{aligned}
 - \phi = 0 \\
 \tilde{k} &= \frac{2}{\Delta_s} \arcsin \left[\frac{1}{S} \left(\sin \frac{\pi S}{N_\lambda} \right) \right], \\
 \tilde{v}_p &= \frac{\pi c}{N_\lambda \arcsin \left[\frac{1}{S} \left(\sin \frac{\pi S}{N_\lambda} \right) \right]};
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
 - \phi = \frac{\pi}{4} \\
 \tilde{k} &= \frac{2\sqrt{2}}{\Delta_s} \arcsin \left[\frac{1}{S\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi S}{N_\lambda} \right) \right], \\
 \tilde{v}_p &= \frac{\pi c}{N_\lambda \sqrt{2} \arcsin \left[\frac{1}{S\sqrt{2}} \left(\sin \frac{\pi S}{N_\lambda} \right) \right]}.
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Przykładowo, jeżeli rozpatrujemy układ, w którym na najmniejszą długość fali przypada 20 węzłów siatki ($N_\lambda = 20$), a współczynnik S ma wartość 0.5, to prędkość fali propagującej się w próżni w symulacji wyniesie dla $\phi = 0$ oraz $\phi = \frac{\pi}{4}$ odpowiednio 0.9969c oraz 0.9990c. Widzimy zatem, że fala ta propaguje wolniej niż oczekujemy, jednak niedokładności te są rzędu promili, a przez zagęszczanie siatki mogą być jeszcze zmniejszana.

Różnica względna w prędkości między kierunkami $\phi = 0$ oraz $\phi = \frac{\pi}{4}$ wyniosła w tym wypadku $(0.9990 - 0.9969)/0.9990 = 0.0021$ i także może być zmniejszana.

4.2. Źródła promieniowania

Istotnym elementem modelowania metodą FDTD są źródła promieniowania [35]. Początkowo (w chwili startu obliczeń numerycznych) wartości pola elektromagnetycznego są wyzerowane w całym obszarze obliczeniowym. Dopiero z upływem czasu symulacji (w kolejnych krokach czasowych obliczeń) wprowadza się promieniowanie. Do najczęściej używanych metod należą tzw. „źródła twarde” oraz „źródła miękkie”. Innym możliwym podejściem jest rozdzielenie obszaru obliczeniowego na części, gdzie liczone są pole rozproszone oraz pole całkowite (TF/SF – total field/scattered field). Jest ono użyteczne przy wprowadzaniu do obliczeń fali płaskiej lub wiązki gaussowskiej.

4.2.1. Źródła twarde

Twarde źródło promieniowania uzyskuje się przez zadawanie wartości pola w wybranym punkcie siatki Yee, w kolejnych krokach czasowych. Przykładowo, aby wprowadzić energię przez twarde źródło, w jednowymiarowej siatce Yee, w punkcie i_s , należy posłużyć się jedną z zależności:

$$\begin{aligned}
 E_z|_{i_s}^n &= f(n), \\
 H_y|_{i_s}^n &= f(n).
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

Funkcja $f(n)$ może być dobierana według potrzeb.⁵ Przykładowymi są:

⁵Istotnym jest, dla wyeliminowania wysokoczęstotliwościowych składowych widma, by funkcja $f(n)$ przechodziła gładko od(do) zera przy włączaniu(wyłączaniu).

- fala sinusoidalna o częstotliwości ν i amplitudzie A_0

$$f(n) = A_0 \sin(2\pi\nu n \Delta t), \quad (4.37)$$

- impuls gaussowski o maksimum w chwili n_0 o wartości A_0 oraz charakterystycznym czasie zaniku n_δ ⁶

$$f(n) = A_0 \exp \left[- \left(\frac{n - n_0}{n_\delta} \right)^2 \right], \quad (4.38)$$

- złożenie impulsu gaussowskiego i fali sinusoidalnej

$$f(n) = A_0 \exp \left[- \left(\frac{n - n_0}{n_\delta} \right)^2 \right] \cdot \sin [2\pi\nu (n - n_0) \Delta t]. \quad (4.39)$$

Tak zadane źródła wydają się być bardzo dogodne, jednakże posiadają one pewne wady. Jeżeli fala wyemitowana przez takie źródło odbije się od badanej struktury, a następnie powróci do źródła ulegnie ponownemu odbiciu. Twarde źródła zachowują się jak idealne przewodniki elektryczne (lub magnetyczne).

4.2.2. Źródła miękkie

Miękkie źródła promieniowania uzyskuje się przez zadawanie wartości prądu w wybranym punkcie siatki Yee, w kolejnych krokach czasowych. W algorytmie uzyskuje się taki efekt poprzez dodawanie do wielkości obliczonej według algorytmu poprawki związanej z prądem. Przykładowo, aby wprowadzić prąd elektryczny w punkcie i_s , do wielkości $\widetilde{E}_z|_{i_s}^n$ obliczonej według jednej z formuł (4.17), (4.19), (4.20) dodaje się wartość zależną od czasu.

$$E_z|_{i_s}^n = \widetilde{E}_z|_{i_s}^n + f(n). \quad (4.40)$$

Wszystkie wcześniejsze uwagi dotyczące funkcji $f(n)$ zachowują ważność.

Zaletą tak wprowadzonych źródeł jest ich transparentność. Nie generują one ponownych odbić.

4.3. Warunki brzegowe

W wielu zagadnieniach rozwiązywanych metodą przyrostów skończonych rozproszone na elementach badanej struktury FEM po pewnym czasie symulacji osiągną granice obszaru obliczeniowego. Aby zasymulować jego rozciąganie się w nieskończoność, należy zastosować odpowiednie warunki brzegowe, które pozwolą fali na opuszczenie obszaru całkowania.

Jednym z rozwiązań jest zastosowanie w warstwie przy granicy obszaru odpowiednio skonstruowanego operatora. Do najważniejszych rozwiązań typu analitycznego należą radiacyjne warunki brzegowe (RBC – radiation boundary conditions) Baylissa i Turkela [41,42], oraz Higdon [43,44], a także absorbujące warunki brzegowe (ABC – absorbing boundary conditions) Engquista i Majdy [45].

W innym podejściu umieszcza się przy granicach obszaru obliczeniowego warstwy absorbujące, które jednocześnie nie wykazują odbicia. Dopasowanie impedancji zmniejsza odbicie do zera dla prostopadłego padania (2.16). Dla innych kątów odbicie może być znaczące. Rozwiązaniem może być rozszerzenie obszaru obliczeniowego na tyle, by fale opuszczające go, padały na granice praktycznie prostopadle. Jednakże, powoduje to znaczące powiększenie obszaru całkowania i zwiększenie wymaganej do obliczeń pamięci.

⁶Warunek $n_0 > 3n_\delta$ powinien być zachowany, by zapewnić gładkie włączenie źródła.

Poszukiwano zatem innych rozwiązań spełniających następujące warunki:

- brak odbicia na granicach pomiędzy wewnątrz obszaru obliczeniowego, a warstwami brzegowymi,
- pełna absorpcja promieniowania w warstwie brzegowej,
- nieznaczna grubość tych warstw.

4.3.1. Warstwy idealnie dopasowane

W roku 1994 Berenger [46] zaproponował warstwy idealnie dopasowane (PML – perfectly matched layers). Przedstawił on sposób na zminimalizowanie odbicia od warstwy absorbującej, niezależnie od kąta padania. Pierwotny pomysł Berengera, który opiera się na matematycznym przeformułowaniu równań Maxwella, został następnie rozwinięty.

Przedstawiono jakie właściwości musiałby mieć ośrodek anizotropowy, aby spełniać oczekiwania postawione przed warstwami PML [47], a następnie zaproponowano jednoosiowe warstwy idealnie dopasowane (UPML – uniaxial PML) [48].

W pierwotnym podejściu, Berenger zaproponował rozbić każdą z sześciu składowych pola elektromagnetycznego na dwie składowe, związane z operatorami różniczkowania względem różnych współrzędnych przestrzennych. Dla dwuwymiarowego przypadku modu TM_z równania (4.6) przepisane tu w przypadku bez prądów:

$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma_h H_x &= -\frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma_h H_y &= \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma_e E_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y},\end{aligned}\tag{4.41}$$

przyjmą następującą postać:

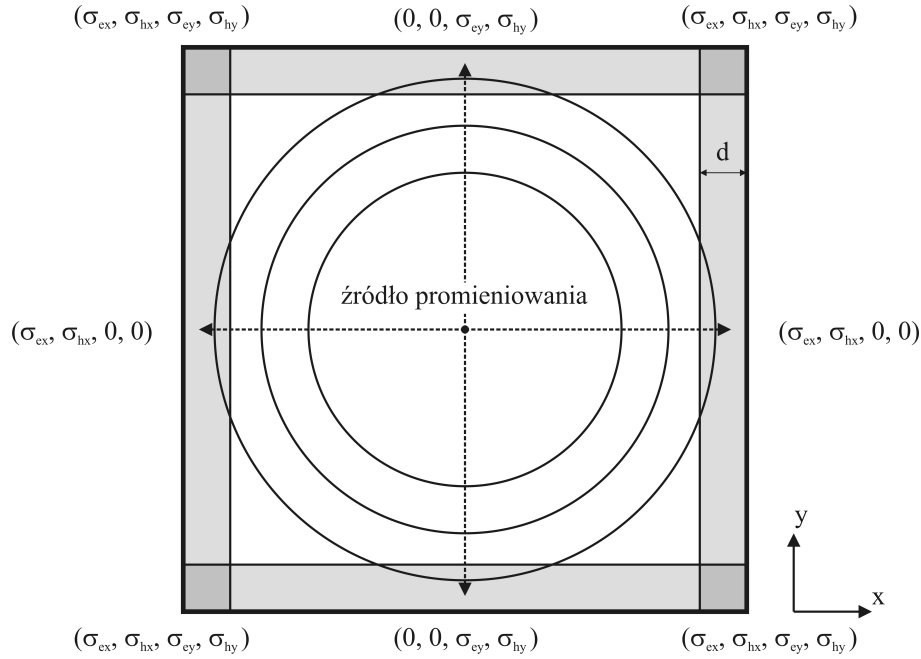
$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma_{h_y} H_x &= -\frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial y}, \\ \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma_{h_x} H_y &= \frac{\partial (E_{zx} + E_{zy})}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_{e_x} E_{zx} &= \frac{\partial H_y}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_{e_y} E_{zy} &= -\frac{\partial H_x}{\partial y}.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Można pokazać [35, 46], że dla zaimplementowanych w ten sposób warstw, dopasowanych ze względu na impedancje, uzyskuje się brak odbicia bez względu na kąt fali padającej.

Struktura obszaru obliczeniowego z wykorzystaniem PML

Jak można zauważyć, dla warstw Berengera dwa parametry materiałowe (σ_e oraz σ_h) zostały zastąpione przez cztery. Są one odpowiedzialne za pochłanianie FEM propagującej się w wybranym kierunku. Explicite, różne od zera wartości σ_{e_x} oraz σ_{h_x} powodują absorbowanie fal propagujących się w kierunku osi x , natomiast różne od zera wartości σ_{e_y} oraz σ_{h_y} fal propagujących się w kierunku osi y .

Rysunek 4.5. przedstawia schematycznie obszar całkowania, z wydzieleniem właściwego obszaru symulacji oraz warstw Berengera, z zaznaczonymi różnymi od zera wartościami



Rysunek 4.5. Schematyczna struktura obszaru obliczeniowego z wykorzystaniem PML. Kolory oznaczają: biały – właściwy obszar symulacji, szary warstwy absorbujące. Na granicy obszaru obliczeniowego umiejscowiony jest idealny przewodnik elektryczny (PEC – perfect electric conductor) zaznaczony linią pogrubioną

$(\sigma_{e_x}, \sigma_{h_x}, \sigma_{e_y}, \sigma_{h_y})$, a także idealny przewodnik elektryczny (PEC – perfect electric conductor) umieszczony na granicy obszaru obliczeniowego.

Grubość warstwy i rozkład wewnętrzny parametrów

Warstwa PML ma skończoną grubość d , a za nią znajduje się PEC. Zatem fala wnika do warstwy, gdzie jest w znaczącym stopniu absorbowana, odbija się od granicy obszaru obliczeniowego, a następnie ulega dalszej absorpcji i powraca do właściwego obszaru symulacji z amplitudą zmniejszoną o 5–6 rzędów wielkości. Współczynnik odbicia zależy od grubości warstwy, parametrów $(\sigma_{e_x}, \sigma_{h_x}, \sigma_{e_y}, \sigma_{h_y})$, oraz kąta padania.

Wartości parametrów, których używa się w symulacjach, są wynikiem kompromisu. Mamy bowiem następujące przeciwne tendencje dotyczące:

- grubości warstw:
 - większa grubość – większa absorpcja,
 - mniejsza grubość – mniejsze zapotrzebowanie na pamięć;
- wartości $(\sigma_{e_x}, \sigma_{h_x}, \sigma_{e_y}, \sigma_{h_y})$:
 - większa wartość – lepsza absorpcja w warstwie,
 - mniejsza wartość – lepsze wnikanie FEM do warstwy.

Można pokazać, że optymalnym rozwiązaniem jest stosowanie stopniowo rosnących rozkładów parametrów $(\sigma_{e_x}, \sigma_{h_x}, \sigma_{e_y}, \sigma_{h_y})$. Stosuje się rozkłady geometryczne i wielomianowe.

W swojej implementacji zdecydowałem się na kwadratowy rozkład parametru σ_e [35,49]

$$\sigma_e(x) = \left(\frac{x}{d}\right)^2 \sigma_{e,\max}, \quad (4.43)$$

gdzie:

- x – odlegość od granicy właściwego obszaru symulacji,
- d – grubość warstwy
- $\sigma_{e,\max}$ – maksymalna wartość przewodnictwa elektrycznego.

Maksymalna wartość przewodnictwa elektrycznego obliczana była z zależności

$$\sigma_{e,\max} = -\frac{3 \ln(r)}{2\eta d}, \quad (4.44)$$

gdzie r oznacza dopuszczalne odbicie.

Wielkość σ_h , była związana z σ_e przez równość

$$\sigma_h = \sigma_e \frac{\mu}{\varepsilon}. \quad (4.45)$$

4.4. Dyspersja

Kolejną istotną właściwością materiałów, którą należy uwzględnić w symulacjach jest dyspersja, czyli częstotliwościowa zależność przenikalności. W przypadku metamateriałów dyspersja nabiera szczególnego znaczenia, gdyż jej obecność jest konieczna, by uzyskać ujemne wartości ε i μ .

4.4.1. Modele

Najczęściej stosowanymi modelami opisującymi dyspersję względnej przenikalności elektrycznej są:

- model Debye'a,

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \sum_{p=1}^P \frac{\Delta\varepsilon_p}{1 + i\omega\tau_p}, \quad (4.46)$$

gdzie:

- ε_∞ – przenikalność względna dla nieskończonej częstotliwości,
- $\Delta\varepsilon_p$ – zmiana przenikalności elektrycznej, związana z p -tym biegunem,
- τ_p – czas relaksacji p -ego biegunu;

- model Lorentza,

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty + \sum_{p=1}^P \frac{\omega_p^2 \Delta\varepsilon_p}{\omega_p^2 + 2i\omega\delta_p - \omega^2}, \quad (4.47)$$

gdzie:

- ε_∞ – przenikalność względna dla nieskończonej częstotliwości,
- $\Delta\varepsilon_p$ – zmiana przenikalności elektrycznej, związana z p -tą parą biegunów,
- ω_p – p -ta częstość rezonansowa,
- δ_p – współczynnik tłumienia;

- model Drudego,

$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_\infty - \sum_{p=1}^P \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\gamma_p}, \quad (4.48)$$

gdzie:

- ε_∞ – przenikalność względna dla nieskończonej częstotliwości,
- ω_p – p -ta częstość rezonansowa,
- γ_p – odwrotność czasu relaksacji p -ego biegunu.

4.4.2. Pomocnicze równania różniczkowe

Jednym ze sposobów uwzględnienia dyspersji jest rozwiązywanie pomocniczych równań różniczkowych (ADE – auxiliary differential equations). Przedstawione w niniejszym podrozdziale podejście zostało pierwotnie wprowadzone w pracach [51, 52], a następnie rozwinięte w artykule [53].

W ośrodkach dyspersyjnych prawo Ampere’a można zapisać w postaci

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma_e \vec{E} + \sum_{p=1}^P \vec{J}_p, \quad (4.49)$$

gdzie \vec{J}_p jest prądem związanym z p -tym biegunem.

W rozważaniach dotyczących metamateriałów przyjmuje się, że przenikalność elektryczna i magnetyczna opisane są zależnością dyspersyjną, zgodną z modelem Drudego [54, 55]. Zatem prąd \vec{J}_p spełnia następującą zależność:

$$\vec{J}_p e^{i\omega t} = -i\omega \varepsilon_0 \left(\frac{\omega_p^2}{\omega^2 - i\omega\gamma_p} \right) \vec{E} e^{i\omega t}. \quad (4.50)$$

Po przemnożeniu obustronnie przez mianownik, zastosowaniu transformaty Fouriera oraz odrzuceniu stałego rozwiązania otrzymujemy następujące równanie:

$$\frac{\partial \vec{J}_p}{\partial t} + \gamma_p \vec{J}_p = \varepsilon_0 \omega_p^2 \vec{E}. \quad (4.51)$$

Przy założeniach, że w dyspersji uwzględniamy tylko jeden biegun⁷, możemy powtórzyć równania (4.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} \left(-\nabla \times \vec{E} - \vec{K} \right), \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\nabla \times \vec{H} - \vec{J} \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

przy czym występujące w nich wartości \vec{J} , \vec{K} spełniają pomocnicze równania różniczkowe (ADE)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \gamma_e \vec{J} &= \varepsilon_0 \omega_{pe}^2 \vec{E}, \\ \frac{\partial \vec{K}}{\partial t} + \gamma_h \vec{K} &= \mu_0 \omega_{ph}^2 \vec{H}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Dyskretyzacja w wypadku dwuwymiarowym

Rozważając przypadek dwuwymiarowy (mod TM_z), równania (4.6) należy uzupełnić o równania pomocnicze. Pełen układ równań przyjmie zatem postać [55]

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_x}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial E_z}{\partial y} - K_x \right), & \frac{\partial K_x}{\partial t} + \gamma_h K_x &= \mu_0 \omega_{ph}^2 H_x, \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - K_y \right), & \frac{\partial K_y}{\partial t} + \gamma_h K_y &= \mu_0 \omega_{ph}^2 H_y, \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - J_z \right), & \frac{\partial J_z}{\partial t} + \gamma_e J_z &= \varepsilon_0 \omega_{pe}^2 E_z. \end{aligned} \quad (4.54)$$

⁷Pomijamy zatem indeks p .

Składowe pola wyznaczamy na odpowiednich węzłach sieci (patrz Rysunek 4.2.), natomiast prądy wyznaczamy w wierzchołkach komórki elementarnej (współrzędne całkowite), przy czym składowe K_x i K_y w chwilach całkowitych, a składową J_z w chwilach półokwowych.

Otrzymujemy zatem następujące formuły dla obszaru wykazującego dyspersję:

$$\begin{aligned}
 H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} &= H_x|_{i,j+1/2}^{n-1/2} + \\
 &+ C_{he} \left(E_z|_{i,j}^n - E_z|_{i,j+1}^n \right) + \\
 &+ C_{hk} \left(K_x|_{i,j+1}^n + K_x|_{i,j}^n \right), \\
 H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} &= H_y|_{i+1/2,j}^{n-1/2} + \\
 &+ C_{he} \left(E_z|_{i+1,j}^n - E_z|_{i,j}^n \right) + \\
 &+ C_{hk} \left(K_y|_{i+1,j}^n + K_y|_{i,j}^n \right), \\
 E_z|_{i,j}^{n+1} &= E_z|_{i,j}^n + \\
 &+ C_{eh} \left(H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} - H_y|_{i-1/2,j}^{n+1/2} + \right. \\
 &\quad \left. + H_x|_{i,j-1/2}^{n+1/2} - H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} \right) + \\
 &+ C_{ej} J_z|_{i,j}^{n+1/2}, \\
 K_x|_{i,j}^{n+1} &= C_{kk} K_x|_{i,j}^n + C_{kh} \left(H_x|_{i,j+1/2}^{n+1/2} + H_x|_{i,j-1/2}^{n+1/2} \right), \\
 K_y|_{i,j}^{n+1} &= C_{kk} K_y|_{i,j}^n + C_{kh} \left(H_y|_{i+1/2,j}^{n+1/2} + H_y|_{i-1/2,j}^{n+1/2} \right), \\
 J_z|_{i,j}^{n+1/2} &= C_{jj} J_z|_{i,j}^{n-1/2} + C_{je} E_z|_{i,j}^n,
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 C_{he} &= \frac{\Delta_t}{\mu_0 \Delta_s}, \\
 C_{hk} &= -\frac{\Delta_t}{2\mu_0}, \\
 C_{eh} &= \frac{\Delta_t}{\varepsilon_0 \Delta_s}, \\
 C_{ej} &= -\frac{\Delta_t}{\varepsilon_0}, \\
 C_{kk} &= \left(1 - \frac{\Delta_t \gamma_h}{2} \right) \Big/ \left(1 + \frac{\Delta_t \gamma_h}{2} \right), \\
 C_{kh} &= \Delta_t \mu_0 \omega_{ph}^2 \Big/ \left(1 + \frac{\Delta_t \gamma_h}{2} \right), \\
 C_{jj} &= \left(1 - \frac{\Delta_t \gamma_e}{2} \right) \Big/ \left(1 + \frac{\Delta_t \gamma_e}{2} \right), \\
 C_{je} &= \Delta_t \varepsilon_0 \omega_{pe}^2 \Big/ \left(2 + \Delta_t \gamma_e \right).
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Rozdział 5.

Wybrane wyniki modelowania numerycznego

Niniejszy rozdział przedstawia wybrane wyniki modelowania numerycznego otrzymane przy użyciu własnej implementacji metody FDTD w środowisku MATLAB z uwzględnieniem dyspersji (Rozdział 4.4.), przy wykorzystaniu warstw idealnie dopasowanych Berengera (Rozdział 4.3.).

5.1. Wyniki modelowania jednowymiarowego

Wstępnym testem napisanego programu było odtworzenie wyników zaprezentowanych przez Ziolkowskiego [54]. Modelował on propagację FEM przez płytkę metamateriałową, w której przyjął dyspersję opisaną modelem Drudego (4.48). Schemat układu, w którym przeprowadzono symulacje przedstawiony jest na Rysunku 5.1.

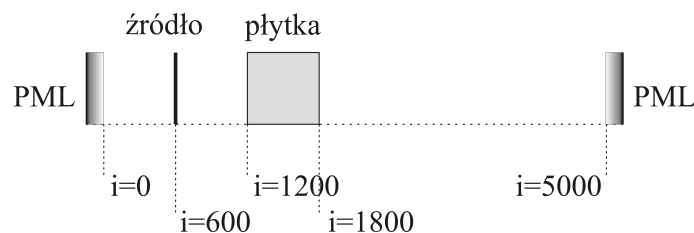
Przyjęta przez Ziolkowskiego częstotliwość źródła ν_0 była równa 30 GHz i została wybrana arbitralnie. Jednakże odpowiednie jej przeskalowanie pozwala na przejście do innych zakresów widma elektromagnetycznego.

Jej wybór pociągnął za sobą następujące wartości parametrów:

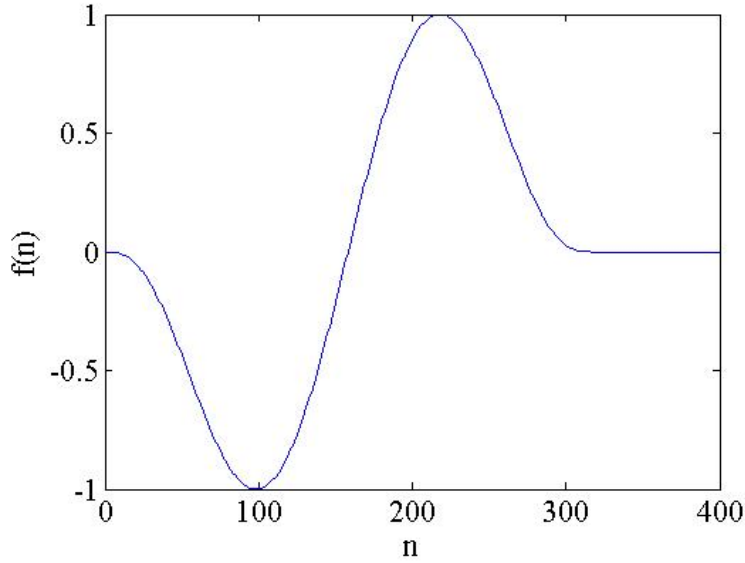
- częstota – $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = 6.28 \cdot 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$,
- długość fali – $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0} = 10^{-2} \text{ m}$.

W pracy [54] przyjęto 300 węzłów siatki przypadających na jedną długość fali oraz wartość współczynnika S równą 0.95. Zatem wartości kroków przestrzennego oraz czasowego wyniosły $\Delta_s = 3.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$, a $\Delta_t = 1.06 \cdot 10^{-13} \text{ s}$.

Zastosowane były dwa rodzaje źródeł. Jednym było źródło pracujące impulsowo, o cen-



Rysunek 5.1. Schemat modelowanego układu. Zaznaczono: absorbujące warstwy PML (grubość 20 komórek), źródło promieniowania w punkcie $i = 600$, płytkę metamateriału o grubości 600 komórek



Rysunek 5.2. Zależność funkcji $f(n)$, określonej równaniem (5.1), od n ; wartość stałej $n_T = 158$

tralnej częstotliwości ν_0 , opisane zależnością:

$$f(n) = \begin{cases} \sqrt{7} (7/6)^3 \cdot \left(\frac{n - n_T}{n_T}\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{n - n_T}{n_T}\right)^2\right]^3 & \text{dla } 0 \leq n \leq 2n_T \\ 0 & \text{dla } n > 2n_T \end{cases}, \quad (5.1)$$

gdzie czas połowy impulsu $n_T \Delta_t = \frac{1}{2} \frac{1}{\nu_0}$; wykres funkcji $f(n)$ znajduje się na Rysunku 5.2.

Natomiast drugim było źródło fali sinusoidalnej, o częstotliwości ω_0 , z obwiednią, opisane zależnością:

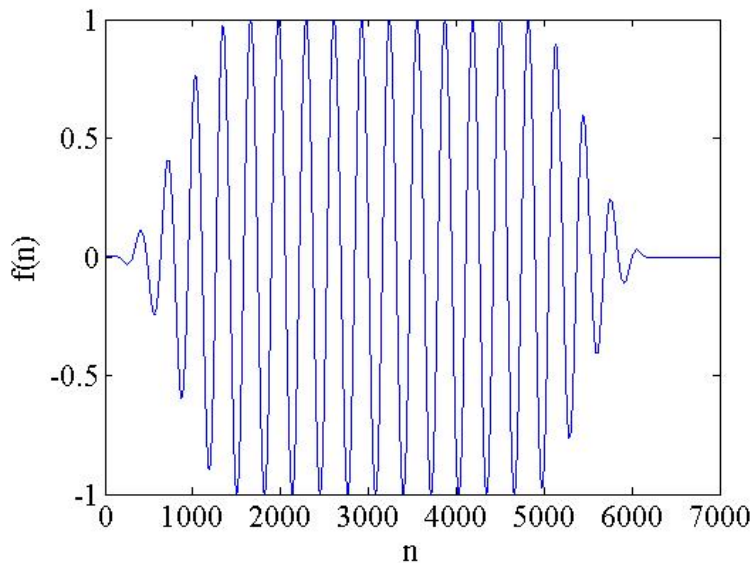
$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0 \\ g_{\text{on}}(n) \cdot \sin\left(2\pi \frac{n}{n_T}\right) & \text{dla } 0 \leq n < q \cdot n_T \\ \sin\left(2\pi \frac{n}{n_T}\right) & \text{dla } q \cdot n_T \leq n \leq (q+r) \cdot n_T \\ g_{\text{off}}(n) \cdot \sin\left(2\pi \frac{n}{n_T}\right) & \text{dla } (q+r) \cdot n_T < n \leq (q+r+q) \cdot n_T \\ 0 & \text{dla } n > (q+r+q) \cdot n_T \end{cases}, \quad (5.2)$$

gdzie okres źródła $n_T \Delta_t = \frac{1}{\nu_0}$, natomiast liczby q oraz r określają przez liczbę okresów, czas włączania(wyłączania) źródła oraz czas jego pracy. Obwiednie są wielomianami określonymi przez formuły:

$$\begin{aligned} g_{\text{on}}(n) &= (10w_{\text{on}}^3 - 15w_{\text{on}}^4 + 6w_{\text{on}}^5), \\ g_{\text{off}}(n) &= 1 - (10w_{\text{off}}^3 - 15w_{\text{off}}^4 + 6w_{\text{off}}^5), \end{aligned} \quad (5.3)$$

gdzie

$$\begin{aligned} w_{\text{on}}(n) &= \frac{n}{q \cdot n_T}, \\ w_{\text{off}}(n) &= \frac{n - (q+r) \cdot n_T}{q \cdot n_T}. \end{aligned} \quad (5.4)$$



Rysunek 5.3. Zależność funkcji $f(n)$, określonej równaniem (5.2), od n ; wartości stałych: $n_T = 316$, $q = 5$, $r = 10$

Tablica 5.1. Parametry dyspersji

	ω_{pe}	ω_{ph}	$\varepsilon(\omega_0)$	$\mu(\omega_0)$
1.	$\sqrt{2}\omega_0$	0	-1	1
2.	0	$\sqrt{2}\omega_0$	1	-1
3.	$\sqrt{2}\omega_0$	$\sqrt{2}\omega_0$	-1	-1

Wykres funkcji $f(n)$ znajduje się na Rysunku 5.3.

5.1.1. Odbicie impulsu

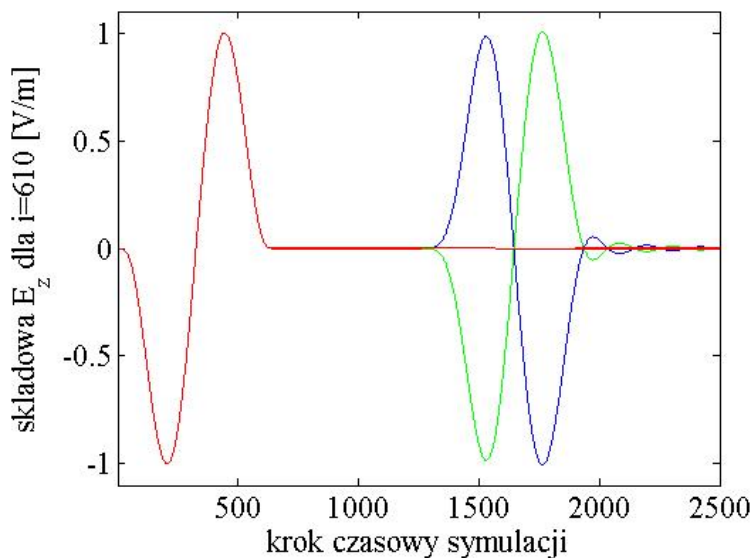
W pierwszej kolejności zbadano odbicie krótkiego impulsu od płytki wykonanej z bezstratnego metamateriału. Ze względu na dyspersję w płytce rozpatrzono następujące przypadki (wartości parametrów ω_{pe} oraz ω_{ph} w Tablicy 5.1.):

1. ujemna przenikalność elektryczna ($\varepsilon(\omega_0) = -1$),
2. ujemna przenikalność magnetyczna ($\mu(\omega_0) = -1$),
3. ujemne obie przenikalności ($\varepsilon(\omega_0) = -1$, $\mu(\omega_0) = -1$).

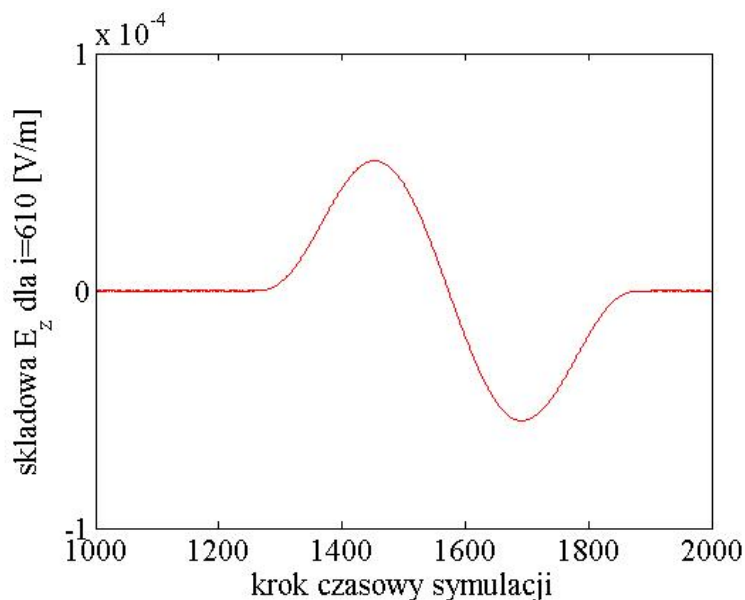
Rezultaty przedstawione na Rysunku 5.4. są zgodne z oczekiwaniami. Po lewej stronie wykresu widzimy impuls propagujący się ze źródła, natomiast po prawej impuls odbite. Widzimy, że całkowite odbicie nastąpiło, gdy jedna z przenikalności była ujemna. Natomiast dla przypadku warstwy o $\varepsilon = -1$ oraz $\mu = -1$ pojawiło się niewielkie odbicie (Rysunek 5.5.), które jest artefaktem komputerowym, będącym konsekwencją skokowej zmiany parametrów materiałowych.

5.1.2. Propagacja fali

Kolejnym wykonanym eksperymentem komputerowym było modelowanie propagacji fali sinusoidalnej określonej wzorem (5.2). Obliczenia wykonano dla twardego źródła fali, którego czas włączania/wyłączania wynosił po 5 okresów, natomiast całkowity czas działania 20 okresów.



Rysunek 5.4. Wartość składowej elektrycznej pola w punkcie $i = 610$ w zależności od czasu. Ujemna przenikalność elektryczna – kolor niebieski; ujemna przenikalności magnetyczna – kolor zielony; obie przenikalności ujemne – kolor czerwony. W lewej części wykresu obserwujemy falę opuszczającą źródło. Po pewnym czasie do obserwowanego punktu powraca impuls w całości odbity od płytki (prawa strona wykresu). Gdy ujemna jest przenikalność elektryczna impuls zmienia fazę, natomiast gdy ujemna jest przenikalność magnetyczna faza składowej elektrycznej się nie zmienia. Dla warstwy o obu przenikalnościach ujemnych praktycznie nie obserwujemy odbicia (por. Rysunek 5.5.)



Rysunek 5.5. Wartość składowej elektrycznej pola w punkcie $i = 610$ w zależności od czasu; obserwujemy niewielkie odbicie, związane z niedokładnościami dyskretyzacji, amplituda o cztery rzędy mniejsza, niż dla fali padającej

Rysunek 5.6. przedstawia rozkład pola elektromagnetycznego w wybranych chwilach czasu. Obserwujemy kolejno:

- włączanie źródła – $n = 1000$ (5.6.a.),
- wnikanie impulsu do płytki – $n = 2000, n = 3000$ (5.6.b., 5.6.c.),
- propagację w płytce z ujemną prędkością fazową – $n = 5000$ (5.6.d.),
- opuszczanie płytki przez falę – $n = 7000$ (5.6.e.),
- opuszczanie obszaru obliczeniowego – $n = 9000$ (5.6.f.).

Na podstawie Rysunku 5.6. można oprzeć następujące stwierdzenia, które są w zgodzie z oczekiwaniami.

Amplituda składowej magnetycznej, obliczana algorytmem Yee, spełnia równość

$$E_z = -vB_y, \quad (5.5)$$

gdzie $v = c$ oraz $B_y = \mu_0 H_y$. Znając amplitudę źródła wybraną jako 1 V/m, możemy oszacować, że amplituda składowej magnetycznej wynosi:

$$H_y \approx -\frac{1 \text{ V/m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s } 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}} = 2.65 \cdot 10^{-3} \text{ A/m}, \quad (5.6)$$

co pokrywa się z danymi zaprezentowanymi na wykresie.

Zauważamy, że impuls wniknął praktycznie w całości do warstwy metamateriału, gdyż dla dominującej częstotliwości impulsu metamateriał jest dopasowany ze względu na impedencję do próżni. Po przeciwnej stronie impuls opuszcza warstwę bez odbicia.

Jednocześnie obserwujemy, że pewna część energii niesionej przez impuls została zaabsorbowana w metamateriale. Na Rysunku 5.6.d. można zauważyć, że amplituda impulsu przed płytką jest większa, niż po przejściu przez nią. Współczynnik transmisji obliczony jako stosunek energii impulsu mierzonej za płytką do energii fali przed nią wyniósł 70%. Energia była obliczana jako całka względem czasu wektora Poyntinga w punktach przed i za płytką.

5.1.3. Wektor Poyntinga

Wektor Poyntinga \vec{S} określony jest równaniem

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (5.7)$$

W zaimplementowanym przypadku pole elektromagnetyczne ma składowe E_z oraz H_y . Wektor Poyntinga ma zatem tylko składową S_x , określoną zależnością:

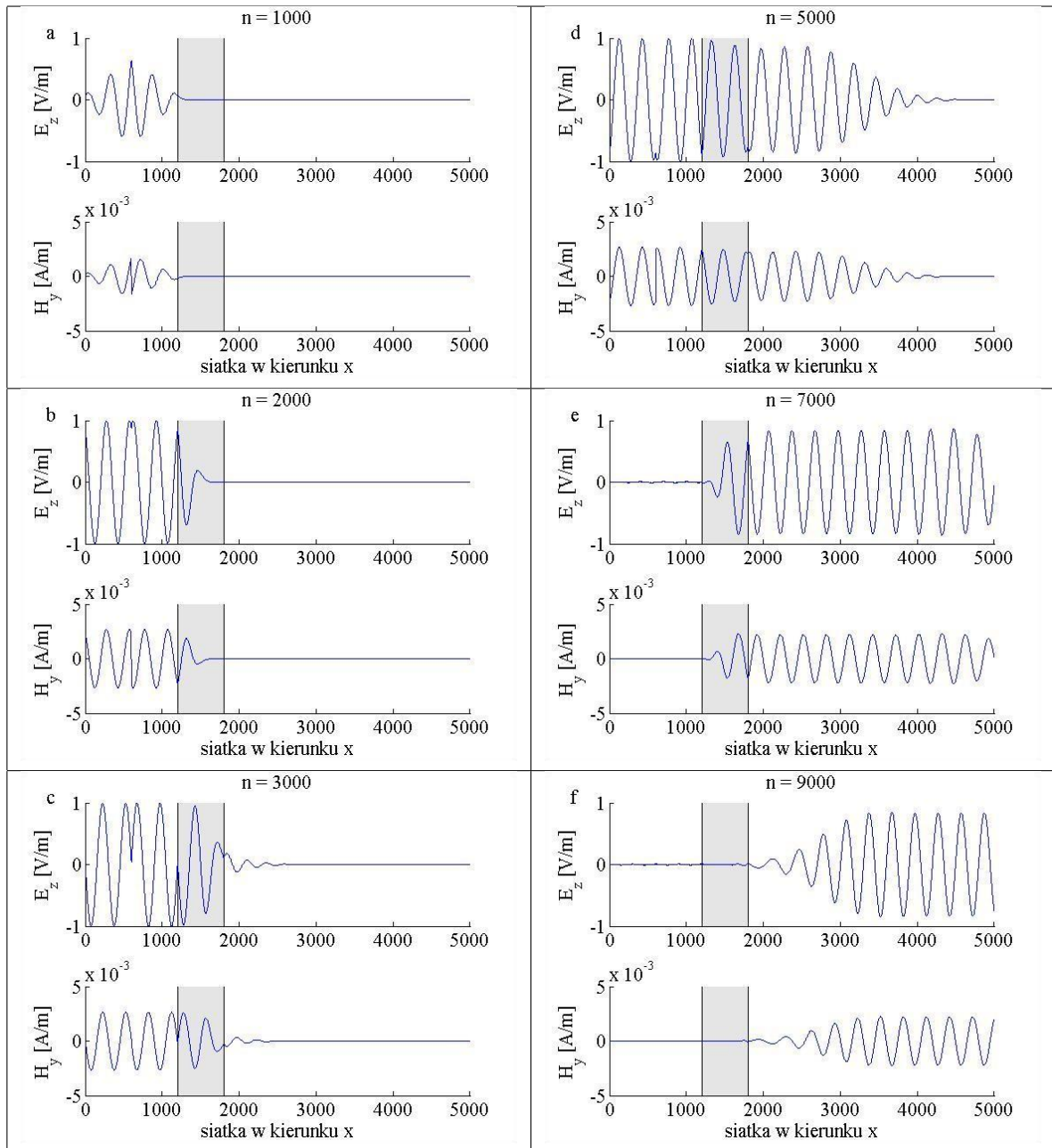
$$|\vec{S}| = S_x = -E_z \cdot H_y. \quad (5.8)$$

Wzór ten pozwala na proste obliczanie wektora Poyntinga w wybranym punkcie siatki. Zależności czasowe \vec{S} w trzech wybranych punktach wewnątrz płytki, w przypadku metamateriału bez absorpcji ($\omega_{pe} = \omega_{ph} = \sqrt{2}\omega_0, \gamma_e = \gamma_h = 0$) oraz z uwzględnieniem absorpcji ($\omega_{pe} = \omega_{ph} = \sqrt{2}\omega_0, \gamma_e = \gamma_h = 10^{-2}\omega_p$) przedstawione są na Rysunkach 5.7. i 5.8. Linia niebieska pokazuje wektor Poyntinga przy lewym brzegu płytki, zielona w środku, natomiast, czerwona przy prawym brzegu warstwy metamateriału.

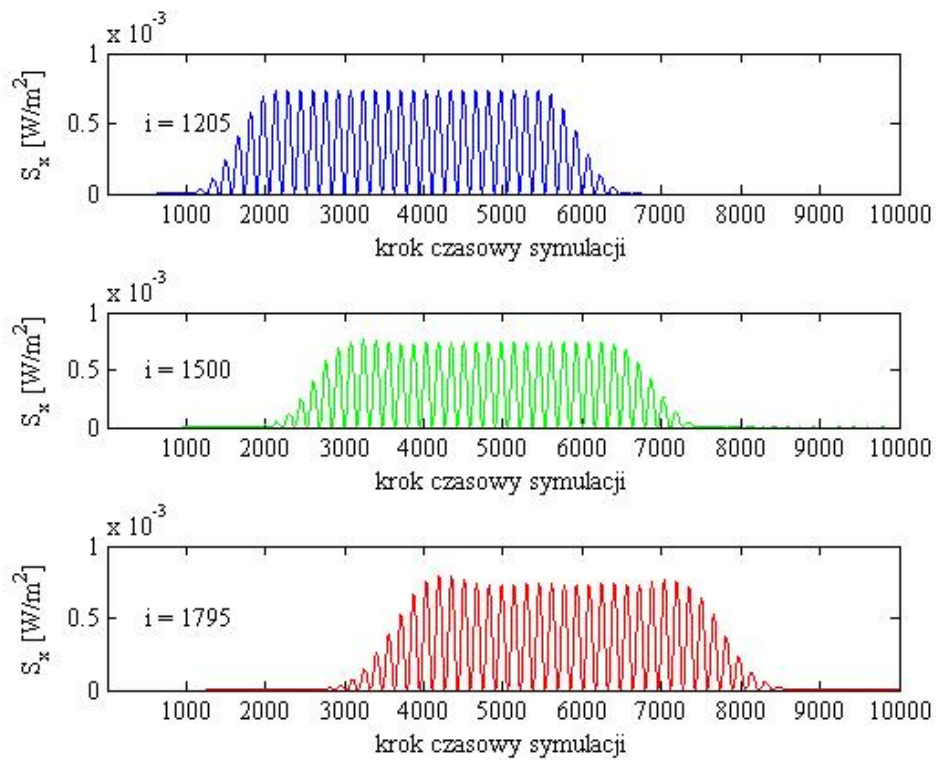
Ponieważ impuls jest skończony posiada w swoim widmie częstotliwościowym, obok dominującej składowej o częstości ω_0 , także inne składowe [56]. Różne składowe posiadają niejednakowe prędkości rozchodzenia się, co powoduje zniekształcanie impulsu. Zaobserwować możemy, że powstają dwa piki, związane odpowiednio z włączeniem i wyłączeniem źródła.

W przypadku z uwzględnioną absorpcją obserwujemy silne zmniejszanie amplitudy wektora Poyntinga.

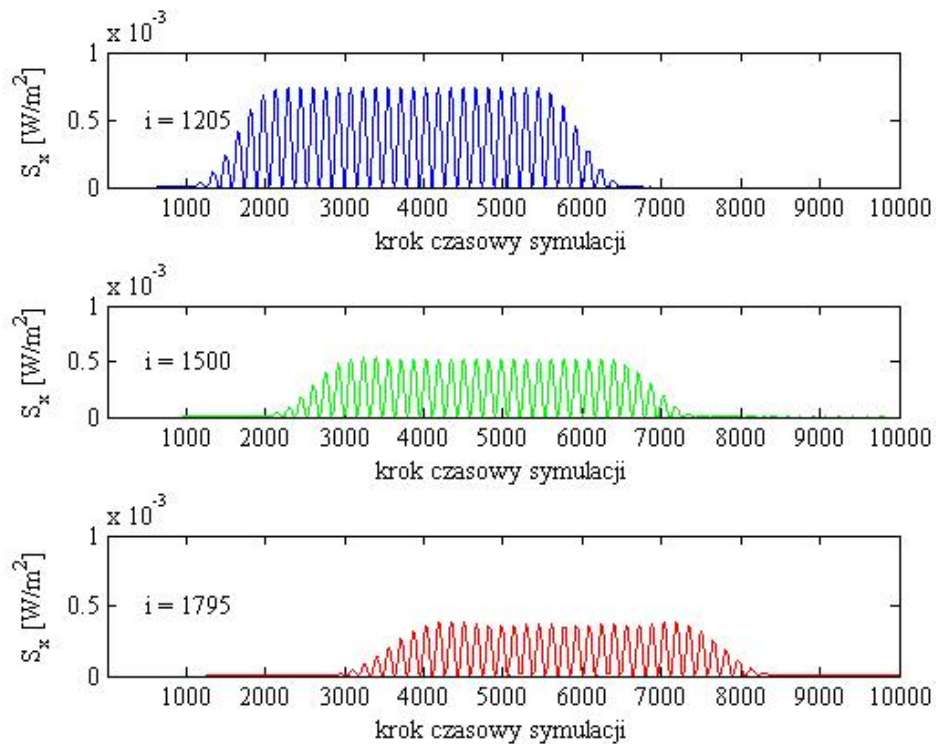
5.1. WYNIKI MODELOWANIA JEDNOWYMIAROWEGO



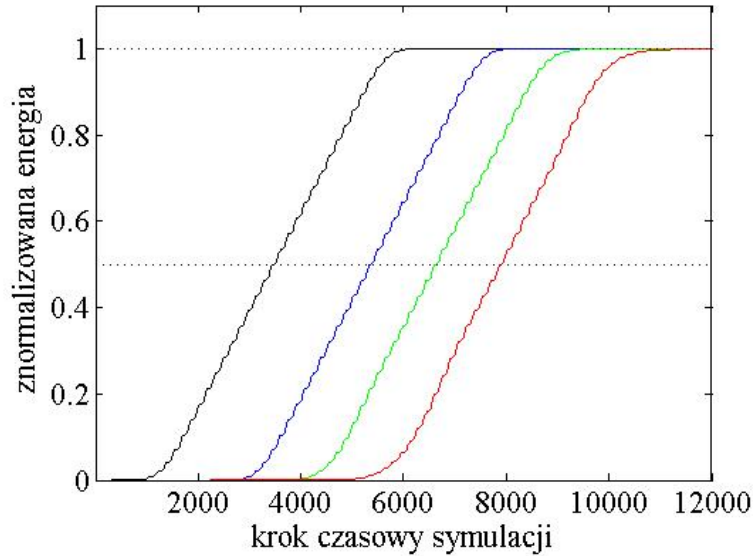
Rysunek 5.6. Propagacja fali sinusoidalnej (łącznie 20 okresów, w tym po 5 na włączenie/wyłączenie) przez metamateriał ($\omega_{pe} = \omega_{ph} = \sqrt{2}\omega_0$, $\gamma_e = \gamma_h = 5 \cdot 10^{-3}\omega_p$), składowe E_z i H_y w wybranych chwilach czasu; wykresy pochodzą z animacji `film1d.avi` znajdującej się na dołączonej płycie CD



Rysunek 5.7. Wektor Poyntinga mierzony w trzech punktach wewnątrz płytki metamateriałowej nie wykazującej absorpcji. Kolor niebieski $i = 1205$; kolor zielony $i = 1500$; kolor czerwony $i = 1795$



Rysunek 5.8. Wektor Poyntinga mierzony w trzech punktach wewnątrz płytki metamateriałowej z silną absorpcją. Kolor niebieski $i = 1205$; kolor zielony $i = 1500$; kolor czerwony $i = 1795$



Rysunek 5.9. Znormalizowana energia przeniesiona przez impuls w zależności od czasu. Kolor czarny – punkt $i = 900$, kolor niebieski – punkt $i = 2700$, bez płytki; kolor zielony – punkt $i = 2700$, płytki o grubości $600\Delta_s$; kolor czerwony – punkt $i = 2700$, płytki o grubości $1200\Delta_s$

5.1.4. Prędkość grupowa

Prędkość grupowa określona jest zależnością [54]

$$v_g(\omega) = \left[\frac{\partial k}{\partial \omega} \right]^{-1} = c \left[\frac{\partial [\omega n(\omega)]}{\partial \omega} \right]^{-1}. \quad (5.9)$$

W przypadku metamateriału o parametrach dyspersji: $\omega_{pe} = \omega_{ph} = \omega_p$, $\gamma_e = \gamma_h = 0$, otrzymujemy

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon\mu} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (5.10)$$

a co za tym idzie

$$v_g(\omega) = c \left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)^{-1}. \quad (5.11)$$

Spodziewamy się zatem, że prędkość grupowa impulsu sinusoidalnego o częstotliwości ω_0 , w metamateriale, dla którego $\omega_p = \sqrt{2}\omega_0$ wyniesie $\frac{1}{3}c$.

W celu obliczenia prędkości grupowej impulsu w modelowanym układzie zmierzono energię, jaka została przeniesiona impulsem przez dwa „detektory”. Umieszczono je w punktach siatki o współrzędnych, odpowiednio $i = 900$ oraz $i = 2700$. Wykonano pomiary w trzech przypadkach:

- brak płytki metamateriałowej,
- płytki o grubości $600 \cdot \Delta_s$,
- płytki o grubości $1200 \cdot \Delta_s$.

Energia została znormalizowana względem całej energii niesionej przez impuls. Uzyskane zależności wykreślone są na Rysunku 5.9. Ze względu na brak absorpcji energia jest transportowana w 100%.

Na Rysunku 5.9. widzimy, że detektor przed płytką zauważa impuls najwcześniej. Natomiast detektor umieszczony w punkcie $i = 2700$ mierzy energię z pewnym opóźnieniem, zależnym od obecności i grubości warstwy metamateriałowej.

Za charakterystyczny moment służący do porównywania czasu dotarcie impulsu do detektora wybrano chwilę, w której połowa energii impulsu znajduje się za punktem detekcji. Odczytano, po ilu krokach połowa energii impulsu została przetransportowana przez punkt $i = 2700$. Różnicę w czasie dla różnych grubości płytek przeliczono na prędkość impulsu. Różnica ta wyniosła $1284 \cdot \Delta_t$, zatem

$$\frac{600 \cdot \Delta_s}{\alpha c} - \frac{600 \cdot \Delta_s}{c} = 1284 \Delta_t, \quad (5.12)$$

gdzie:

- $600 \cdot \Delta_s$ – różnica grubości płytek,
- $1284 \cdot \Delta_t$ – różnica czasów,
- c – prędkość impulsu w próżni,
- αc – prędkość impulsu w metamateriale.

Po przekształceniu

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1284}{600} \underbrace{\frac{c \Delta_t}{\Delta_s}}_{S=0.95} = \frac{1284}{600} \cdot 0.95, \quad (5.13)$$

skąd

$$\alpha = 0.3294 \quad (5.14)$$

Zmierzona w eksperymencie wartość prędkości grupowej wyniosła $0.3294c$. Wynik ten pokrywa się z oczekiwanym z dokładnością 1%.

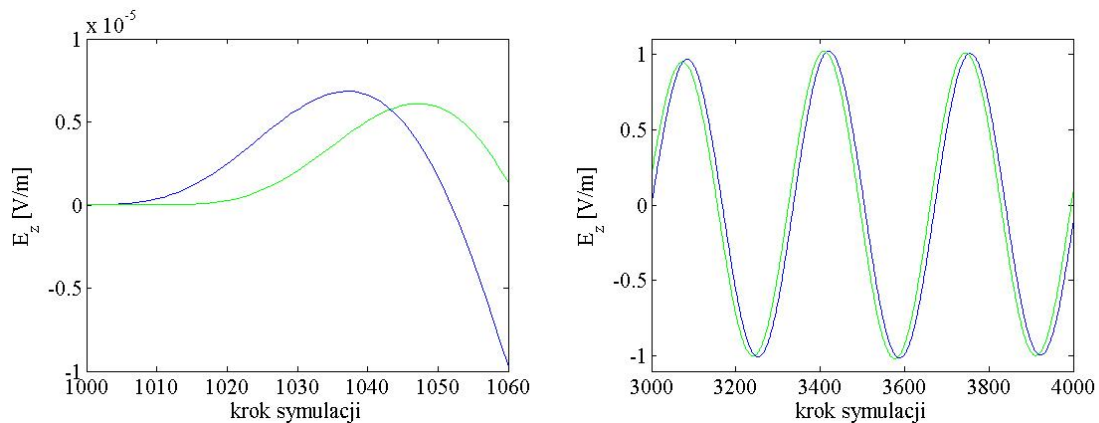
5.1.5. Ujemna prędkość fazowa

Celem ostatniego eksperymentu komputerowego było potwierdzenie ujemnej wartości prędkości fazowej w metamateriale. Wykresy zaprezentowane na Rysunku 5.10. pokazują zależność wartości składowej E_z pola elektromagnetycznego wewnątrz płytki. Są to dwa blisko siebie położone punkty (w odległości $10 \cdot \Delta_s$). Widzimy, że impuls, zgodnie z oczekiwaniami, wcześniej pojawia się w punkcie bliższym źródła ($i = 1500$, kolor niebieski). Jednak po ustabilizowaniu się ruchu falowego widzimy, że faza porusza się od punktu dalszego (linia zielona) do bliższego źródła. Potwierdza to fakt istnienia ujemnej prędkości fazowej w metamateriale o ujemnych przenikalnościach. Fakt ten nie przeczy zasadzie przyczynowości.

5.1.6. Podsumowanie

Otrzymane wyniki w przypadku jednowymiarowym świadczą o poprawności samodzielnie zaprogramowanego i zaimplementowanego algorytmu FDTD. Stwierdzenie to potwierdzają następujące efekty lub dane:

1. Zgodnie z oczekiwaniami FEM nie propaguje się w metamateriale, którego przenikalność magnetyczna jest dodatnia, a przenikalność elektryczna ujemna albo odwrotnie; (Rozdział 5.1.1., Rysunek 5.5.).
2. Całkowita transmisja (współczynnik transmisji równy jeden, brak odbicia) FEM przez granice dwóch ośrodków o dopasowanych impedancjach elektromagnetycznych; (Rozdział 5.1.2., Rysunki 5.6., 5.9.).
3. Prędkość grupowa fali EM wyznaczona na podstawie rezultatów symulacji komputerowych pozostaje w bardzo dobrej zgodności z oczekiwaną wartością; (Rozdział 5.1.4., Rysunek 5.9.).
4. Wartość prędkości fazowej FEM jest ujemna, co zgadza się z przewidywaniami teoretycznymi [2]; (Rozdział 5.1.5., Rysunek 5.10.).



Rysunek 5.10. Wartość składowej E_z pola elektromagnetycznego od czasu. Kolor niebieski odpowiada punktowi $i = 1500$; kolor zielony $i = 1510$. Wykresy przedstawiają wczesną i późną odpowiedź pola w tych punktach

Warto dodać, że otrzymane i krótko scharakteryzowane powyżej wyniki przeprowadzonych w tym rozdziale testów numerycznych pozostają w całkowitej zgodności z rezultatami opublikowanymi w wiodących pracach w tej dziedzinie [54, 57].

5.2. Wyniki modelowania dwuwymiarowego

Poniżej prezentujemy wybrane wyniki dotyczące właściwości propagacji FEM w układach dwuwymiarowych zawierających płytkę metamateriału umieszczoną w próżni. Jako źródła FEM użyto miękkiego źródła promieniowania opisanego w Rozdziale 4.2.2.

Badany układ otoczony był warstwami idealnie dopasowanymi o grubości 10 komórek (Rozdział 4.3.), a ujemne wartości przenikalności elektrycznej i magnetycznej były wprowadzone przez odpowiedni dobór parametrów dyspersyjnych metamateriału (Rozdział 4.4.). Schemat obszaru modelowania z zaznaczonymi elementami układu przedstawia Rysunek 5.11.

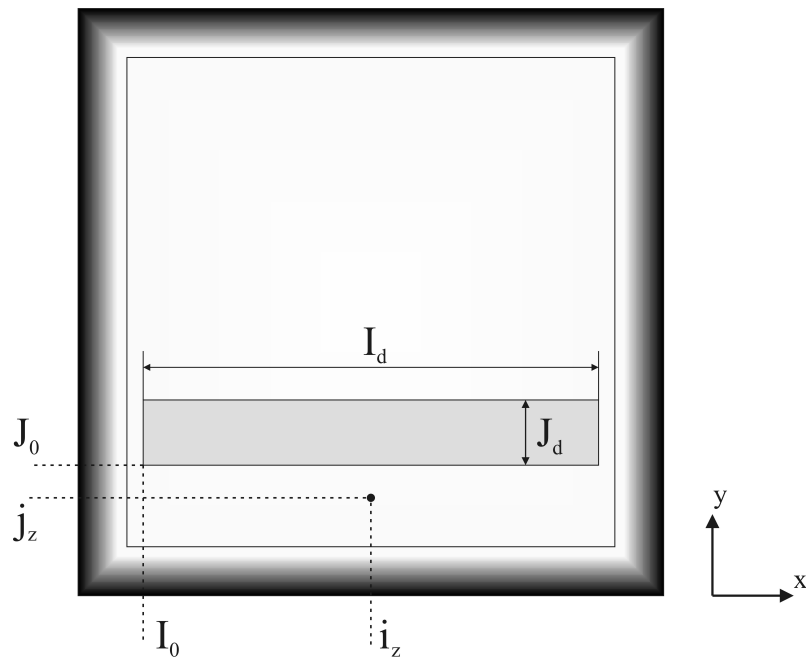
Wykonano serie doświadczeń numerycznych dla różnych:

- parametrów dyspersyjnych metamateriału,
- odległości źródła od płytki,
- grubości płytki.

5.2.1. Idealna soczewka

W pierwszym z eksperymentów komputerowych modelowano oddziaływanie promieniowania pochodzącego z punktowego źródła z płytką metamateriału. Dla częstości fali sinusoidalnej (ω_0) emitowanej przez źródło (5.2), przenikalności elektryczna i magnetyczna przyjmują wartości -1 . Wartości parametrów symulacji przyjęto jak w artykule [54] i zebrano w Tabelicy 5.2.

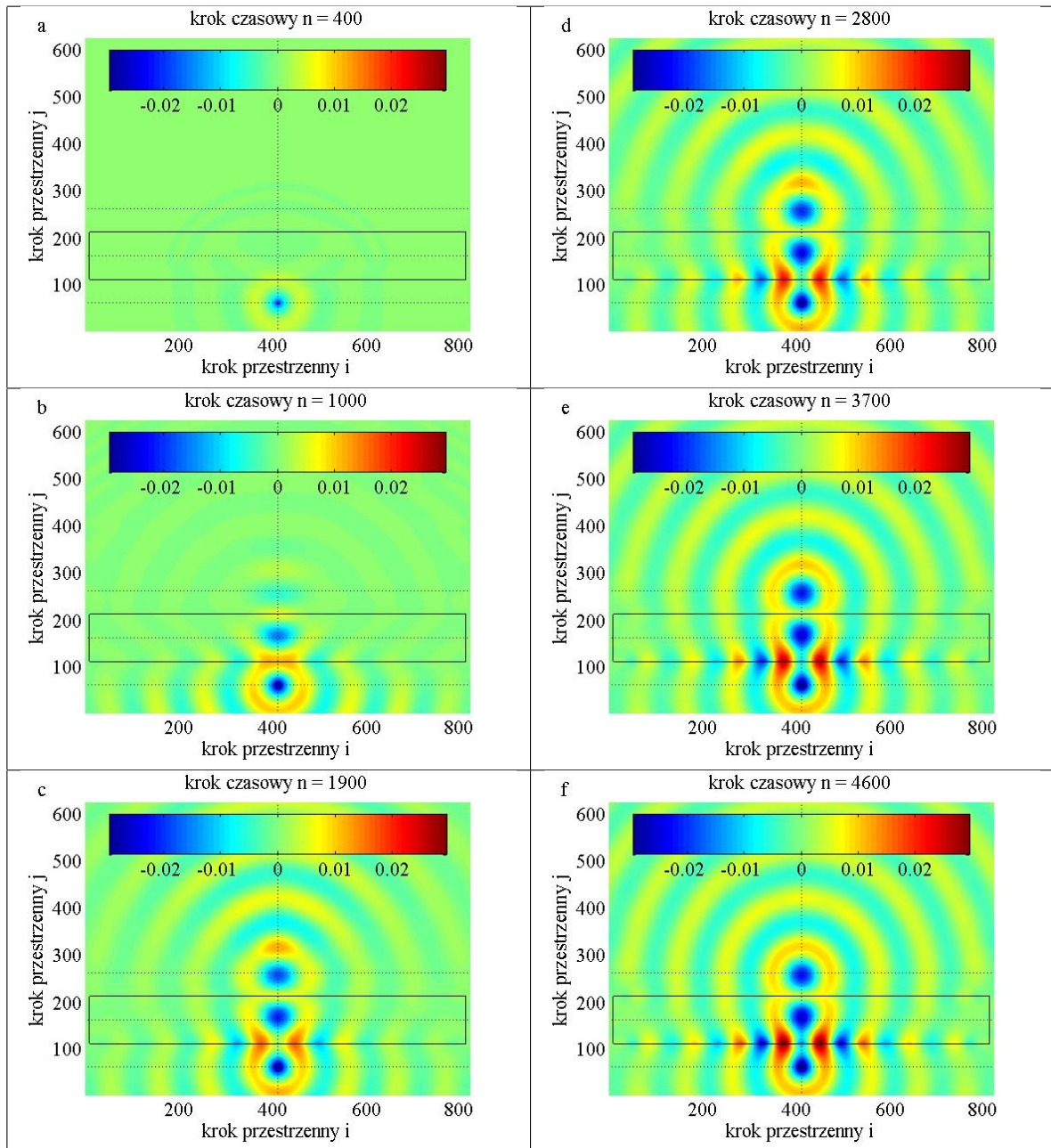
Na Rysunku 5.12. obserwujemy stopniowe włączanie źródła (5.12.a. oraz 5.12.b.), które trwa przez 5 okresów, czyli $5 \cdot 316 \cdot \Delta_t = 1580 \cdot \Delta_t$. W kolejnych wybranych chwilach czasowych ($n = 1900$, $n = 2800$, $n = 3700$, $n = 4600$) widzimy, że obraz źródła powstaje w pobliżu spodziewanych ognisk soczewki, którą jest płytka płasko-równoległa [23]. Jednakże na Rysunku 5.13. widać, że w innych chwilach czasowych $n = 4500$, $n = 4700$ odtworzenie obrazu nie jest idealne, co jest spowodowane silną dyspersją.



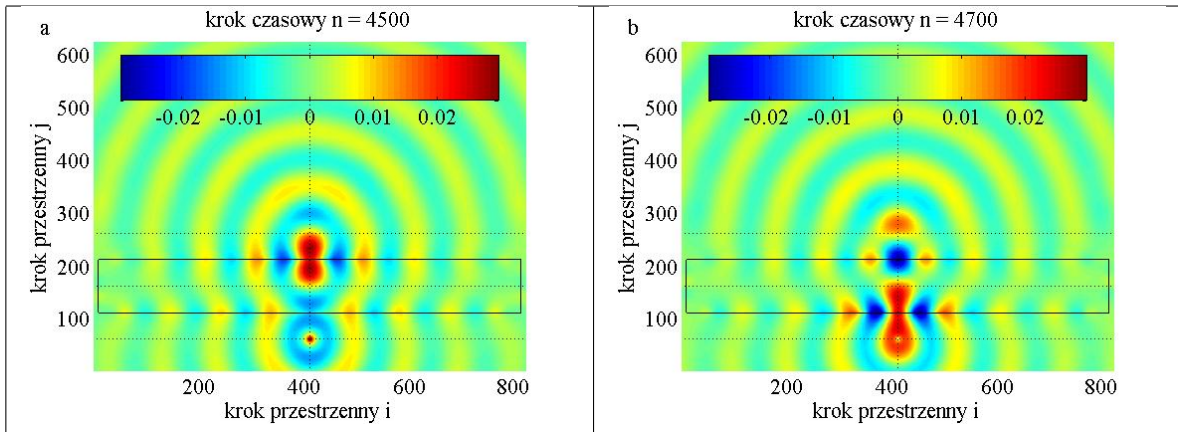
Rysunek 5.11. Schemat modelowanego układu dwuwymiarowego. Płytkę metamateriału o grubości $J_d \cdot \Delta_s$ i szerokości $I_d \cdot \Delta_s$ o początku w punkcie (I_0, J_0) zaznaczoną na szaro; miękkie źródło punktowe (i_z, j_z) ; na brzegach obszaru obliczeniowego znajdują się warstwy idealnie dopasowane Berengera o grubości 10 komórek

Tablica 5.2. Parametry przyjęte w symulacji przedstawionej na Rysunku 5.12.

parametr	wartość
N_λ	100
S	$0.95/\sqrt{2}$
ω_{pe}	$\sqrt{2}\omega_0$
ω_{ph}	$\sqrt{2}\omega_0$
γ_e	0
γ_h	0
i_z	411
j_z	61
I_0	11
J_0	111
I_d	800
J_d	100



Rysunek 5.12. Składowa E_z [V/m] w wybranych chwilach czasu; fala sinusoidalna pochodząca z miękkiego źródła (5 okresów na włączenie, praca ciągła przez cały czas trwania symulacji) przez warstwę metamateriału ($\omega_{pe} = \omega_{ph} = \sqrt{2}\omega_0$, $\gamma_e = \gamma_h = 0$); linia ciągła otacza metamateriał, natomiast linie przerywane wskazują pozycję źródła oraz spodziewanych obrazów źródła; kolorowa skala określa wartość składowej elektrycznej pola; wykresy pochodzą z animacji film2d.avi znajdującej się na dołączonej płycie CD



Rysunek 5.13. Składowa E_z [V/m] w wybranych chwilach czasu ($n = 4500$, $n = 4700$); pozostałe parametry jak na Rysunku 5.12.

Tablica 5.3. Parametry układu dla symulacji przedstawionych na Rysunku 5.15.

Opis	γ_e	γ_h	J_0	J_d
absorpcja	$5 \cdot 10^{-3} \omega_{pe}$	$5 \cdot 10^{-3} \omega_{ph}$	111	100
większa grubość	0	0	111	200
większa grubość i odległość	0	0	211	200

Rysunek 5.14. przedstawia wartości składowej E_z pola elektromagnetycznego w chwili $n = 4600$, w trzech przekrojach Rysunku 5.12.f. płaszczyznami o współrzędnych $j = 61$, $j = 161$ oraz $j = 261$. Zauważamy, że wartości składowej elektrycznej pola elektromagnetycznego mierzone w płaszczyźnie odpowiadającej źródłu (linia niebieska) zostają następnie odtworzone w płaszczyznach pierwszego ogniska (linia zielona) oraz drugiego ogniska (linia czerwona). Zauważalne rozbieżności (Rysunek 5.14.) wynikają z unoszenia części energii fali przez fale powierzchniowe ($j = 111$) [54, 57]. W metamateriale nie nastąpiła absorpcja, gdyż $\gamma_e = \gamma_h = 0$.

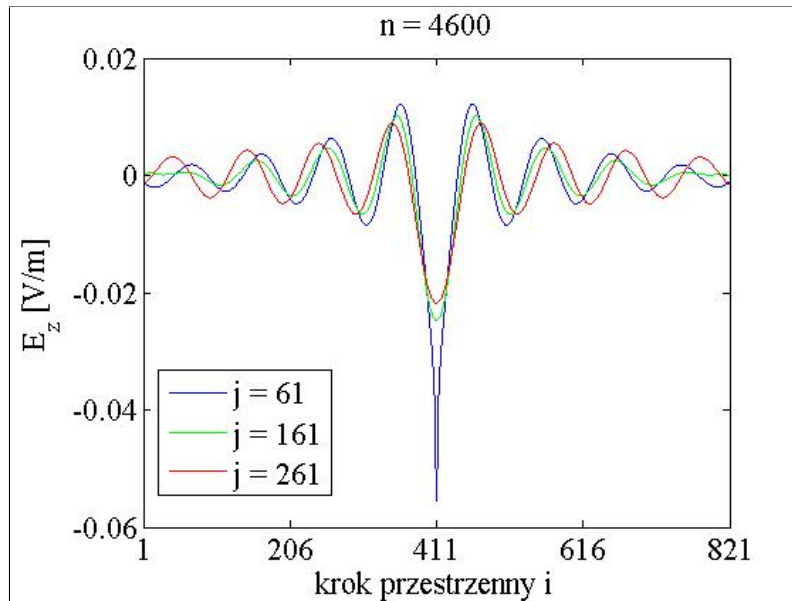
Kolejne eksperymenty numeryczne zostały wykonane dla konfiguracji układu zbliżonej do przedstawionych powyżej. W celu zbadania wpływu:

- absorpcji,
- grubości płytki metamateriałowej,
- odległości źródła od płytki

na rozkład pola elektromagnetycznego wykonano kolejne trzy eksperymenty numeryczne dla konfiguracji układów zbliżonych do przedstawionych wyżej. Parametry symulacji zebrano w Tablicy 5.3. Podano w niej wartości tylko tych parametrów, które są różne od przedstawionych w Tablicy 5.2. Rozkłady pola elektromagnetycznego w wybranej chwili czasu $n = 5800$ przedstawione są na Rysunku 5.15.

Porównanie Rysunków 5.12.f. oraz 5.15.a. prowadzi do wniosku, że wprowadzenie niewielkiej absorpcji (Rysunek 5.15.a.) nie wpływa znacząco na rozkład pola w odniesieniu do przypadku bez absorpcji (Rysunek 5.12.f.).

Dwukrotne zwiększenie grubości płytki powoduje przesunięcie ogniska (i obrazu, który tworzy się w ognisku) w spodziewane miejsca (Rozdział 2.5.1. i Rysunek 2.10.), co ilustrują Rysunki 5.15.b. i 5.15.c. Rozkłady pola elektromagnetycznego przedstawione na tych Rysunkach różnią się zasadniczo. Tym niemniej wartości pola elektrycznego w przekrojach płaszczyznami pierwszego i drugiego ogniska (linie zielona i czerwona) są praktycznie identyczne. Jest to wynikiem zastosowania płytek o takich samych grubościach. Zmiana fazy



Rysunek 5.14. Składowa E_z [V/m] dla chwili czasu $n = 4600$, w punktach leżących w płaszczyźnie: źródła, $j = 61$, kolor niebieski; ogniska wewnątrz warstwy, $j = 161$, kolor zielony; ogniska za płytką $j = 261$, kolor czerwony

Tablica 5.4. Parametry dyspersji użyte w symulacji metamateriału o dużej wartości bezwzględnej współczynnika załamania

Opis	$\omega_{pe} = \omega_{ph}$	$\gamma_h = \gamma_e$	$n(\omega_0)$
bez absorpcji	$\sqrt{7}\omega_0$	0	-6
z absorpcją	$\sqrt{7}\omega_0$	$5 \cdot 10^{-3}\omega_{pe}$	-6

FEM na następujących drogach:

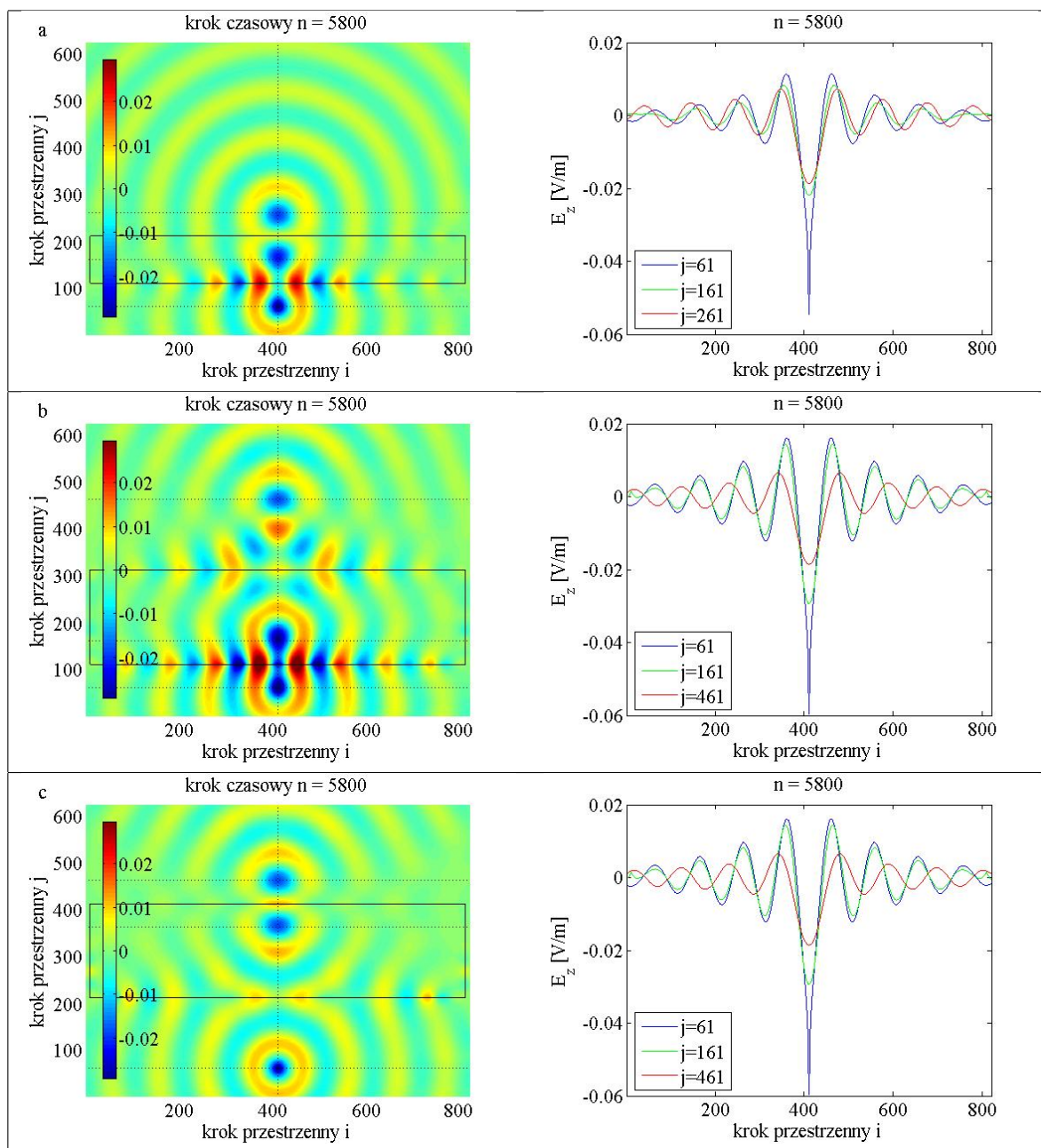
- od źródła do pierwszego ogniska,
- od pierwszego do drugiego ogniska,
- od źródła do drugiego ogniska

jest równa zero, ponieważ zmiana fazy w płytce ma wartość ujemną, która w pełni kompensuje zmianę fazy fali w próżni.

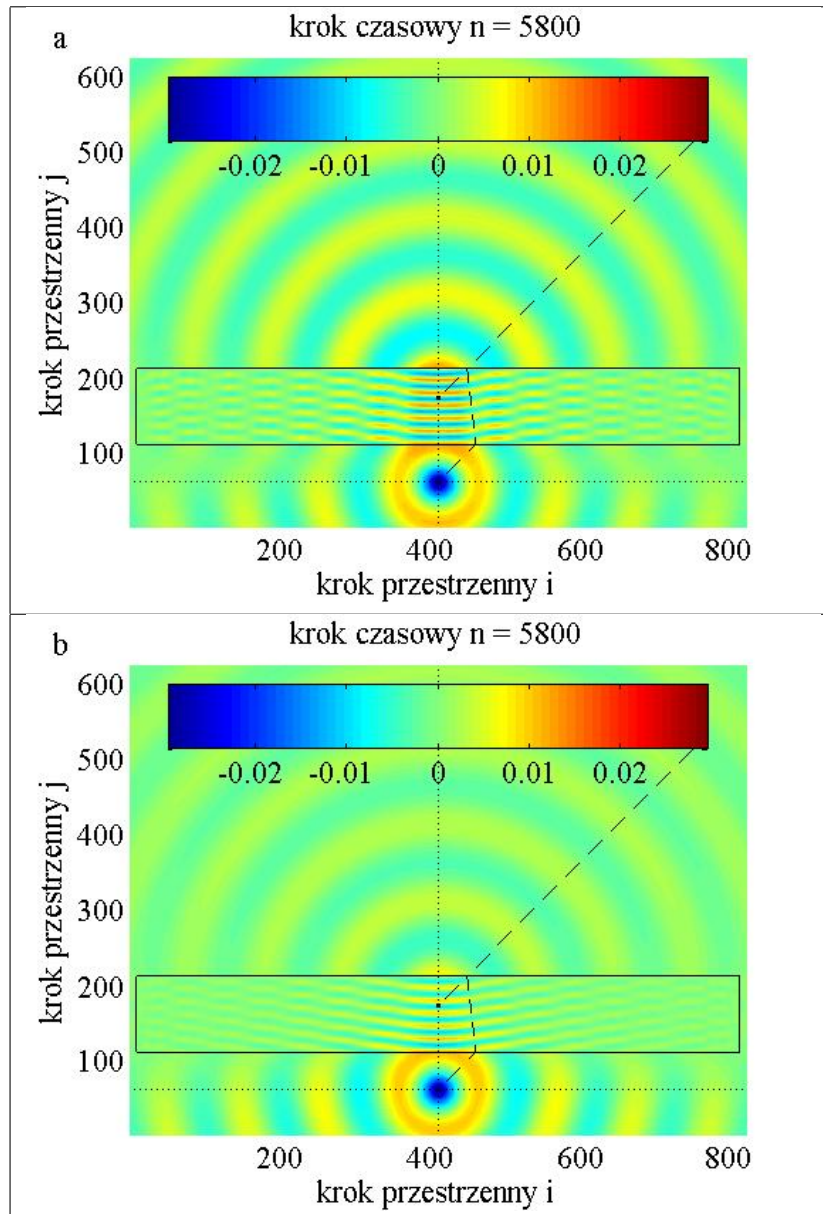
5.2.2. Metamateriał o dużej wartości bezwzględnej współczynnika załamania

W kolejnych eksperymentach modelowano rozkład pola elektromagnetycznego w układzie o geometrii z Rysunku 5.12. Rozdziału 5.2.1., przyjmując odmienne parametry dyspersji. Ich wartości dobrano tak, aby współczynnik załamania był równy -6 . Zestawienie parametrów odpowiadających wynikom przedstawionym na Rysunku 5.16. zawiera Tablica 5.4.

Widzimy, że ze względu na dużą wartość współczynnika załamania następuje znaczące (sześciokrotne) skrócenie długości fali w płytce. Linią przerywaną zaznaczono bieg wybranego promienia ze źródła. Obserwujemy jego dwukrotne załamanie oraz dalszy bieg w próżni po opuszczeniu warstwy. Zauważamy, że płytka jest zbyt cienka, by udało się uzyskać ognisko w jej wnętrzu. Na Rysunku 5.16. linia przerywana oznacza bieg promienia padającego na metamateriał pod kątem $\frac{\pi}{4}$, wyznaczony z prawa Snelliusa (2.10). Prze-



Rysunek 5.15. Składowa E_z [V/m] w wybranej chwili czasu $n = 5800$, dla trzech układów, których parametry zebrane są w Tabelicy 5.3.



Rysunek 5.16. Składowa E_z [V/m] w wybranej chwili czasu $n = 5800$, dla dwóch układów o współczynniku załamania $n = -6$, a – bez absorpcji, b – z absorpcją, (patrz Tablica 5.4.); linią przerywaną oznaczono bieg jednego z promieni padających na płytkę, zaznaczono także jego przedłużenie do pozornego ogniska, któremu odpowiada czarna kropka

Tablica 5.5. Parametry dyspersji użyte w symulacji metamateriału o niskiej wartości bezwzględnej współczynnika załamania

Opis	$\omega_{pe} = \omega_{ph}$	$\gamma_h = \gamma_e$	$n(\omega_0)$
załamanie ujemne	$\omega_0/\sqrt{2}$	0	-0.5
załamanie dodatnie	$\sqrt{3}/2\omega_0$	0	0.5

dłużenie promienia opuszczającego płytkę wyznacza położenie pozornego ogniska płytki, które zaznaczono czarną kropką w materiale płytki.

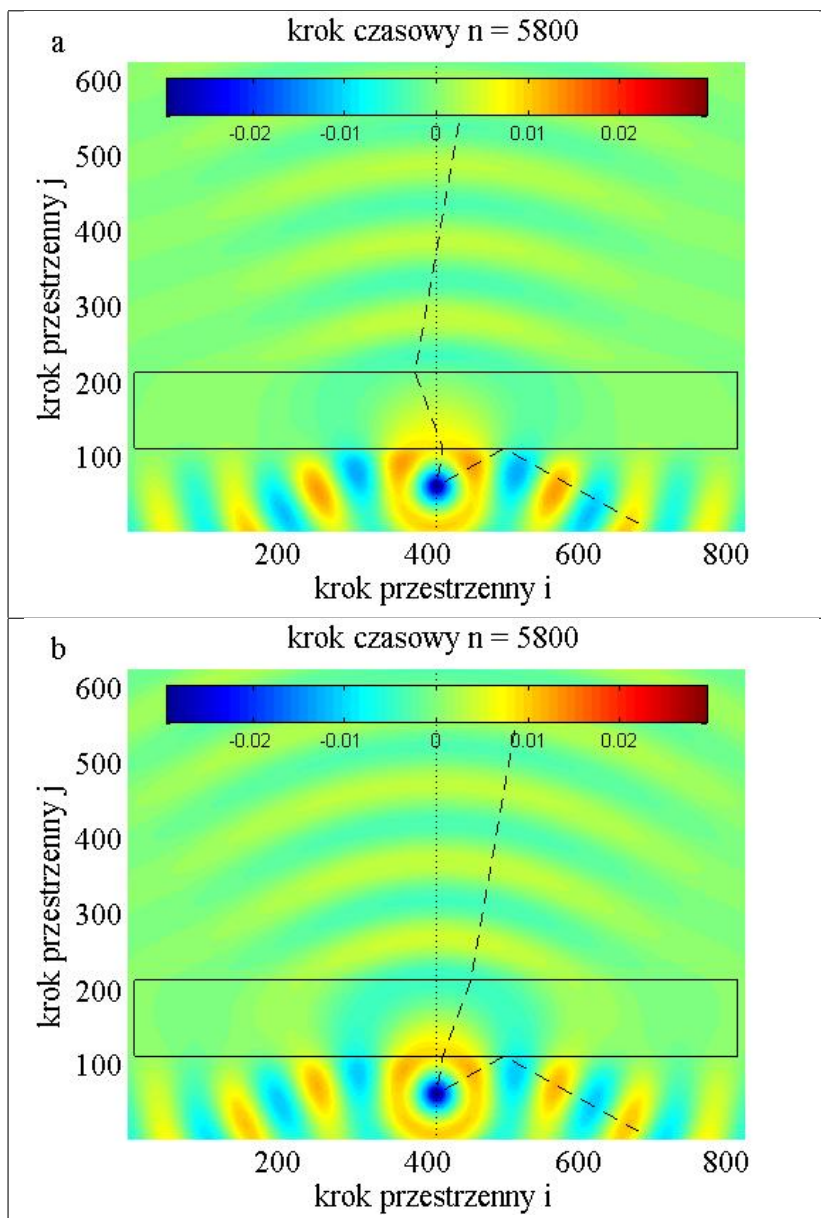
5.2.3. Metamateriał o małej wartości bezwzględnej współczynnika załamania

Następne eksperymenty numeryczne polegały na badaniu rozkładu pola w metamateriale, którego bezwzględna wartość współczynnika załamania wynosiła $\frac{1}{2}$. Spodziewamy się wystąpienia całkowitego wewnętrznego odbicia dla kątów padania większych od $\arcsin \frac{1}{2}$. Ponieważ duża część energii impulsu zostanie odbita i opuści obszar obliczeniowy, założono bezstratność warstwy metamateriału ($\gamma_e = \gamma_h = 0$). W pierwszej symulacji parametry dyspersji ustalono tak, by $n(\omega_0) = -\frac{1}{2}$, natomiast w drugiej $n(\omega_0) = \frac{1}{2}$. Parametry zebrano w Tablicy 5.5., a wykresy składowej E_z w wybranej chwili czasu $n = 5800$ przedstawiono na Rysunku 5.17.

Widzimy, że chociaż rozkład pola za płytką w obu przypadkach jest podobny to został uzyskany w zupełnie inny sposób. Na każdym z wykresów Rysunku 5.17.a. zaznaczono dwa promienie. Jeden z nich jest promieniem, który zgodnie z rozważaniami opartymi o prawo Snelliusa (2.10), ulega całkowitemu odbiciu. Odbita część fali elektromagnetycznej interferuje z promieniowaniem pochodzącym bezpośrednio ze źródła. Drugi z zaznaczonych promieni ulega podwójnemu załamaniu i opuszcza płytkę, interferując z innymi promieniami, które przeniknęły przez metamateriał. Na przedstawionym wykresie nie widzimy, aby w płytce lub za nią pojawiły się ogniska.

Podobnie na Rysunku 5.17.b. nie obserwujemy obrazu źródła. Jednakże w tym wypadku promienie przechodzące przez płytkę ulegają zgodnie z prawem Snelliusa (2.10) odchyleniu od osi układu i nie interferują za płytką. Rozkład pola przed płytką na Rysunku 5.17.b. jest zbliżony do rozkładu pola z Rysunku 5.17.a.

Długość fali w metamateriale jest dwukrotnie większa niż w próżni, co odpowiada dwukrotnie mniejszej wartości bezwzględnej współczynnika załamania.



Rysunek 5.17. Składowa E_z [V/m] w wybranej chwili czasu $n = 5800$, dla dwóch układów; a – $n = -0.5$, b – $n = 0.5$, (patrz Tablica 5.5.); liniami przerywanymi oznaczono bieg dwóch promieni padających na płytkę, jeden z nich odpowiada kątow padania większemu od kąta granicznego dla całkowitego odbicia, drugi z promieni ulega podwójnemu załamaniu

5.2.4. Podsumowanie

Przedstawione wyniki modelowania są w zgodzie z wynikami z monografii [4] i artykułu [54] oraz pokazały, że:

1. Fizyczna realizacja idealnej soczewki jest w zasadzie możliwa (Rysunki 5.12. i 5.14.).
2. Wykonanie rzeczywistej idealnej soczewki będzie utrudnione ze względu na absorpcję (Rysunek 5.15.a.) oraz silną dyspersję (Rysunek 5.13.).
3. Położenie ognisk idealnej soczewki pokrywa się z oczekiwanymi (Rysunek 2.10.). Dla ogniska znajdującego się za płytką zależy tylko od jej grubości, natomiast nie zależy od odległości między źródłem, a soczewką (Rysunki 5.15.b. i 5.15.c.).
4. Cienka płytka metamateriału o dużej wartości bezwzględnej współczynnika załamania może posiadać pozorne ognisko (Rysunki 5.16.).
5. Metamateriał o małej wartości bezwzględnej współczynnika załamania nie nadaje się do wykorzystania jako materiał idealnej soczewki (Rysunek 5.17.).

Rozdział 6.

Podsumowanie

Rozdział 2. pracy przedstawia, w oparciu o najnowsze monografie i prace źródłowe cytowane w spisie literatury, podstawy elektrodynamiki metamateriałów – nowej klasy ośrodków elektromagnetycznych wykazujących zjawisko ujemnego załamania fal elektromagnetycznych. Zaprezentowano również najbardziej interesujące zastosowania metamateriałów.

Rozdział 3. poświęcono właściwościom transmisji światła spolaryzowanego oraz fotonicznej struktury pasmowej aperiodycznych supersieci optycznych. Zastosowano formalizm rozwinięty w pracy doktorskiej [14]. Oryginalny wkład autora pracy polegał na uwzględnieniu rzeczywistych relacji dyspersyjnych dla względnych przenikalności elektrycznej oraz magnetycznej metamateriałów wchodzących w skład supersieci optycznych. Pozwoliło to na zbadanie efektów absorpcji fal elektromagnetycznych w obszarze częstotliwości rezonansowych. Na Rysunkach 3.2. i 3.3. odpowiada to długościom fal w pobliżu 550 nm. Dla tych częstotliwości badane supersieci optyczne praktycznie nie przepuszczają fal elektromagnetycznych. Na podkreślenie zasługuje nowy rezultat dotyczący właściwości transmisji światła przez supersieci optyczne, które wykazują pasma transmisji fali elektromagnetycznych dla częstotliwości i kątów padania, przy których spodziewano się całkowitego wewnętrzne odbicia (tj. zerowej transmisji).

Najważniejszymi częściami pracy są Rozdziały 4. i 5., gdzie obszernie przedstawiono odpowiednio metodę przyrostów skończonych (FDTD) i wybrane wyniki modelowania transmisji fal elektromagnetycznych przez jedno- i dwuwymiarowe układy zawierające metamateriały.

Zagadnienia dotyczące oddziaływania fal elektromagnetycznych z metamateriałami są aktualnie intensywnie badane ze względów poznawczych (wspomniane zjawisko ujemnego załamania światła i silna dyspersja oraz odwrotne efekty Czerenkowa i Dopplera, właściwości plazmonów) oraz zastosowań metamateriałów m.in. do konstrukcji nowego typu anten, idealnych soczewek, filtrów i zwierciadeł elektromagnetycznych, osłon elektromagnetycznych, wnęk rezonatorów oraz kryształów i światłowodów fotonicznych. Jednym z najważniejszych narzędzi badawczych jest metoda FDTD, która umożliwia całkowanie równań Maxwella zależnych jednocześnie od zmiennych przestrzennych i czasu (Rozdział 4.).

Jednym z najważniejszych osiągnięć podczas realizacji pracy dyplomowej jest samodzielne opanowanie przez autora algorytmu Yee umożliwiającego efektywne numeryczne rozwiązywanie równań Maxwella. Uwzględniono przy tym różne typy źródeł fal elektromagnetycznych, silną dyspersję oraz absorbujące warunki brzegowe (warstwy idealnie dopasowane). W oparciu o podstawową monografię z zakresu metody FDTD [35] oraz monografię [57] i opublikowane artykuły [54, 55] dokonano samodzielnej implementacji programów komputerowych, które najpierw przetestowano, a następnie zastosowano do zbadania

rozkładu pól elektrycznych i magnetycznych fal elektromagnetycznych generowanych zaprojektowanymi źródłami i propagujących się w modelowanych układach zawierających metamateriałową płytkę płaskorównoległą. Otrzymane wyniki numeryczne stanowią treść Rozdziału 5.

Najwartościowszym osiągnięciem pracy jest samodzielne odtworzenie dotychczas opublikowanych najważniejszych wyników publikacji [54, 57]. W szczególności w przypadku jednowymiarowej propagacji impulsu falowego potwierdzono ujemną wartość prędkości fazowej fali elektromagnetycznej propagującej się w metamateriale, przy jednoczesnej dodatniej wartości prędkości grupowej. Pokazano (Rozdział 5.1.4. i 5.1.5.; Rysunek 5.10.), że ujemna wartość prędkości fazowej nie narusza zasady przyczynowości, co było w przeszłości przedmiotem ożywionej dyskusji naukowej [58]. Symulacje dwuwymiarowe dotyczyły właściwości odwzorowywania źródła punktowego przez metamateriałową płytkę płaskorównoległą. Otrzymane rezultaty potwierdziły możliwość realizacji soczewki idealnej oraz wskazały na istotne ograniczenia dotyczące funkcjonalności takiej soczewki.

Wykorzystując wyniki modelowania numerycznego przygotowano i dołączono na płycie CD animacje przedstawiające propagację FEM w opisanych przypadkach jedno- i dwuwymiarowym (pliki `film1d.avi` oraz `film2d.avi`).

W zakończeniu pracy pragnę stwierdzić, że przedmiotem przyszłych badań – przy użyciu metody FDTD – mogłyby być zagadnienia dotyczące oddziaływania fal elektromagnetycznych z układami trójwymiarowymi zawierającymi metamateriały takimi jak kryształy i światłowody fotoniczne. Wymagałoby to opracowania i rozwinięcia dotychczasowych programów numerycznych, co pozwoliłoby wyznaczyć strukturę fotoniczną układów zbudowanych z ośrodków prawo- i lewoskrętnych.

Kolejnymi etapami badań mogłyby być:

1. Uwzględnienie dyspersji typu Lorentza (4.47). Ten typ dyspersji jest najogólniejszy¹ i wydaje się być bliższy rzeczywistości. Wykonanie tego typu modelowania metodą FDTD jest związane z istotną modyfikacją programów komputerowych i pociąga za sobą zwiększenie wymaganej pamięci i czasu obliczeń.
2. Rozwinięcie możliwości modelowania przez zaimplementowanie źródła promieniowania w sformułowaniu pola całkowitego/pola rozproszonego (TF/SF). Podejście to pozwala na wprowadzenie do układu fal płaskich i wiązek gaussowskich.
3. Użycie absorbujących warunków brzegowych (UPML).
4. Uwzględnienie efektów nieliniowych.

Innym interesującym problemem jest zbadanie wpływu struktury wewnętrznej niejednorodnych metamateriałów zbudowanych z elementów SRR, TW i innych przedstawionych w Rozdziale 2.4.) na ich właściwości elektromagnetyczne.

Uwzględnienie w procesie modelowania metodą FDTD jak największej liczby elementów realnych układów pozwala porównywać wyniki rzeczywistych eksperymentów i ich numerycznych odpowiedników, a docelowo stwarza możliwości projektowania nowych urządzeń o nieoczekiwanych właściwościach fizycznych i praktycznych zastosowaniach.

¹Modele dyspersji typu Drudego i Debye'a są przypadkami szczególnymi dyspersji typu Lorentza.

Wykaz skrótów

- ABC** – Absorbing Boundary Conditions – absorbujące warunki brzegowe
- ADE** – Auxiliary Differential Equations – pomocnicze równania różniczkowe
- DNG** – Double Negative – materiały podwójnie ujemne ($\varepsilon < 0, \mu < 0$)
- FDTD** – Finite-Difference Time-Domain – metoda przyrostów skończonych
- LH** – Left-handed – materiały lewoskrętne
- FEM** – fala elektromagnetyczna
- NRI** – Negative Refraction Index – materiały o ujemnym współczynniku załamania
- PEC** – Perfect Electric Conductor – idealny przewodnik elektryczny
- PML** – Perfectly Matched Layers – warstwy idealnie dopasowane
- RBC** – Radiation Boundary Conditions – radiacyjne warunki brzegowe
- SRR** – Split-Ring Resonator – rozszczepiony rezonator kołowy
- TF/SF** – Total Field/Scattered Field – pole całkowite/rozproszone
- TW** – Thin Wire – cienki drut
- UMPL** – Uniaxial PML – jednoosiowe warstwy idealnie dopasowane

Spis rysunków

2.1. Współczynnik załamania w zależności od przenikalności elektrycznej i magnetycznej	10
2.2. Wzajemne ułożenie wektorów \vec{k} , \vec{E} , \vec{H} ; a – w ośrodku o dodatnim współczynniku załamania; b – w ośrodku o ujemnym współczynniku załamania	10
2.3. Warunki ciągłości na granicy ośrodków prawo- i lewoskrętnego	12
2.4. Załamanie promienia na granicy dwu ośrodków. k – wektor falowy, S – wektor Poyntinga, θ – kąt padania (załamania)	12
2.5. Struktura cienkich drutów (TW) wykazująca ujemną przenikalność elektryczną dla $\vec{E} \parallel z$ [3,11]	14
2.6. Struktura rozszczepionych rezonatorów kołowych (SRR) wykazująca ujemną przenikalność magnetyczną dla $\vec{H} \perp y$ [3, 15]	15
2.7. Metamateriał opisany w [13], wykazujący ujemny współczynnik załamania w zakresie mikrofal	16
2.8. Struktura z artykułu [20]; a – schemat metamateriału i polaryzacja fali padającej; b – parametry: $t = 25$ nm, $s = 35$ nm, $w_x = 307$ nm, $w_y = 100$ nm, wymiar komórki elementarnej $a = 600$ nm, grubość metamateriału $d = 2t + s = 85$ nm; c – obraz z góry w mikrografii elektronowej	17
2.9. Struktura z artykułu [21]; a – komórka elementarna i polaryzacja fali padającej, $a_x = 7$ mm, $a_y = 9$ mm, $w = 1$ mm, długość krótszych drutów 7 mm, $t_s = 254$ μ m, grubość warstw miedzi 10 μ m; b – zdjęcie układu	18
2.10. Bieg promieni w przypadku idealnej soczewki. Grubość soczewki d jest większa od odległości obiektu od niej l	18
2.11. Bieg promieni w przypadku idealnej soczewki. Grubość soczewki d jest mniejsza od odległości obiektu od niej l	19
2.12. Bieg promieni w niewidzialnym okryciu zaproponowanym w [24]; a – przekrój; b – widok trójwymiarowy	19
3.1. Struktura wielowarstwowa; każda z J warstw jest opisana przez grubość d_j , przenikalność elektryczną ϵ_j oraz magnetyczną μ_j , formalizm macierzy przejścia wiąże amplitudy fali płaskiej w półprzestrzeniach oznaczonych indeksami „in” oraz „out”	22
3.2. Transmitancja, reflektancja i absorpcja przez supersieć periodyczną ($L = 6$), składającą się z warstw o ujemnym i dodatnim współczynniku załamania, przedstawione w funkcji długości padającej fali i jej kąta padania [27]	24
3.3. Transmitancja, reflektancja i absorpcja przez supersieć typu Fibonacciego ($M = 1$, $N = 1$, $L = 6$), składającą się z warstw o ujemnym i dodatnim współczynniku załamania, przedstawione w funkcji długości padającej fali i jej kąta padania [27]	24

3.4.	Fotoniczna struktura pasmowa uogólnionej supersieci Fibonacciego ($M = 2$, $N = 1$, $L = 4$), po lewej polaryzacja p, po prawej polaryzacja s; prękość grupowa w zależności od częstotliwości, polaryzacja s, $L = 4$ (dół), $L = 5$ (środek), $L = 6$ (góra) [30]	25
3.5.	Fotoniczna struktura pasmowa supersieci o podwojonym okresie ($L = 3$), po lewej polaryzacja p, po prawej polaryzacja s; prękość grupowa w zależności od częstotliwości, polaryzacja s, $L = 3$ (dół), $L = 4$ (środek), $L = 5$ (góra) [30]	25
4.1.	Siatka Yee dla przypadku jednowymiarowego w trzech kolejnych chwilach (n , $n + 1/2$, $n + 1$). Wartość $E_z _i^{n+1}$ (kolor czerwony) obliczana jest na podstawie wartości $E_z _i^n$ (kolor zielony) oraz $H_y _{i+1/2}^{n+1/2}$ i $H_y _{i-1/2}^{n+1/2}$ (kolor niebieski).	30
4.2.	Siatka Yee dla przypadku dwuwymiarowego (mod TM_z). Zaznaczono komórkę elementarną (kolor szary) i obliczane w niej wartości: $E_z _{i,j}^n$ dla chwil całkowitych (kolor czerwony) oraz $H_x _{i,j+1/2}^{n+1/2}$ i $H_y _{i+1/2,j}^{n+1/2}$ dla chwil połówkowych (kolor niebieski)	32
4.3.	Komórka elementarna siatki Yee dla trzech wymiarów	34
4.4.	Efekt przybliżenia kołowego przekroju na dwuwymiarowej siatce kwadratowej	35
4.5.	Schematyczna struktura obszaru obliczeniowego z wykorzystaniem PML. Kolory oznaczają: biały – właściwy obszar symulacji, szary warstwy absorbujące. Na granicy obszaru obliczeniowego umiejscowiony jest idealny przewodnik elektryczny (PEC – perfect electric conductor) zaznaczony linią pogrubioną	40
5.1.	Schemat modelowanego układu. Zaznaczono: absorbujące warstwy PML (grubość 20 komórek), źródło promieniowania w punkcie $i = 600$, płytkę metamateriału o grubości 600 komórek	44
5.2.	Zależność funkcji $f(n)$, określonej równaniem (5.1), od n ; wartość stałej $n_T = 158$	45
5.3.	Zależność funkcji $f(n)$, określonej równaniem (5.2), od n ; wartości stałych: $n_T = 316$, $q = 5$, $r = 10$	46
5.4.	Wartość składowej elektrycznej pola w punkcie $i = 610$ w zależności od czasu. Ujemna przenikalność elektryczna – kolor niebieski; ujemna przenikalności magnetyczna – kolor zielony; obie przenikalności ujemne – kolor czerwony. W lewej części wykresu obserwujemy falę opuszczającą źródło. Po pewnym czasie do obserwowanego punktu powraca impuls w całości odbity od płytki (prawa strona wykresu). Gdy ujemna jest przenikalność elektryczna impuls zmienia fazę, natomiast gdy ujemna jest przenikalność magnetyczna faza składowej elektrycznej się nie zmienia. Dla warstwy o obu przenikalnościach ujemnych praktycznie nie obserwujemy odbicia (por. Rysunek 5.5.)	47
5.5.	Wartość składowej elektrycznej pola w punkcie $i = 610$ w zależności od czasu; obserwujemy niewielkie odbicie, związane z niedokładnościami dyskretyzacji, amplituda o cztery rzędy mniejsza, niż dla fali padającej	47
5.6.	Propagacja fali sinusoidalnej (łącznie 20 okresów, w tym po 5 na włączenie/wyłączenie) przez metamateriał ($\omega_{pe} = \omega_{ph} = \sqrt{2}\omega_0$, $\gamma_e = \gamma_h = 5 \cdot 10^{-3}\omega_p$), składowe E_z i H_y w wybranych chwilach czasu; wykresy pochodzą z animacji film1d.avi znajdujących się na dołączonej płycie CD	49

5.7. Wektor Poyntinga mierzony w trzech punktach wewnątrz płytki metamateriałowej nie wykazującej absorpcji. Kolor niebieski $i = 1205$; kolor zielony $i = 1500$; kolor czerwony $i = 1795$	50
5.8. Wektor Poyntinga mierzony w trzech punktach wewnątrz płytki metamateriałowej z silną absorpcją. Kolor niebieski $i = 1205$; kolor zielony $i = 1500$; kolor czerwony $i = 1795$	50
5.9. Znormalizowana energia przeniesiona przez impuls w zależności od czasu. Kolor czarny – punkt $i = 900$, kolor niebieski – punkt $i = 2700$, bez płytki; kolor zielony – punkt $i = 2700$, płytka o grubości $600\Delta_s$; kolor czerwony – punkt $i = 2700$, płytka o grubości $1200\Delta_s$	51
5.10. Wartość składowej E_z pola elektromagnetycznego od czasu. Kolor niebieski odpowiada punktowi $i = 1500$; kolor zielony $i = 1510$. Wykresy przedstawiają wczesną i późną odpowiedź pola w tych punktach	53
5.11. Schemat modelowanego układu dwuwymiarowego. Płytkę metamateriału o grubości $J_d \cdot \Delta_s$ i szerokości $I_d \cdot \Delta_s$ o początku w punkcie (I_0, J_0) zaznaczona na szaro; miękkie źródło punktowe (i_z, j_z) ; na brzegach obszaru obliczeniowego znajdują się warstwy idealnie dopasowane Berengera o grubości 10 komórek	54
5.12. Składowa E_z [V/m] w wybranych chwilach czasu; fala sinusoidalna pochodząca z miękkiego źródła (5 okresów na włączenie, praca ciągła przez cały czas trwania symulacji) przez warstwę metamateriału ($\omega_{pe} = \omega_{ph} = \sqrt{2}\omega_0$, $\gamma_e = \gamma_h = 0$); linia ciągła otacza metamateriał, natomiast linie przerywane wskazują pozycję źródła oraz spodziewanych obrazów źródła; kolorowa skala określa wartość składowej elektrycznej pola; wykresy pochodzą z animacji <code>film2d.avi</code> znajdującej się na dołączonej płycie CD	55
5.13. Składowa E_z [V/m] w wybranych chwilach czasu ($n = 4500$, $n = 4700$); pozostałe parametry jak na Rysunku 5.12.	56
5.14. Składowa E_z [V/m] dla chwili czasu $n = 4600$, w punktach leżących w płaszczyźnie: źródła, $j = 61$, kolor niebieski; ogniska wewnątrz warstwy, $j = 161$, kolor zielony; ogniska za płytką $j = 261$, kolor czerwony	57
5.15. Składowa E_z [V/m] w wybranej chwili czasu $n = 5800$, dla trzech układów, których parametry zebrane są w Tablicy 5.3.	58
5.16. Składowa E_z [V/m] w wybranej chwili czasu $n = 5800$, dla dwóch układów o współczynniku załamania $n = -6$, a – bez absorpcji, b – z absorpcją, (patrz Tablica 5.4.); linią przerywaną oznaczono bieg jednego z promieni padających na płytkę, zaznaczono także jego przedłużenie do pozornego ogniska, któremu odpowiada czarna kropka	59
5.17. Składowa E_z [V/m] w wybranej chwili czasu $n = 5800$, dla dwóch układów; a – $n = -0.5$, b – $n = 0.5$, (patrz Tablica 5.5.); liniami przerywanymi oznaczono bieg dwóch promieni padających na płytkę, jeden z nich odpowiada kątowemu padaniu większemu od kąta granicznego dla całkowitego odbicia, drugi z promieni ulega podwójnemu załamaniu	61

Bibliografia

- [1] Shalaev, V. M., „Optical negative-index metamaterials,” *Nature Photonics*, **1**, str. 41–48, styczeń 2007.
- [2] Wiesielago, W., „The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ ,” *Soviet Physics Uspekhi*, **10**(4), str. 509–514, 1968.
- [3] Caloz, C. oraz T. Itoh, *Electromagnetic metamaterials: transmission line theory and microwave applications: the engineering approach*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2006.
- [4] Eleftheriades, G. V. oraz K. G. Balmain, *Negative-Refraction Metamaterials: Fundamental Principles and Applications*, John Wiley & Sons, New Jersey, 2005.
- [5] Griffiths, D. J., *Podstawy elektrodynamiki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2006.
- [6] Jackson, J. D., *Elektrodynamika klasyczna*, PWN, Warszawa, 1982.
- [7] Suffczyński, M., *Elektrodynamika*, PWN, Warszawa, 1980.
- [8] Feynman, R. P., R. B. Leighton oraz M. Sands, *Feynmana wykłady z fizyki*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2001.
- [9] Tretyakov, S. A., „Research on negative refraction and backward-wave media: A historical perspective,” *Proc. Latsis Symposium*, 2005.
- [10] Pendry, J. B., A. J. Holden, W. J. Stewart oraz I. Youngs, „Extremely low frequency plasmons in metallic mesostructure,” *Phys. Rev. Lett.*, **76**(25), str. 4773–4776, czerwiec 1996.
- [11] Pendry, J. B., A. J. Holden, W. J. Stewart oraz I. Youngs, „Low frequency plasmons in thin-wire structures,” *J. Phys. Condens. Matter*, **10**, str. 4785–4809, 1998.
- [12] Smith, D. R., W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser oraz S. Schultz, „Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity,” *Phys. Rev. Lett.*, **84**(18), str. 4184–4187, maj 2000.
- [13] Shelby, R. A., D. R. Smith oraz S. Schultz, „Experimental Verification of a Negative Index of Refraction,” *Science*, **292**, str. 77–79, kwiecień 2001.
- [14] Klauzer-Kruszyna, A., *Propagacja światła spolaryzowanego w wybranych supersieciach aperiodycznych*, Rozprawa doktorska, Politechnika Wroclawska, 2005.
- [15] Pendry, J. B., A. J. Holden, D. J. Robbins oraz W. J. Stewart, „Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena,” *IEEE Trans. Micr. Theory. Tech.*, **47**(11), str. 2075–2084, 1999.
- [16] Dziębaj, M., *Metody otrzymywania i właściwości optyczne materiałów z ujemnym współczynnikiem załamania*, Praca magisterska, Politechnika Wroclawska, 2006, <http://www.if.pwr.wroc.pl/~wsalejda>.
- [17] Linden, S., C. Enkrich, M. Wegener, J. F. Zhou, K. Th. oraz C. M. Soukoulis, „Magnetic Response of Metamaterials at 100 Terahertz,” *Science*, **306**, str. 1351–1353, listopad 2004.
- [18] Enkrich, C., M. Wegener, S. Linden, S. Burger, L. Zschiedrich, F. Schmidt, J. F. Zhou, T. Koschny oraz C. M. Soukoulis, „Magnetic Metamaterials at Telecommunication and Visible Frequencies,” *Physical Review Letter*, **95**, str. 203 901–203 904, listopad 2005.

-
- [19] Katsarakis, N., T. Koschny, M. Kafesaki, E. N. Economou oraz C. M. Soukoulis, „Electric coupling to the magnetic resonance of split ring resonators,” *Applied Physics Letters*, **84**(15), str. 2943–2945, kwiecień 2004.
- [20] Dolling, G., C. Enkrich, M. Wegener, C. M. Soukoulis oraz S. Linden, „Simultaneous Negative Phase and Group Velocity of Light in a Metamaterial,” *Science*, **312**(5775), str. 892–894, maj 2006.
- [21] Zhou, J. F., L. Zhang, G. Tuttle, T. Koschny oraz C. M. Soukoulis, „Negative index materials using simple short wire pairs,” *Physical Review B*, **73**, str. 041 101(R), styczeń 2006.
- [22] Lezec, H. J., J. A. Dionne oraz H. A. Atwater, „Negative Refraction at Visible Frequencies,” *Science*, **316**, str. 430–432, kwiecień 2007.
- [23] Pendry, J. B., „Negative refraction makes a perfect lens,” *Physical Review Letters*, **85**(18), str. 3966–3969, październik 2000.
- [24] Pendry, J. B., D. Schurig oraz D. R. Smith, „Controlling Electromagnetic Fields,” *Science*, **312**, str. 1780–1782, czerwiec 2006.
- [25] Salejda, W., A. Klauzer-Kruszyna, M. H. Tyc oraz K. Tarnowski, „Electromagnetic wave propagation through aperiodic superlattices composed of left- and right-handed materials,” *SPIE Proceedings Series*, **5955**, str. 595 514, 2005.
- [26] Salejda, W., K. Tarnowski, A. Klauzer-Kruszyna oraz M. H. Tyc, „One-dimensional photonic quasicrystals: application to Bragg reflectors,” *SPIE Proceedings Series*, **5950**, str. 59 501Q, 2005.
- [27] Tarnowski, K., W. Salejda, M. H. Tyc oraz A. Klauzer-Kruszyna, „Propagation of polarized light through superlattices composed of left- and right-handed materials,” *SPIE Proceedings Series*, **6581**, str. 658 113, 2007.
- [28] Tarnowski, K., W. Salejda oraz M. H. Tyc, „Propagation of polarized light through optical nanosuperlattices,” *Optica Applicata*, 2007, w recenzji.
- [29] Salejda, W., M. H. Tyc, A. Klauzer-Kruszyna oraz K. Tarnowski, „Photonic band structure of the quasi-one-dimensional photonic quasicrystals,” *SPIE Proceedings Series*, **5950**, str. 59 501R, 2005.
- [30] Tyc, M. H., W. Salejda, A. Klauzer-Kruszyna oraz K. Tarnowski, „Photonic band structure of one-dimensional aperiodic superlattices composed of negative refraction metamaterials,” *SPIE Proceedings Series*, **6581**, str. 658 112, 2007.
- [31] Wang, X., U. Grimm oraz M. Schreiber, „Trace and antitrace maps for aperiodic sequences, their extensions and applications,” *Physical Review B*, **62**, str. 14 020–14 031, 2000.
- [32] Klauzer-Kruszyna, A., W. Salejda oraz M. Tyc, „Polarized light transmission through generalized Fibonacci multilayers. I. Dynamical maps approach,” *Optik/Optics*, **115**, str. 257–266, 2004.
- [33] Klauzer-Kruszyna, A., W. Salejda oraz M. H. Tyc, „Polarized light transmission through generalized Fibonacci multilayers. II. Numerical results,” *Optik/Optics*, **115**, str. 267–276, 2004.
- [34] Yeh, P., *Optical Waves in Layered Media*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [35] Taflove, A. oraz S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time Domain Method*, Artech House, Inc., Norwood, 2005.
- [36] Yee, K., „Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **14**, str. 302–307, 1966.
- [37] Taflove, A. oraz M. E. Brodwin, „Numerical Solution of Steady-state Electromagnetic Scattering Problems Using the Time-Dependent Maxwell’s Equations,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, **23**(8), str. 623–630, sierpień 1975.

- [38] Taflove, A., „Application of the finite-difference time-domain method to sinusoidal steady state electromagnetic penetration problems,” *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, **22**(3), str. 191–202, sierpień 1980.
- [39] Kincaid, D. oraz W. Cheney, *Analiza numeryczna*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 2002.
- [40] Salejda, W., M. H. Tyc oraz M. Just, *Algebraiczne metody rozwiązywania równania Schrödingera*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2002.
- [41] Bayliss, A. oraz E. Turkel, „Radiation boundary conditions for wave-like equations,” *Comm. Pure Appl. Math.*, **23**, str. 707–725, 1980.
- [42] Bayliss, A., M. Gunzburger oraz E. Turkel, „Boundary conditions for the numerical solution of elliptic equations in exterior regions,” *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **42**(2), str. 430–451, 1982.
- [43] Higdon, R. L., „Absorbing boundary conditions for difference approximation to the multi-dimensional wave equation,” *Mathematics of Computation*, **47**, str. 437–459, 1986.
- [44] Higdon, R. L., „Numerical absorbing boundary conditions for the wave equation,” *Mathematics of Computation*, **49**, str. 65–90, 1987.
- [45] Engquist, B. oraz A. Majda, „Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves,” *Mathematics of Computation*, **31**, str. 629–651, 1977.
- [46] Berenger, J. P., „A perfectly matched layer for absorption of electromagnetic waves,” *Journal of Computational Physics*, **114**, str. 185–200, 1994.
- [47] Sacks, Z. S., D. M. Kingsland, R. Lee oraz J.-F. Lee, „A perfectly matched anisotropic absorber for use as an absorbing boundary condition,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **43**, str. 1460–1463, 1995.
- [48] Gedney, S. D., „An anisotropic perfectly matched layer absorbing media for the truncation of FDTD lattices,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **44**, str. 1630–1639, 1996.
- [49] Berenger, J. P., „Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problems,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **44**(1), styczeń 1996.
- [50] Berenger, J. P., „Improved PML for the FDTD solution of wave-structure interaction problems,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **45**(3), marzec 1997.
- [51] Kashiwa, T. oraz I. Fukai, „A treatment by FDTD method of dispersive characteristics associated with electronic polarization,” *Microwave Optics Tech. Lett.*, **3**, str. 203–205, 1990.
- [52] Joseph, R. M., S. C. Hagness oraz A. Taflove, „Direct time integration of Maxwell’s equations in linear dispersive media with absorption for scattering and propagation of femtosecond electromagnetic pulses,” *Optics Lett.*, **16**, str. 1412–1414, 1991.
- [53] Okoniewski, M., M. Mrozowski oraz M. A. Stuchly, „Simple treatment of multi-term dispersion in FDTD,” *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, **7**, str. 121–123, 1991.
- [54] Ziolkowski, R. W. oraz E. Heyman, „Wave propagation in media having negative permittivity and permeability,” *Physical Review E*, **64**(5), str. 056 625, październik 2001.
- [55] Ziolkowski, R. W., „Pulsed and CW Gaussian beam interactions with double negative metamaterial slabs,” *Optics Express*, **11**(7), str. 662–681, 2003.
- [56] Saj, W. M., *Zastosowanie metody przyrostów skończonych (FDTD) do modelowania światłowodu fotonicznego*, Praca magisterska, Uniwersytet Warszawski, 2003, <http://www.igf.fuw.edu.pl/~saj/praca.pdf>.
- [57] Engheta, N. oraz R. W. Ziolkowski, *Metamaterials: Physics and Engineering Explorations*, John Wiley & Sons, 2006.
- [58] Bliokh, K. Y. oraz Y. P. Bliokh, „What are the left-handed media and what is interesting about them?” *Physics Uspekhi*, **47**(4), str. 393–400, 2004.